Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Никитина, А. И. Соколов, Ренормированные константы связи трехмерной скалярной теории поля типа $\lambda\phi^4$ и псевдо- ϵ -разложение, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 3, 502–510

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:52:24

© 2017 г.

М. А. Никитина*, А. И. Соколов*[†]

РЕНОРМИРОВАННЫЕ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ ТРЕХМЕРНОЙ СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ТИПА $\lambda\phi^4$ И ПСЕВДО- ϵ -РАЗЛОЖЕНИЕ

Ренормированные константы связи g_{2k} , которые входят в уравнение состояния и определяют нелинейные восприимчивости системы, принимают универсальные значения g_{2k}^* в точке Кюри. Они вычисляются вместе с отношениями $R_{2k} = g_{2k}/g_4^{k-1}$ для трехмерной скалярной теории поля типа $\lambda\phi^4$ с помощью метода псевдо- ϵ -разложения. Псевдо- ϵ -разложения для g_6^* , g_8^* , R_6^* и R_8^* найдены в пятипетлевом приближении, численные оценки приведены для R_6^* и R_8^* . Коэффициенты псевдо- ϵ -разложений для g_6^* и R_6^* столь малы, что получить высокоточные численные результаты можно, используя простые аппроксиманты Паде. Их применение дает значение $R_6^* = 1.650$, в то время как недавние расчеты на решетках привели к значению $R_6^* = 1.649(2)$. Структура псевдо- ϵ -разложений для g_8^* и R_8^* менее благоприятна с вычислительной точки зрения. Тем не менее суммирование методом Паде–Бореля ряда для R_8^* ведет к оценке $R_8^* = 0.890$, лишь немного отличающейся от значений $R_8^* = 0.871$, $R_8^* = 0.857$, извлеченных из результатов решеточных и теоретико-полевых вычислений.

Ключевые слова: нелинейные восприимчивости, эффективные константы связи, модель Изинга, ренормализационная группа, псевдо- ϵ -разложение.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9117>

Критическое поведение систем, испытывающих фазовые переходы второго рода и описываемых трехмерной евклидовой скалярной теорией поля типа $\lambda\phi^4$, характеризуется набором универсальных параметров, включающим в себя помимо критических индексов ренормированные эффективные константы связи g_{2k} и их отношения $R_{2k} = g_{2k}/g_4^{k-1}$. Эти отношения входят в разложение свободной энергии по степеням намагниченности и определяют наряду с ренормированной константой связи g_4

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (грант № 11.38.636.2013), РФФИ (грант № 15-02-04687) и фонда Д. Зимины “Династия”.

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: ais2002@mail.ru

[†]Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия

нелинейные восприимчивости различных порядков:

$$F(z, m) - F(0, m) = \frac{m^3}{g_4} \left(\frac{z^2}{2} + z^4 + R_6 z^6 + R_8 z^8 + \dots \right), \quad (1)$$

$$\chi_4 = \left. \frac{\partial^3 M}{\partial H^3} \right|_{H=0} = -24 \frac{\chi^2}{m^3} g_4, \quad (2)$$

$$\chi_6 = \left. \frac{\partial^5 M}{\partial H^5} \right|_{H=0} = -6! \frac{\chi^3 g_4^2}{m^6} (R_6 - 8), \quad (3)$$

$$\chi_8 = \left. \frac{\partial^7 M}{\partial H^7} \right|_{H=0} = -8! \frac{\chi^4 g_4^3}{m^9} (R_8 - 24R_6 + 96), \quad (4)$$

где $z = M\sqrt{g_4/m^{1+\eta}}$ есть безразмерная намагниченность, ренормированная масса $m \sim (T - T_c)^\nu$ представляет собой обратный радиус корреляции, χ – линейная восприимчивость, а χ_4 , χ_6 и χ_8 – нелинейные восприимчивости четвертого, шестого и восьмого порядков соответственно.

Нелинейные восприимчивости и скейлинговое уравнение состояния трехмерной модели Изинга или, что то же самое, трехмерной скалярной теории поля типа $\lambda\phi^4$ активно изучаются теоретиками. В течение последних сорока лет ренормированные константы связи g_{2k} и их отношения R_{2k} вычислялись с помощью разнообразных аналитических и численных методов [1]–[32]. Расчет универсальных критических значений g_4^* , g_6^* и R_6^* в рамках метода теоретико-полевой ренормализационной группы (РГ) для систем с пространствами физических размерностей показал, что РГ-техника позволяет получать высокоточные численные оценки этих величин. Например, пересуммирование четырех- и пятипетлевых РГ-разложений с помощью процедур, основанных на преобразовании Бореля, ведет к значениям g_6^* , отличающимся друг от друга менее чем на 0.5% [15], [16], а трехпетлевого РГ-приближения оказывается достаточно, чтобы обеспечить условную точность не хуже 1.6% [15], [23]. В принципе, все это не удивительно, поскольку метод теоретико-полевой РГ уже демонстрировал свою высокую численную эффективность, когда использовался для вычисления критических индексов, отношений критических амплитуд, граничной размерности параметра порядка и т. п. для многочисленных моделей фазовых переходов [3], [4], [11], [19], [26], [29], [30], [33], [34].

Чтобы получить приемлемые численные оценки из расходящихся РГ-рядов, необходимо применять те или иные методы пересуммирования. Большинство используемых методов основано на преобразовании Бореля, которое убирает факториальный рост коэффициентов и дает основу для построения сходящихся итерационных процедур. Эти процедуры позволили получить большое количество высокоточных численных результатов для основных моделей критических явлений. Существует, однако, альтернативный метод, преобразующий расходящиеся ряды в более удобные в вычислительном отношении, т. е. в такие, в которых младшие коэффициенты малы, а старшие растут гораздо медленнее, чем в исходных разложениях. Мы имеем в виду метод псевдо- ϵ -разложения, предложенный Никелом (см. ссылку [19] в статье [4]). Данный метод обладает очень высокой вычислительной эффективностью, что было обнаружено в ходе вычисления критических индексов и других универсальных величин для различных трехмерных и двумерных систем [4], [32], [35]–[44].

В этой работе мы исследуем ренормированные эффективные константы связи и универсальные отношения R_{2k} трехмерной скалярной теории поля типа $\lambda\phi^4$ с помощью техники псевдо- ϵ -разложения. Псевдо- ϵ -разложения (τ -ряды) для универсальных значений ренормированных констант связи g_6 и g_8 строятся на основе пятипетлевых РГ-разложений, полученных Гвида и Зинн-Жюстеном [16]. Наряду с разложениями g_6^* и g_8^* выводятся τ -ряды для универсальных критических значений отношений $R_6 = g_6/g_4^2$ и $R_8 = g_8/g_4^3$ в пятом порядке по τ . Полученные псевдо- ϵ -разложения обрабатываются с помощью аппроксимант Паде и техники Паде–Бореля, а там, где это выглядит разумным, подвергаются прямому суммированию. Найденные численные оценки универсальных отношений сопоставляются со значениями, извлеченными из многопетлевых ϵ -разложений, из разложений перенормированной теории возмущений в трех измерениях и из результатов расчетов на решетках. В конце статьи формулируется заключение, касающееся вычислительной мощи метода псевдо- ϵ -разложения применительно к задачам данного типа.

Итак, гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (m_0^2 \varphi^2 + (\nabla \varphi)^2) + \frac{\lambda}{24} \varphi^4 \right], \quad (5)$$

где φ – вещественное скалярное поле, квадрат голй массы m_0^2 пропорционален $T - T_c^{(0)}$, а $T_c^{(0)}$ – температура фазового перехода в приближении среднего поля. Для модели (5) β -функция была рассчитана в рамках массивной теории [3], [45] с пропагатором, ренормированной вершиной и оператором φ^2 , нормированными стандартным образом:

$$\begin{aligned} G_R^{-1}(0, m, g_4) &= m^2, & \frac{\partial G_R^{-1}(p, m, g_4)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=0} &= 1, \\ \Gamma_R(0, 0, 0, m, g) &= m^2 g_4, & \Gamma_R^{1,2}(0, 0, m, g_4) &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Позже для этой модели были найдены пятипетлевые РГ-ряды для эффективных безразмерных констант связи g_6 и g_8 [16]:

$$g_6 = \frac{9}{\pi} g_4^3 \left(1 - \frac{3}{\pi} g_4 + 1.38996295 g_4^2 - 2.50173246 g_4^3 + 5.275903 g_4^4 \right), \quad (7)$$

$$g_8 = -\frac{81}{2\pi} g_4^4 \left(1 - \frac{65}{6\pi} g_4 + 7.77500131 g_4^2 - 18.5837685 g_4^3 + 48.16781 g_4^4 \right), \quad (8)$$

и шестипетлевое псевдо- ϵ -разложение для координаты вильсоновской фиксированной точки. Это разложение было получено путем замены линейного члена в выражении для β -функции на τg_4 , где τ – фиктивный малый параметр, и последующего решения уравнения $\beta(g_4) = 0$ посредством итераций по τ . Соответствующий τ -ряд имеет вид [32]

$$\begin{aligned} g_4^* &= \frac{2\pi}{9} (\tau + 0.4224965707 \tau^2 + 0.005937107 \tau^3 + 0.011983594 \tau^4 - \\ &\quad - 0.04123101 \tau^5 + 0.0401346 \tau^6). \end{aligned} \quad (9)$$

Комбинируя разложения (7), (8) и (9), можно без труда получить τ -ряды для значений констант связи g_6 и g_8 в критической точке:

$$g_6^* = \frac{8\pi^2}{81}\tau^3(1 + 0.600823045\tau + 0.104114939\tau^2 - 0.023565414\tau^3 - 0.01838783\tau^4), \quad (10)$$

$$g_8^* = -\frac{8\pi^3}{81}\tau^4(1 - 0.717421125\tau - 0.201396988\tau^2 - 0.70623903\tau^3 + 0.8824349\tau^4). \quad (11)$$

Использование аналогичной процедуры позволяет найти и псевдо- ϵ -разложения универсальных отношений R_6^* и R_8^* :

$$R_6^* = 2\tau(1 - 0.244170096\tau + 0.120059430\tau^2 - 0.1075143\tau^3 + 0.1289821\tau^4), \quad (12)$$

$$R_8^* = -9\tau(1 - 1.98491084\tau + 1.76113570\tau^2 - 1.9665851\tau^3 + 2.741546\tau^4). \quad (13)$$

Далее на основе этих τ -рядов мы вычисляем эффективные константы связи и отношения R_{2k} в критической области.

В первую очередь найдем численное значение R_6 вблизи точки Кюри. Поскольку в псевдо- ϵ -разложении (12) старшие коэффициенты малы, прямое суммирование этого ряда представляется вполне разумным. В третьем, четвертом и пятом порядках по τ эта процедура дает соответственно 1.752, 1.537 и 1.795. Данные числа определенно группируются вокруг значений 1.644 и 1.649, извлеченных из теоретико-полевых и решеточных расчетов [16], [31]. Любопытно, что значение 1.537, получаемое путем обрыва ряда (12) на наименьшем члене (оптимальный обрыв [41]), отличается от приведенных выше оценок всего на 6%. Более того, прямое суммирование τ -ряда для g_6^* (10), имеющего очень маленькие старшие коэффициенты, дает значение $g_6^* = 1.621$, из которого с учетом $g_4^* = 0.9886$ [3] вытекает оценка $R_6^* = 1.659$, выглядящая весьма оптимистичной. Этот факт подтверждает вывод о том, что метод псевдо- ϵ -разложения сам по себе можно рассматривать как некоторый специфический метод пересуммирования [32], [41]–[44].

Значительно более точные численные значения R_6^* можно получить из псевдо- ϵ -разложения (12) путем использования аппроксимант Паде. В табл. 1 представлен треугольник Паде для R_6^*/τ , т. е. в пренебрежении несущественным множителем τ . Наряду с числами, даваемыми различными аппроксимантами Паде, она также содержит информацию о темпе сходимости оценок Паде к асимптотическому значению (нижняя строка, RoC). Поскольку известно, что диагональные и близкие к ним аппроксиманты Паде обладают наилучшими аппроксимирующими свойствами, в качестве оценки Паде k -го порядка взято число, даваемое диагональной аппроксимантой, либо полусумма значений, даваемых аппроксимантами, ближайшими к диагональной, когда диагональная аппроксиманта не существует. Как видно из табл. 1, оценки Паде демонстрируют отчетливо выраженную сходимость, а асимптотическое значение отношения R_6^* равно 1.6502. Эта величина близка к оценке $R_6^* = 1.690 \pm 0.04$, полученной путем анализа многопетлевых ϵ -разложений [16], к пятипетлевой РГ-оценке $R_6^* = 1.644 \pm 0.006$ [16] и особенно к извлеченному из результатов недавних расчетов на решетках значению $R_6^* = 1.649 \pm 0.002$ [31].

Стоит отметить, что учет пятипетлевых вкладов в τ -рядах для R_6^* и g_6^* лишь немного сдвигает численные значения универсального отношения. Действительно, суммирование по Паде четырехпетлевых τ -разложений для R_6^* и g_6^* ведет соответственно к оценкам $R_6^* = 1.642$ и $R_6^* = 1.654$ [32]. Этот факт можно рассматривать

Таблица 1. Треугольник Паде для псевдо- ϵ -разложения R_6^* . Аппроксиманты Паде $[L/M]$ построены для R_6^*/τ , т.е. в пренебрежении несущественным множителем τ . Нижняя строка (RoC) показывает темп сходимости оценок Паде к асимптотическому значению. В качестве оценки Паде k -го порядка взято число, даваемое диагональной аппроксимантой, либо полусумма значений, даваемых аппроксимантами, ближайшими к диагональной, когда диагональная аппроксиманта не существует. Значения R_6^* , полученные путем анализа трехмерных РГ-рядов [16] и из результатов расчетов на решетках [31], равны соответственно 1.644 ± 0.006 и 1.649 ± 0.002 .

$M \backslash L$	0	1	2	3	4
0	2	1.5117	1.7518	1.5368	1.7947
1	1.6075	1.6726	1.6383	1.6540	
2	1.6896	1.6465	1.6502		
3	1.6036	1.6504			
4	1.7135				
RoC	2	1.5596	1.6726	1.6424	1.6502

Таблица 2. Треугольник Паде для псевдо- ϵ -разложения R_8^* . Аппроксиманты Паде $[L/M]$ построены для отношения R_8^*/τ , т.е. несущественный фактор τ опущен. Нижняя строка (RoC) показывает темп сходимости оценок Паде, где оценка k -го порядка есть число, которое дает соответствующая диагональная аппроксиманта, либо полусумма величин, даваемых аппроксимантами вида $[M/M - 1]$ и $[M - 1/M]$, когда диагональная аппроксиманта отсутствует.

$M \backslash L$	0	1	2	3	4
0	-9	8.864	-6.986	10.713	-13.961
1	-3.015	0.466	1.376	0.407	
2	-1.743	1.910	0.879		
3	-1.131	0.095			
4	-0.831				
RoC	-9	2.925	0.466	1.643	0.879

как проявление того, что в случае эффективного взаимодействия шестого порядка τ -ряды имеют строение, исключительно благоприятное с вычислительной точки зрения. Последнее особенно верно для псевдо- ϵ -разложения (12), которое, имея малые по величине старшие коэффициенты, является знакопеременным, что делает его очень удобным для получения численных результатов.

В случае взаимодействия восьмого порядка псевдо- ϵ -разложения обладают значительно менее привлекательной структурой. Ряд для R_8^* (13), будучи знакопеременным, имеет большие коэффициенты, из-за чего его прямое суммирование бесполезно. Чтобы получить численную оценку отношения R_8^* , необходимо использовать, как минимум, технику аппроксимант Паде. Коэффициенты τ -ряда (11) для g_8^* значительно меньше, чем их аналоги в разложении (13), но имеют нерегулярные знаки. В принципе, ряд (11) можно обработать с помощью методов, упомянутых выше. Однако получаемые при этом численные результаты оказываются столь силь-

Таблица 3. Универсальные значения отношения R_8 , полученные путем суммирования ряда (13) методом Паде–Бореля. Для аналитического продолжения разложения борелевского образа R_8^*/τ по степеням τ использованы аппроксиманты Паде вида $[L/M]$. Нижняя строка (RoC) показывает темп сходимости оценок Паде–Бореля к асимптотическому значению R_8^* . Оценка k -го порядка здесь есть число, найденное с использованием соответствующей диагональной аппроксиманты, либо полусумма величин, даваемых аппроксимантами вида $[M/M - 1]$ и $[M - 1/M]$, когда диагональная аппроксиманта отсутствует. Значения R_8^* , полученные пересуммированием трехмерных РГ-рядов [16] и с помощью расчетов на решетках [31], равны соответственно 0.857 ± 0.086 и 0.871 ± 0.014 .

$M \backslash L$	1	2	3	4	5
0	−9	8.8642	−6.9860	10.7132	−13.9607
1	−3.6473	1.1000	0.8854	0.8906	
2	−2.4658	0.9041	0.8905		
3	−2.0048	0.8916			
4	−1.7788				
RoC	−9	2.608	1.1000	0.8948	0.8905

но разбросанными, что их ни в коей мере нельзя считать удовлетворительными. Поэтому далее мы остановимся на суммировании с помощью аппроксимант Паде псевдо- ϵ -разложения для R_8^* .

Найдем аппроксиманты Паде для отношения R_8^*/τ , т. е. пренебрегая, как и ранее, несущественным фактором τ . Соответствующий треугольник Паде представлен в табл. 2. Как видно, численные оценки, получаемые для R_8^* , оказываются значительно менее надежными, чем в случае R_6^* . Действительно, числа, даваемые различными аппроксимантами Паде, сильно разбросаны, а оценки, извлеченные из τ -рядов максимальной длины (пятитетлевых), существенно отличаются друг от друга. С другой стороны, оптимальное значение R_8^* , т. е. то, которое дает диагональная аппроксиманта $[2/2]$, оказывается близким к РГ-оценке $R_8^* = 0.857 \pm 0.086$ [16] и к результату недавних расчетов на решетках $R_8^* = 0.871 \pm 0.014$ [31]. Не исключено поэтому, что применение более мощных методов пересуммирования может привести к приемлемым результатам.

Одним из таких методов, эффективно подавляющих расходимость суммируемых рядов, является метод Паде–Бореля. Результаты обработки псевдо- ϵ -разложения (13) с помощью этого метода приведены в табл. 3. Хорошо видно, что применение техники Паде–Бореля резко уменьшает разброс численных оценок и ускоряет итерационную процедуру. Помимо этого, асимптотическое значение 0.890, на которое выходят итерации, лишь слегка отличается от приведенных выше высокоточных теоретико-полевых и решеточных оценок. Это говорит о том, что метод псевдо- ϵ -разложения не теряет своей работоспособности и тогда, когда его применяют для расчета универсальных значений констант связи высоких порядков.

В то же время возникает вопрос: в чем заключаются причины относительно низкой численной эффективности техники псевдо- ϵ -разложения в случае g_8^* и R_8^* ? Безусловно, главным негативным фактором здесь следует считать отчетливо выра-

женную расходимость соответствующих τ -рядов. Существует, однако, и дополнительное обстоятельство, которое делает ситуацию еще более неблагоприятной. Оно заключается в том, что ряды (11), (13) обладают специфическим свойством: первые члены этих рядов отрицательны и велики по модулю, в то время как величины, получаемые путем суммирования этих рядов, положительны и имеют на порядок меньшие абсолютные значения. Это означает, что численные результаты, извлекаемые из рядов (11), (13), являются по сути малыми разностями больших чисел, что, естественно, резко ухудшает аппроксимирующие характеристики этих рядов.

Итак, мы рассчитали пятипетлевые псевдо- ϵ -разложения универсальных значений ренормированных констант связи g_6 , g_8 и их отношений R_6 , R_8 для трехмерной евклидовой скалярной теории поля типа $\lambda\phi^4$. Численные значения универсальных отношений найдены путем суммирования соответствующих τ -рядов методами Паде и Паде–Бореля. Установлено, что техника псевдо- ϵ -разложения приводит к высокоточным оценкам R_6^* , которые отлично согласуются со значениями, полученными другими методами, в том числе и с помощью расчетов на решетках. В случае эффективного взаимодействия восьмого порядка этот метод не является столь действенным. Однако значение R_8^* , полученное суммированием по Паде–Борелю τ -разложения для этого отношения, оказывается весьма близким к прецизионным решеточным и теоретико-полевым оценкам. Эти результаты подтверждают вывод о том, что технику псевдо- ϵ -разложения можно рассматривать как специфический метод пересуммирования, превращающий расходящиеся РГ-ряды в разложения, очень удобные с вычислительной точки зрения.

Список литературы

- [1] G. A. Baker, “Analysis of hyperscaling in the Ising model by the high-temperature series method”, *Phys. Rev. B*, **15**:3 (1977), 1552–1559.
- [2] J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, “Critical exponents for the n -vector model in three dimensions from field theory”, *Phys. Rev. Lett.*, **39**:2 (1977), 95–98.
- [3] G. A. Baker, B. G. Nickel, D. I. Meiron, “Critical indices from perturbation analysis of the Callan–Symanzik equation”, *Phys. Rev. B*, **17**:3 (1978), 1365–1374.
- [4] J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, “Critical exponents from field theory”, *Phys. Rev. B*, **21**:9 (1980), 3976–3998.
- [5] C. Bagnuls, C. Bervillier, “Field-theoretical approach to critical phenomena”, *Phys. Rev. B*, **41**:1 (1990), 402–406.
- [6] C. M. Bender, S. Boettcher, L. Lipatov, “Dimensional expansions”, *Phys. Rev. Lett.*, **68**:25 (1992), 3674–3677.
- [7] C. M. Bender, S. Boettcher, “Dimensional expansion for the Ising limit of quantum field theory”, *Phys. Rev. D*, **48**:10 (1993), 4919–4923, arXiv: hep-th/9311060.
- [8] N. Tetradis, C. Wetterich, “Critical exponents from the effective average action”, *Nucl. Phys. B*, **422**:3 (1994), 541–592, arXiv: hep-ph/9308214.
- [9] C. M. Bender, S. Boettcher, “Eleventh-order calculation of Ising-limit Green’s functions for scalar quantum field theory in arbitrary space-time dimension D ”, *Phys. Rev. D*, **51**:4 (1995), 1875–1879, arXiv: hep-th/9405043.
- [10] T. Reisz, “High temperature critical $O(N)$ field models by LCE series”, *Phys. Lett. B*, **360**:1–2 (1995), 77–82.
- [11] S. A. Antonenko, A. I. Sokolov, “Critical exponents for a three-dimensional $O(n)$ -symmetric model with $n > 3$ ”, *Phys. Rev. E*, **51**:3 (1995), 1894–1898, arXiv: hep-th/9803264.

- [12] M. Campostrini, A. Pelissetto, P. Rossi, E. Vicari, “Four-point renormalized coupling constant in $O(N)$ models”, *Nucl. Phys. B*, **459**:1–2 (1996), 207–242, arXiv: hep-lat/9506002.
- [13] А. И. Соколов, “Ренормализационная группа и трехчастичное взаимодействие в критической области”, *ФТТ*, **38**:2 (1996), 640–642.
- [14] S.-Y. Zinn, S.-N. Lai, M. E. Fisher, “Renormalized coupling constants and related amplitude ratios for Ising systems”, *Phys. Rev. E*, **54**:2 (1996), 1176–1182.
- [15] A. I. Sokolov, E. V. Orlov, V. A. Ul'kov, “Universal sextic effective interaction at criticality”, *Phys. Lett. A*, **227**:3–4 (1997), 255–258, arXiv: cond-mat/9803357.
- [16] R. Guida, J. Zinn-Justin, “3D Ising model: the scaling equation of state”, *Nucl. Phys. B*, **489**:3 (1997), 626–652, arXiv: hep-th/9610223.
- [17] T. R. Morris, “Three-dimensional massive scalar field theory and the derivative expansion of the renormalization group”, *Nucl. Phys. B*, **495**:3 (1997), 477–504, arXiv: hep-th/9612117.
- [18] P. Butera, M. Comi, “2n-point renormalized coupling constants in the three-dimensional Ising model: estimates by high temperature series to order B^{17} ”, *Phys. Rev. E*, **55**:6 (1997), 6391–6396, arXiv: hep-lat/9703017.
- [19] R. Guida, J. Zinn-Justin, “Critical exponents of the N-vector model”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31**:9 (1998), 8103–8121, arXiv: cond-mat/9803240.
- [20] P. Butera, M. Comi, “Renormalized couplings and scaling correction amplitudes in the N-vector spin models on the sc and the bcc lattices”, *Phys. Rev. B*, **58**:17 (1998), 11552–11569, arXiv: hep-lat/9805025.
- [21] A. Pelissetto, E. Vicari, “Four-point renormalized coupling constant and Callan–Symanzik β -function in $O(N)$ models”, *Nucl. Phys. B*, **519**:3 (1998), 626–660, arXiv: cond-mat/9711078.
- [22] A. Pelissetto, E. Vicari, “The effective potential in three-dimensional $O(N)$ models”, *Nucl. Phys. B*, **522**:3 (1998), 605–624, arXiv: cond-mat/9801098.
- [23] А. И. Соколов, “Универсальные эффективные константы связи для обобщенной модели Гейзенберга”, *ФТТ*, **40**:7 (1998), 1284–1290, arXiv: 1603.01790.
- [24] A. I. Sokolov, E. V. Orlov, V. A. Ul'kov, S. S. Kashtanov, “Universal critical coupling constants for the three-dimensional n-vector model from field theory”, *Phys. Rev. E*, **60**:2 (1999), 1344–1349, arXiv: hep-th/9810082.
- [25] A. Pelissetto, E. Vicari, “The effective potential of N-vector models: a field-theoretic study to $O(\epsilon^3)$ ”, *Nucl. Phys. B*, **575**:3 (2000), 579–598, arXiv: cond-mat/9911452.
- [26] J. Zinn-Justin, *Phys. Rep.*, **344**:4–6 (2001), 159–178, arXiv: hep-th/0002136.
- [27] M. Caselle, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, E. Vicari, “The critical equation of state of the two-dimensional Ising model”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**:14 (2001), 2923–2948, arXiv: cond-mat/0011305.
- [28] M. Campostrini, A. Pelissetto, P. Rossi, E. Vicari, “25th-order high-temperature expansion results for three-dimensional Ising-like systems on the simple-cubic lattice”, *Phys. Rev. E*, **65**:6 (2002), 066127, 19 pp., arXiv: cond-mat/0201180.
- [29] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, International Series of Monographs on Physics, **85**, Clarendon Press, Oxford, 2002.
- [30] A. Pelissetto, E. Vicari, “Critical phenomena and renormalization-group theory”, *Phys. Rep.*, **368**:6 (2002), 549–727, arXiv: cond-mat/0012164.
- [31] P. Butera, M. Pernici, “The free energy in a magnetic field and the universal scaling equation of state for the three-dimensional Ising model”, *Phys. Rev. B*, **83**:5 (2011), 054433, arXiv: 1012.5004.
- [32] A. I. Sokolov, M. A. Nikitina, “Pseudo- ϵ expansion and renormalized coupling constants at criticality”, *Phys. Rev. E*, **89**:5 (2014), 052127, 10 pp., arXiv: 1402.3531.
- [33] D. V. Pakhnin, A. I. Sokolov, “Five-loop renormalization-group expansions for the three-dimensional n-vector cubic model and critical exponents for impure Ising systems”, *Phys. Rev. B*, **61**:22 (2000), 15130–15135, arXiv: cond-mat/9912071.

- [34] J. M. Carmona, A. Pelissetto, E. Vicari, “ N -component Ginzburg–Landau Hamiltonian with cubic anisotropy: a six-loop study”, *Phys. Rev. B*, **61**:22 (2000), 15136–15151, arXiv: cond-mat/9912115.
- [35] R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavors’kii, “Pseudo- ε expansion of six-loop renormalization-group functions of an anisotropic cubic model”, *Phys. Rev. B*, **62**:18 (2000), 12195–12200, arXiv: cond-mat/0003216.
- [36] Yu. Holovatch, D. Ivaneiko, B. Delamotte, “On the criticality of frustrated spin systems with noncollinear order”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:11 (2004), 3569–3575, arXiv: cond-mat/0312260.
- [37] P. Calabrese, P. Parruccini, “Harmonic crossover exponents in $O(n)$ models with the pseudo- ε expansion approach”, *Phys. Rev. B*, **71**:6 (2005), 064416, 8 pp., arXiv: cond-mat/0411027.
- [38] P. Calabrese, E. V. Orlov, D. V. Pakhnin, A. I. Sokolov, “Critical behavior of two-dimensional cubic and MN models in the five-loop renormalization group approximation”, *Phys. Rev. B*, **70**:9 (2004), 094425, 15 pp., arXiv: cond-mat/0405432.
- [39] А. И. Соколов, “Псевдо- ε -разложение и двумерная модель Изинга”, *ФТТ*, **47**:11 (2005), 2056–2059, arXiv: cond-mat/0510088.
- [40] А. И. Соколов, “Фазовые переходы в двумерных системах и многопетлевые ренорм-групповые разложения”, *ТМФ*, **176**:1 (2013), 140–149.
- [41] М. А. Nikitina, A. I. Sokolov, “Critical exponents in two dimensions and pseudo- ε expansion”, *Phys. Rev. E*, **89**:4 (2014), 042146, 6 pp., arXiv: 1312.1062.
- [42] A. I. Sokolov, M. A. Nikitina, “Fisher exponent from pseudo- ε expansion”, *Phys. Rev. E*, **90**:1 (2014), 012102, 5 pp., arXiv: 1402.3894.
- [43] М. А. Никитина, А. И. Соколов, “Критические индексы и псевдо- ε -разложение”, *ТМФ*, **186**:2 (2016), 230–242, arXiv: 1602.08681.
- [44] A. I. Sokolov, M. A. Nikitina, “Pseudo- ε expansion and critical exponents of superfluid helium”, *Phys. A*, **444** (2016), 177–181, arXiv: 1402.4318.
- [45] B. G. Nickel, D. I. Meiron, G. A. Baker, “Compilation of 2-pt and 4-pt graphs for continuous models”, University of Guelph Report, 1977 (unpublished).