Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, Инвариантность обобщенного осциллятора относительно линейного преобразования соответствующей системы ортогональных полиномов, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 2, 267–276

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:51:53

© 2017 г.

В. В. Борзов*, Е. В. Дамаскинский†

ИНВАРИАНТНОСТЬ ОБОБЩЕННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ОТНОСИТЕЛЬНО ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Рассматриваются семейства многочленов $\mathbb{P} = \{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\mathbb{Q} = \{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, ортогональных на вещественной прямой относительно вероятностных мер μ и ν соответственно. Предполагается, что многочлены $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ связаны линейным соотношением. В случае $k = 2$ описаны все пары $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$, для которых совпадают алгебры $\mathfrak{A}_P$ и $\mathfrak{A}_Q$ обобщенных осцилляторов, порождаемые $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Построены алгебры обобщенных осцилляторов, соответствующие парам $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ для произвольного $k \geq 1$.

Ключевые слова: обобщенные осцилляторы, ортогональные многочлены.

DOI: 10.4213/tmf9118

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{P} = \{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – некоторое семейство полиномов¹⁾, ортогональных на вещественной прямой относительно вероятностной меры μ . Рассмотрим последовательность полиномов $\mathbb{Q} = \{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ таких, что

$$Q_n(x) = P_n(x) + a_1 P_{n-1}(x) + \dots + a_k P_{n-k}(x), \quad n > k.$$

Семейства ортогональных полиномов, связанных таким линейным соотношением, обсуждались в ряде работ (см., например, [1]–[5]). В статье [5] даны необходимые и достаточные условия ортогональности последовательности $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ относительно положительной борелевской меры ν на вещественной прямой.

Е. В. Дамаскинский признателен РФФИ за финансовую поддержку (грант № 15-01-03148_а).

¹⁾Для определенности здесь и далее рассматриваются многочлены с единичным старшим коэффициентом.

*Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: borzov.vadim@yandex.ru

†Военный институт (инженерно-технический) Военной академии материально-технического обеспечения, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: evd@pdmi.ras.ru

Известно [6], что любая последовательность многочленов $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$, ортогональных на вещественной прямой относительно положительной борелевской меры μ , порождает алгебру обобщенного осциллятора $\mathfrak{A}_P$. В настоящей работе исследуется вопрос, при каких условиях алгебры $\mathfrak{A}_P$ и $\mathfrak{A}_Q$, порождаемые такими линейно-связанными полиномами, совпадают, $\mathfrak{A}_P = \mathfrak{A}_Q$. Эта задача в простейшем случае $k = 1$ рассматривалась в работе [7]. В настоящей работе мы обсудим случай $k = 2$.

Нам потребуются приводимые ниже результаты из [5], [6], [8]. Пусть u – линейный функционал на линейном пространстве $\mathfrak{P}$ многочленов с вещественными коэффициентами. Многочлены $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ называются ортогональными относительно u , если

$$\langle u, P_n P_m \rangle = 0 \quad \forall n \neq m$$

и

$$\langle u, P_n^2 \rangle \neq 0 \quad \forall n = 0, 1, \dots$$

Пусть $H = \{u_{i+j}\}_{i,j \geq 0}$ – матрица Ганкеля, связанная с функционалом u , где $u_k = \langle u, x^k \rangle$, $k \geq 0$. Линейный функционал u называется квазиопределенным (положительно-определенным), если ведущие подматрицы H_n матрицы H несингулярны (положительно-определены) при всех $n \geq 0$.

Теорема Фавара дает описание квазиопределенного (положительно-определенного) линейного функционала в терминах трехчленного рекуррентного соотношения, которому удовлетворяют многочлены $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$:

$$\begin{aligned} xP_n(x) &= P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \\ P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x - \beta_0, \end{aligned}$$

при $\gamma_n \neq 0$ (соответственно, $\gamma_n > 0$).

Если u – положительно-определенный линейный функционал, то существует положительная борелевская мера μ (с носителем на бесконечном подмножестве в $\mathbb{R}$) такая, что

$$\langle u, q \rangle = \int_{\mathbb{R}} q d\mu \quad \forall q \in \mathfrak{P}.$$

В дальнейшем мы будем использовать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1 [5]. Пусть $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ – последовательность ортогональных полиномов с рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} xP_n(x) &= P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad \gamma_n \neq 0, \\ P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x - \beta_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть a_1 и a_2 – вещественные числа такие, что $a_2 \neq 0$, а $Q_n(x)$ – полиномы, определяемые соотношениями

$$Q_n(x) = P_n(x) + a_1 P_{n-1}(x) + a_2 P_{n-2}(x), \quad n \geq 3. \quad (2)$$

Тогда ортогональность последовательности $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$ зависит от выбора коэффициентов a_1 и a_2 . Точнее говоря, $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$ является семейством ортогональных многочленов с рекуррентными соотношениями

$$xQ_n(x) = Q_{n+1}(x) + \tilde{\beta}_n Q_n(x) + \tilde{\gamma}_n Q_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad \tilde{\gamma}_n \neq 0, \quad (3)$$

тогда и только тогда, когда $\gamma_3 + a_1(\beta_2 - \beta_3) \neq 0$ и выполнено одно из следующих условий:

- 1) если $a_1 = 0$, то при $n \geq 4$ имеем $\beta_n = \beta_{n-2}$, $\gamma_n = \gamma_{n-2}$;
- 2) если $a_1 \neq 0$ и $a_1^2 = 4a_2$, то для $n \geq 2$

$$\beta_n = A + Bn + Cn^2, \quad \gamma_n = D + En + Fn^2,$$

где $a_1C = 2F$, $a_1B = 2E - 2F$ и $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$;

- 3) если $a_1 \neq 0$ и $a_1^2 > 4a_2$, то для $n \geq 2$

$$\beta_n = A + B\lambda^n + C\lambda^{-n}, \quad \gamma_n = D + E\lambda^n + F\lambda^{-n}$$

при $a_1C = (1 + \lambda)F$, $a_1\lambda B = (1 + \lambda)E$ и $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, где λ – единственное решение на интервале $(-1, 1)$ уравнения

$$a_1^2\lambda = a_2(1 + \lambda)^2;$$

- 4) если $a_1 \neq 0$ и $a_1^2 < 4a_2$, $a\lambda = e^{i\theta}$, $\theta \in (0, \pi)$, – единственное решение уравнения $a_1^2\lambda = a_2(1 + \lambda)^2$, то при $n \geq 2$

$$\beta_n = A + Be^{in\theta} + \bar{B}e^{-in\theta}, \quad \gamma_n = D + Ee^{in\theta} + \bar{E}e^{-in\theta},$$

где $a_1\lambda B = (1 + \lambda)E$ и $A, D \in \mathbb{R}$, $B, F \in \mathbb{C}$.

Приведем определение обобщенного осциллятора, связанного с семейством ортогональных полиномов [6]. Пусть μ – вероятностная мера на $\mathbb{R}$ с конечными моментами любого порядка

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n d\mu < \infty, \quad n \geq 0.$$

Эти моменты однозначно определяют две последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, а также систему ортогональных многочленов $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ с рекуррентными соотношениями

$$x\Psi_n(x) = b_n\Psi_{n+1}(x) + a_n\Psi_n(x) + b_{n-1}\Psi_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (4)$$

и начальными условиями

$$\Psi_0(x) = 1, \quad \Psi_1(x) = \frac{x - a_0}{b_0}.$$

Эти многочлены образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}; \mu)$.

Следует различать два случая:

- 1) $a_n = 0$ – симметричный случай;
- 2) $a_n \neq 0$ – несимметричный случай.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ определим лестничные операторы $a^{\pm}$ и нумерующий оператор N формулами

$$\begin{aligned} a^+\Psi_n(x) &= \sqrt{2b_n}\Psi_{n+1}(x), \\ a^-\Psi_n(x) &= \sqrt{2b_{n-1}}\Psi_{n-1}(x), \\ N\Psi_n(x) &= n\Psi_n(x), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Пусть $B(N)$ – операторнозначная функция такая, что

$$\begin{aligned} B(N)\Psi_n(x) &= b_{n-1}^2 \Psi_n(x), \\ B(N + \mathbb{I})\Psi_n(x) &= b_n^2 \Psi_n(x), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2 [6]. *Операторы $a^\pm$, N , $\mathbb{I}$ удовлетворяют соотношениям*

$$a^- a^+ = 2B(N + \mathbb{I}), \quad a^+ a^- = 2B(N), \quad [N, a^\pm] = \pm a^\pm. \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ассоциативная алгебра $\mathfrak{A}_\Psi$, порождаемая операторами $a^\pm$, N и $\mathbb{I}$, удовлетворяющими соотношениям (5), а также коммутаторами этих операторов, называется *алгеброй обобщенного осциллятора, соответствующей системе ортонормированных многочленов $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$, с рекуррентными соотношениями (4).*

Приведем одно полезное следствие теоремы 2. Пусть $\mathfrak{A}_s$ – алгебра обобщенного осциллятора, соответствующая рекуррентным соотношениям (4) в симметричном случае ($a_n = 0$), а $\mathfrak{A}_a$ – алгебра обобщенного осциллятора, соответствующая рекуррентным соотношениям (4) в несимметричном случае ($a_n \neq 0$). Тогда $\mathfrak{A}_s = \mathfrak{A}_a$.

Теперь мы готовы сформулировать рассматриваемую задачу. Пусть даны два семейства многочленов $\mathbb{P} = \{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ и $\mathbb{Q} = \{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$, ортогональных относительно вероятностных мер μ и ν соответственно. Будем предполагать, что эти полиномы удовлетворяют условиям теоремы 1, причем $\beta_n, \tilde{\beta}_n, \gamma_n, \tilde{\gamma}_n \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathfrak{A}_P$ и $\mathfrak{A}_Q$ соответствующие алгебры обобщенных осцилляторов.

ЗАДАЧА. *Требуется описать все пары семейств ортогональных полиномов $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$, для которых $\mathfrak{A}_P = \mathfrak{A}_Q$.*

2. МАТРИЦЫ ЯКОБИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$ определены в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_\mu = L^2(\mathbb{R}; \mu)$ и $\mathcal{H}_\nu = L^2(\mathbb{R}; \nu)$ соответственно. Пусть эти полиномы удовлетворяют рекуррентным соотношениям (1) и (3) соответственно. Кроме того, будем считать, что эти многочлены связаны соотношением (2). Мы будем предполагать также, что $\beta_n, \tilde{\beta}_n, \gamma_n, \tilde{\gamma}_n \in \mathbb{R}$ и что коэффициенты β_n, γ_n удовлетворяют условиям теоремы 1.

Матрицы Якоби J_P, J_Q , соответствующие рекуррентным соотношениям (1), (3), могут быть записаны в виде

$$J = \begin{bmatrix} A & I_1 \\ I_2 & B \end{bmatrix}, \quad I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

где матрицы A для многочленов $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$ имеют вид

$$A_P = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 \\ \gamma_1 & \beta_1 & 1 \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad A_Q = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_0 & 1 & 0 \\ \tilde{\gamma}_1 & \tilde{\beta}_1 & 1 \\ 0 & \tilde{\gamma}_2 & \tilde{\beta}_2 \end{bmatrix},$$

а матрица B равна

$$B = \begin{bmatrix} \beta_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \gamma_2 & \beta_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \gamma_3 & \beta_3 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \gamma_2 & \beta_2 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Отметим, что элементы $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ и $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ в матрице J_P заданы, а элементы $(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)$ и коэффициенты a_1, a_2 уравнения (2) должны быть определены.

Мы рассмотрим все четыре случая теоремы 1. Общие соотношения, справедливые для всех случаев, имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_n &= \gamma_n, & n \geq 1; & & \tilde{\beta}_n &= \beta_n, & n \geq 3; \\ \beta_{2n+1} &= \beta_3, & n \geq 1; & & \gamma_{2n} &= \gamma_2, & n \geq 1; \\ \beta_{2n} &= \beta_2, & n \geq 1; & & \gamma_{2n+1} &= \gamma_3, & n \geq 1; \\ \gamma_n &\neq 0; & & & a_2 &\neq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее мы будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\gamma_3 - \gamma_1 - (\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_1)}{\gamma_3}, \\ s_2 &= \frac{\gamma_2}{\beta_3 - \beta_1}, & s_3 &= \frac{\gamma_3}{\beta_3 - \beta_1}, \\ w &= \frac{a_1}{4s_3} - \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, & w_\lambda &= \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} \frac{a_1}{s_3} - \frac{\gamma_2}{\gamma_3}. \end{aligned} \quad (7)$$

В терминах матриц Якоби основной результат состоит в следующем утверждении.

Можно доказать, что все пары систем ортогональных полиномов $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ и $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$, связанных линейной зависимостью (2), которые порождают одну и ту же алгебру обобщенного осциллятора, можно разбить на восемь групп.

Случай I: $a_1 = 0$, $\beta_1 \neq \beta_3$. В этом случае матрица A_Q и коэффициент a_2 однозначно определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0 &= \beta_0 + \frac{(\beta_3 - \beta_1 - \beta_0)\gamma_1}{\gamma_2\gamma_3} a_2, & a_2 &= -s_1 s_3^2, \\ \tilde{\beta}_1 &= \beta_1 + \frac{a_2}{s_3} - \tilde{\beta}_0, & \tilde{\beta}_2 &= -\frac{a_2}{s_3}, \\ \tilde{\gamma}_n &= \gamma_n, & n \geq 1, & & \tilde{\beta}_n &= \beta_n, & n \geq 3. \end{aligned} \quad (8)$$

Случай II: $a_1 = 0$, $\beta_1 = \beta_3$, $\gamma_3 = \gamma_1$, $\beta_2 \neq \beta_0$. В этом случае матрица A_Q и коэффициент a_2 однозначно определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0 &= \beta_1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2 - \beta_0}, & \tilde{\beta}_1 &= \beta_0 + \frac{\gamma_2}{\beta_1 - \beta_0}, \\ \tilde{\beta}_2 &= \beta_2, & a_2 &= \gamma_2 \frac{\beta_1 - \beta_0}{\beta_2 - \beta_0} - \frac{\gamma_2^2}{(\beta_2 - \beta_0)^2}, \\ \tilde{\gamma}_n &= \gamma_n, & n \geq 1, & & \tilde{\beta}_n &= \beta_n, & n \geq 3. \end{aligned} \quad (9)$$

Случай III: $a_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq \beta_3$, $a_2 = a_1^2/4$. Обозначим через w решение уравнения

$$16s_3^2w^4 + 32s_2s_3w^3 + (16s_2^2 + 4s_3^2)w^2 + (4s_2 + s_1s_3)w + s_1s_2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_3}(\beta_2 - \beta_1) = 0$$

такое, что $a_1 = (4s_3w + 4s_2) \in \mathbb{R}$, и введем величину

$$C_{\beta,\gamma} = a_2 \left[-\frac{\gamma_1}{\gamma_3}(\beta_2 - a_1(w + 1)) + \beta_0(4w^3 + 4w + 1) \right] - a_1w[\beta_0(\beta_1 + \beta_2) + \gamma_1]. \quad (10)$$

В этом случае при заданном w матрица A_Q и коэффициент a_2 однозначно определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0 &= \beta_0 - \frac{C_{\beta,\gamma}}{\gamma_2}, & \tilde{\beta}_1 &= \beta_1 + \frac{C_{\beta,\gamma}}{\gamma_2} + a_1w, \\ \tilde{\beta}_2 &= \beta_2 - a_1(w + 1), \end{aligned} \quad (11)$$

$$a_1 = 4s_3w + 4s_2, \quad a_2 = \frac{1}{4}a_1^2. \quad (12)$$

Случай IV: $a_1 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_3$, $a_2 = a_1^2/4$. Пусть a_1 – вещественное решение уравнения

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_3}a_1^2 - a_1 \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_3} + \frac{\gamma_1}{4\gamma_3} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\gamma_2}{\gamma_3}(\beta_2 - \beta_1) = 0.$$

В этом случае матрица A_Q однозначно определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0 &= \beta_0 - \frac{D_{\beta,\gamma}}{\gamma_2}, & \tilde{\beta}_1 &= \beta_1 + \frac{D_{\beta,\gamma}}{\gamma_2} + a_1w, \\ \tilde{\beta}_2 &= \beta_2 - a_1(w + 1), \end{aligned} \quad (13)$$

где $w = -\gamma_2/\gamma_3$ и $D_{\beta,\gamma}$ определяется формулой (10) при $w = -\gamma_2/\gamma_3$.

Случай V: $a_1 \neq 0$, $a_1^2 > 4a_2$, $a_2 = (\lambda/(1+\lambda)^2)a_1^2$, $\beta_1 \neq \beta_3$, $\lambda \in (-1, 1)$. Пусть w_λ – решение уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{(1+\lambda)^4}{\lambda^2}s_3^2w_\lambda^4 + 2\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}s_2s_3w_\lambda^3 + \left(\frac{(1+\lambda)^4}{\lambda^2}s_2^2 + \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}s_3 \right)w_\lambda^2 + \\ &+ \left(\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}s_2 + s_1s_3 \right)w_\lambda + s_1s_2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_3}(\beta_2 - \beta_1) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

такое, что

$$a_1 = \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}(s_3w_\lambda + s_2) \in \mathbb{R}.$$

В этом случае матрица A_Q однозначно определяется соотношениями

$$\tilde{\beta}_0 = \beta_0 - \frac{C_\lambda}{\gamma_2}, \quad \tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{C_\lambda}{\gamma_2} + a_1w_\lambda, \quad \tilde{\beta}_2 = \beta_2 - a_1(w_\lambda + 1), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} C_\lambda &= a_2 \left[-\frac{\gamma_1}{\gamma_3}(\beta_2 - a_1(w_\lambda + 1)) + \beta_0 \left(\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}(w_\lambda^2 + w_\lambda) + 1 \right) \right] - \\ &- a_1w_\lambda[\beta_0(\beta_1 + \beta_2) + \gamma_1], \end{aligned} \quad (16)$$

$$a_1 = \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}(s_3w_\lambda + s_2), \quad a_2 = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}a_1^2,$$

а λ – свободный параметр.

Случай VI: $a_1 \neq 0$, $a_1^2 > 4a_2$, $a_2 = (\lambda/(1+\lambda)^2)a_1^2$, $\beta_1 = \beta_3$, $\lambda \in (-1, 1)$. Пусть a_1 является решением уравнения

$$\frac{\gamma_2^2}{\gamma_3^2}a_1^2 - a_1 \left[\frac{\gamma_2}{\gamma_3} + \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_3} - 1 \right) \right] + \frac{\gamma_2}{\gamma_3}(\beta_2 - \beta_1) = 0,$$

$$a_2 = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}a_1^2.$$

В этом случае матрица A_Q однозначно определяется соотношениями

$$\tilde{\beta}_0 = \beta_0 - \frac{D_\lambda}{\gamma_2}, \quad \tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{D_\lambda}{\gamma_2} + a_1 w_\lambda, \quad \tilde{\beta}_2 = \beta_2 - a_1(w_\lambda + 1), \quad (17)$$

где $w_\lambda = -\gamma_2/\gamma_3$ и D_λ определяются соотношением (16) для C_λ с $w_\lambda = -\gamma_2/\gamma_3$.

Случаи VII и VIII: $a_1 \neq 0$, $a_1^2 < 4a_2$, $a_2 = (\lambda/(1+\lambda)^2)a_1^2$, $\lambda = e^{i\theta}$, $\theta \in (0, \pi)$. Остальные соотношения для случая VII совпадают с соотношениями для случая V, а в случае VIII – с аналогичными соотношениями для случая VI.

3. ВОЗМОЖНОСТЬ ОБОБЩЕНИЯ НА СЛУЧАЙ $k > 2$

Приведем несколько замечаний о построении всех возможных пар полиномиальных систем, связанных линейной зависимостью общего вида

$$Q_n(x) = P_n(x) + a_1 P_{n-1}(x) + \dots + a_k P_{n-k}(x), \quad k \geq 2, \quad (18)$$

для которых $\mathfrak{A}_P = \mathfrak{A}_Q$.

Из результатов работы [5] вытекают следующие утверждения:

- 1) $\tilde{\gamma}_n = \gamma_n$, $n \geq 1$;
- 2) $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$, $\gamma_n \neq 0$, $n \geq 1$;
- 3) $\tilde{\beta}_n = \beta_n$, $\tilde{\gamma}_n = \gamma_n + a_1(\beta_{n-1} - \beta_n) \neq 0$, $n \geq k+1$;
- 4) $\gamma_n - \gamma_{n-k} = a_1(\beta_{n-1} - \beta_n)$, $n \geq k+2$.

Необходимо рассмотреть два случая:

$$\text{а) } a_1 = 0; \quad \text{б) } a_1 \neq 0, \quad \beta_n = \beta_k \text{ при } n \geq k.$$

В обоих случаях имеем $\gamma_n = \gamma_{n-k}$, $n \geq k+2$.

Затем следует рассмотреть все возможные случаи, когда некоторые из коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ равны нулю, а все остальные не равны нулю. Напомним, что $a_k \neq 0$. Число таких вариантов равно

$$C_{k-1}^0 + C_{k-1}^1 + \dots + C_{k-1}^{k-1} = 2^{k-1}.$$

4. АЛГЕБРА ОБОБЩЕННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ПАРЕ $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$

Рассмотрим алгебру обобщенного осциллятора $\mathfrak{A}_P = \mathfrak{A}_Q$, соответствующую рассмотренным выше парам $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ систем ортогональных полиномов, связанных друг с другом линейным соотношением (18).

Для построения алгебры обобщенного осциллятора $\mathfrak{A}_{\mathbb{P}}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mu} = L^2(\mathbb{R}; \mu)$ следует симметризовать рекуррентные соотношения (1) (см. работу [6])

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad P_0(x) = 1, \quad (19)$$

с $\gamma_0 = 0$. С этой целью перейдем от системы полиномов $\mathbb{P}$ к системе полиномов $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ по формулам

$$P_n(x) = \alpha_n \varphi_n(x), \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_n = \sqrt{\gamma_1}(\gamma_2 \dots \gamma_s)^{m/2} (\gamma_{s+1} \dots \gamma_{k+1})^{(m-1)/2},$$

где $n = (m-1)k + s$, $m \geq 1$, $s = 2, \dots, k+1$, а $k \geq 1$ – фиксированное целое число. Это возможно только в случае, если $\gamma_1 \neq 0, \dots, \gamma_{k+1} \neq 0$. Тогда рекуррентные соотношения (19) принимают вид

$$x\varphi_n(x) = b_n \varphi_{n+1}(x) + \beta_n \varphi_n(x) + b_{n-1} \varphi_{n-1}(x),$$

где

$$\varphi_0 = 1, \quad b_{-1} = 0, \quad b_n = \sqrt{\gamma_{n+1}}, \quad n \geq 0,$$

и

$$\gamma_n = \begin{cases} \gamma_1, & n = 1, \\ \gamma_s, & n = km + s, \quad m \geq 0, \quad s = 2, \dots, k+1. \end{cases} \quad (20)$$

Определим лестничные операторы $a_{\Phi}^{\pm}$ и нумерующий оператор $\mathbb{N}_{\Phi}$ в $\mathcal{H}_{\mu}$ формулами

$$\begin{aligned} a_{\Phi}^+ \varphi_n &= \sqrt{2\gamma_{n+1}} \varphi_{n+1}, & a_{\Phi}^- \varphi_n &= \sqrt{2\gamma_n} \varphi_{n-1}, \\ \mathbb{N}_{\Phi} \varphi_n &= n \varphi_n, & n &\geq 0. \end{aligned}$$

Пусть $B_{\Phi}(\mathbb{N}_{\Phi})$ – операторнозначная функция, определенная равенствами

$$\begin{aligned} B_{\Phi}(\mathbb{N}_{\Phi}) \varphi_n &= \gamma_n \varphi_n, & n &\geq 0, \\ B_{\Phi}(\mathbb{N}_{\Phi} + I_{\mu}) \varphi_n &= \gamma_{n+1} \varphi_n, & n &\geq 0. \end{aligned}$$

Тогда алгебра обобщенного осциллятора $\mathfrak{A}_{\mathbb{P}}$ порождается операторами $a_{\Phi}^{\pm}$, $\mathbb{N}_{\Phi}$, I_{μ} , удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned} a_{\Phi}^- a_{\Phi}^+ &= 2B_{\Phi}(\mathbb{N}_{\Phi} + I_{\mu}), & a_{\Phi}^+ a_{\Phi}^- &= 2B_{\Phi}(\mathbb{N}_{\Phi}), \\ [\mathbb{N}_{\Phi}, a_{\Phi}^{\pm}] &= \pm a_{\Phi}^{\pm}, \end{aligned} \quad (21)$$

а также коммутаторами этих операторов. В этом случае квадратичный гамильтониан

$$H_{\Phi} = a_{\Phi}^- a_{\Phi}^+ + a_{\Phi}^+ a_{\Phi}^-$$

является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mu}$.

Ортонормированные многочлены $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ являются собственными функциями оператора H_{Φ} . Соответствующие собственные значения равны

$$\lambda_0 = 2\gamma_1, \quad \lambda_n = 2(\gamma_n + \gamma_{n+1}), \quad n \geq 1.$$

В заключение заметим, что так как в нашем случае $b_n^2 \neq (c_0 + c_2 n)(1 + n)$ (где $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$), то согласно результатам работ [9], [10]

$$\dim \mathfrak{A}_P = \dim \mathfrak{A}_Q = \infty.$$

Отметим также, что представляется интересным изучить связь мер ортогональности μ и ν в пространствах $\mathcal{H}_{\mu}$ и $\mathcal{H}_{\nu}$ соответственно.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Основным понятием, используемым в настоящей работе, является понятие обобщенного осциллятора, порожденного семейством полиномов, ортогональных относительно некоторой положительной меры μ на вещественной оси. Гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R}; \mu)$ с базисом, составленным из упомянутых ортогональных полиномов, является фазовым пространством соответствующего обобщенного осциллятора. Интересным с точки зрения физических приложений является вопрос, при каких условиях обобщенный осциллятор инвариантен относительно линейного преобразования базиса фазового пространства? В настоящей работе дается ответ на этот вопрос. А именно, было построено семейство обобщенных осцилляторов, инвариантных относительно линейных преобразований системы ортогональных полиномов, порождающих этот осциллятор.

Заметим, что, хотя проведенное в настоящей работе исследование носит в основном математический характер, имеется перспектива применения полученных результатов в физике, например в квантовой нелинейной оптике, где концепция деформированного осциллятора хорошо известна (см., например, обзор [11]). В частности, в работе [12] вводится понятие f -осциллятора и исследуется физический смысл этого понятия. Обобщенный осциллятор построенного в работе класса (который инвариантен относительно линейного преобразования системы ортогональных полиномов, порождающих этот осциллятор) является примером f -осциллятора. Соответствующая функция f имеет вид

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 2\sqrt{\gamma_1}, & n = 1, \\ 2\sqrt{\frac{\gamma_s}{km+s}}, & n = km + s, \quad m \geq 0, \quad s = 2, 3, \dots, k+1. \end{cases} \quad (22)$$

Было бы интересно исследовать физический смысл осцилляторов, построенных в данной работе, но это, к сожалению, выходит за рамки настоящей работы.

Благодарности. Авторы благодарны рецензенту, который обратил наше внимание на работу [12].

Список литературы

- [1] В. Б. Уваров, “О связи систем полиномов, ортогональных относительно различных функций распределения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **9:6** (1969), 1253–1262.
- [2] K. H. Kwon, J. H. Lee, F. Marcellan, “Orthogonality of linear combinations of two orthogonal sequences”, *J. Comput. Appl. Math.*, **137:1** (2001), 109–122.
- [3] E. Berriochoa, A. Cachafiero, J. M. Garcia-Amor, “A characterization of the four Chebyshev orthogonal families”, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **2005:13** (2005), 2071–2079.
- [4] З. С. Гриншпун, “Дифференциальные уравнения ортогональных многочленов Бернштейна–Сере”, *Дифференц. уравнения*, **26:5** (1990), 769–776.
- [5] M. Alfaro, F. Marcellán, A. Peña, M. L. Rezola, “When do linear combinations of orthogonal polynomials yield new sequences of orthogonal polynomials?”, *J. Comput. Appl. Math.*, **233:6** (2010), 1146–1152.
- [6] V. V. Borzov, “Orthogonal polynomials and generalized oscillator algebras”, *Integral Transform. Spec. Funct.*, **12:2** (2001), 115–138.

- [7] V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, “On representations of generalized oscillator for two sequences of linearly related orthogonal polynomials”, *Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction 2015”* (St. Petersburg, Russia, 25–29 May, 2015), eds. O. V. Motygin, A. P. Kiselev, P. A. Belov, L. I. Goray, A. Ya. Kazakov, A. S. Kirpichnikova, IEEE, New York, 2015, 58–61.
- [8] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and Its Applications, **13**, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [9] G. Honnouvo, K. Thirulogasanthar, “On the dimensions of the oscillator algebras induced by orthogonal polynomials”, *J. Math. Phys.*, **55**:9 (2014), 093511, 13 pp.
- [10] V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, “On dimensions of oscillator algebras”, *Proceedings of Days on Diffraction 2014* (St. Petersburg, Russia, 26–30, May 2014), eds. O. V. Motygin, A. P. Kiselev, L. I. Goray, A. Ya. Kazakov, A. S. Kirpichnikova, IEEE, New York, 2014, 48–52.
- [11] V. V. Dodonov, “‘Nonclassical’ states in quantum optics: a ‘squeezed’ review of the first 75 years”, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **4**:1 (2002), R1–R33.
- [12] V. I. Man’ko, G. Marmi, E. C. G. Sudarshan, F. Zaccaria, “f-Oscillators and nonlinear coherent states”, *Phys. Scr.*, **55**:5 (1997), 528–541.