Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Аккарди, И. В. Волович, С. В. Козырев, Стохастическое приближение в модели взаимодействия частицы с квантовым полем и новая алгебра, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 3, 401–416

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf912>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 11:10:39

© 1998 г. Л. Аккарди^{*}, И. В. Волович[†], С. В. Козырев[‡]

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦЫ С КВАНТОВЫМ ПОЛЕМ И НОВАЯ АЛГЕБРА

Рассмотрено применение стохастического приближения для вычисления корреляционных функций в модели взаимодействия частицы с квантовым полем. Показано, что при этом возникает новая алгебра с перестановочными соотношениями, зависящими от температуры. Эта алгебра представляет собой обобщение свободной (больцмановской) алгебры.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассмотрена модель взаимодействия частицы с квантовым полем. Модели такого типа широко изучались в теории элементарных частиц, в физике твердого тела, в квантовой оптике и других областях [1–4].

В данной работе мы исследуем корреляционные функции модели. При этом используется метод стохастического приближения, который берет начало в работах Ван Хоа и Фридрихса. В работах Аккарди, Фриджеро и Лю этот метод был разработан применительно к моделям квантовой оптики [5]. Детальный анализ одной из таких моделей в дипольном приближении был проведен в статье [6]. Суть метода заключается в использовании своеобразного скейлингового предела, когда рассматривается асимптотическое поведение корреляционных функций при больших временах и малых константах связи. При этом для ряда задач предельная динамика оказывается в некотором смысле интегрируемой и удается получить явные выражения для корреляционных функций [6]. Предел называется стохастическим, поскольку свободные корреляторы в этом пределе “ δ -коррелируют” по времени (т.е. имеет место случайный процесс, называемый белым шумом).

Основной результат данной работы заключается в том, что показано, как в температурном стохастическом пределе для модели взаимодействия частицы с квантовым полем возникает новая математическая структура, которую мы будем называть температурной свободной (больцмановской) алгеброй.

^{*}Centro Vito Volterra, Universita di Roma 2 di Tor Vergata, Italy

[†]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

[‡]Институт химической физики им. Н. Н. Семенова РАН, Москва, Россия

В работе рассматриваются корреляционные функции для операторов специального вида (так называемых коллективных переменных). Показано, что в стохастическом пределе происходят упрощения, в результате чего предельная теория описывается температурной бoльцмановской алгеброй. Это означает, что стохастические пределы корреляторов могут быть воспроизведены некоторым состоянием на температурной бoльцмановской алгебре. Дальнейшее изучение этой алгебры представляет самостоятельный интерес и должно составлять основу для рассмотрения предельной динамики.

Стохастический предел для данной модели при нулевой температуре был рассмотрен в работах [7–9].

Бoльцмановская алгебра в простейшем случае описывается соотношениями

$$B(k)B^\dagger(k') = \delta(k - k'), \quad k, k' \in R^d.$$

Соотношения такого типа изучались с математической точки зрения в работах [10–15]. В статье [7] подобные соотношения были получены в стохастическом пределе для модели взаимодействия частицы с квантовым полем, а в статье [16] – в пределе больших N для квантовой хромодинамики с калибровочной группой $SU(N)$.

Температурную бoльцмановскую алгебру, полученную ниже, можно схематически описать как алгебру с образующими $b(k)$, $b^\dagger(k)$, $\mathbf{p}$, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned} b(k)b^\dagger(k') &= \frac{\delta(\tilde{\omega}(k) + k\mathbf{p})}{1 - e^{-\beta\omega(k)}} \delta(k - k'), \\ b(k)\mathbf{p} &= (\mathbf{p} + k)b(k). \end{aligned}$$

Здесь $\omega(k)$ – одночастичная энергия квантового поля, β – обратная температура. Эту алгебру можно рассматривать как своеобразную деформацию бoльцмановской алгебры.

В разделе 2 дается общее описание стохастического предела. В разделе 3 формулируется теорема 1 о стохастическом пределе и рассматривается пример вычисления 2- и 4-точечных корреляционных функций. В разделе 4 доказывается теорема 2, дающая описание температурной свободной алгебры. Полное доказательство теоремы 1 приведено в разделе 5.

2. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

Стохастический предел есть своеобразный скейлинговый предел в квантовой теории. Рассмотрим систему, описываемую гамильтонианом

$$H = H_0 + \lambda H_1.$$

Рассмотрим оператор эволюции $U_t^{(\lambda)} = e^{itH_0}e^{-itH}$, удовлетворяющий уравнению Шредингера в представлении взаимодействия:

$$\frac{\partial}{\partial t} U_t^{(\lambda)} = -i\lambda H_1(t)U_t^{(\lambda)}, \quad U_0^{(\lambda)} = 1, \quad (1)$$

где $H_I(t) = e^{itH_0} H_I e^{-itH_0}$. Здесь λ мы считаем малой постоянной и будем изучать эффект накапливающихся за долгое время малых возмущений. Для этого осуществим предельные переходы $\lambda \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ и сделаем в эволюционном уравнении замену $t \rightarrow t/\lambda^2$:

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{t/\lambda^2}^{(\lambda)} = -\frac{i}{\lambda} H_I \left(\frac{t}{\lambda^2} \right) U_{t/\lambda^2}^{(\lambda)}.$$

Естественно предположить, что если существуют пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} U_{t/\lambda^2}^{(\lambda)} = U_t, \quad (2)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} H_I \left(\frac{t}{\lambda^2} \right) = H_t, \quad (3)$$

то предельный оператор U_t удовлетворяет уравнению

$$\partial_t U_t = -i H_t U_t, \quad U_0 = 1. \quad (4)$$

Пределы понимаются в смысле сходимости корреляторов. При указанном предельном переходе многие задачи становятся точно решаемыми. Замена $t \rightarrow t/\lambda^2$ и устремление λ к нулю соответствует одновременному пределу $\lambda \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ при $\lambda^2 t = \text{const}$. Здесь $\lambda^2 t$ интерпретируется как “медленная” шкала времени. Этот предел описывает главные вклады в динамику в режиме слабой связи на больших временах, т.е. эффект накапливающихся слабых возмущений. Физическая идея состоит в том, что в “медленной” шкале времени квантовое поле выглядит хаотическим объектом, квантовым белым шумом, т.е. $\delta(t)$ -коррелированным квантовым случайным процессом $b(t, k)$, называемым также “мастер-полем”. Предметом данной работы является нахождение перестановочных соотношений “мастер-поля”.

Мы будем считать, что квантово-механическая система есть тройка объектов (алгебра наблюдаемых $\mathcal{A}$, пространство состояний, оператор эволюции). Более того, мы будем считать, что пространство состояний есть гильбертово пространство представления Гельфанда–Наймарка–Сигала (ГНС), порожденного некоторым состоянием $\langle \cdot \rangle$ на алгебре наблюдаемых. В качестве такого функционала можно взять, например, вакуумное либо температурное среднее. В качестве оператора эволюции надо взять введенный выше оператор эволюции в представлении взаимодействия $U_t^{(\lambda)}$.

Стохастический предел алгебры наблюдаемых строится следующим образом. Элементу A алгебры наблюдаемых поставим в соответствие его свободную эволюцию $A(t) = e^{itH_0} A e^{-itH_0}$. Подберем элементы A_i , для которых существуют нетривиальные пределы выражений вида

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\langle \frac{1}{\lambda} A_1 \left(\frac{t_1}{\lambda^2} \right) \dots \frac{1}{\lambda} A_k \left(\frac{t_k}{\lambda^2} \right) \right\rangle.$$

Попробуем найти алгебру $\mathcal{B}$ (элементы которой будем обозначать B_i) и состояние $\langle \langle \cdot \rangle \rangle$ на ней таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\langle \frac{1}{\lambda} A_1 \left(\frac{t_1}{\lambda^2} \right) \dots \frac{1}{\lambda} A_k \left(\frac{t_k}{\lambda^2} \right) \right\rangle = \langle \langle B_1(t_1) \dots B_k(t_k) \rangle \rangle.$$

Полученную алгебру $\mathcal{B}$ будем называть стохастическим пределом алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$. ГНС-представление этой алгебры порождено состоянием $\langle\langle\cdot\rangle\rangle$. Фактически для исследования эволюции, задаваемой уравнением (1), достаточно вычислить стохастический предел для элементов алгебры наблюдаемых, входящих в гамильтониан взаимодействия H_I .

Анализ ряда теории возмущений (см. ниже) позволяет сделать следующий вывод. Используя теорему Вика, можно представить ряд теории возмущений после нормального упорядочения в виде ряда по диаграммам. Для некоторых моделей в стохастическом пределе “выживают” только полупланирные диаграммы. Полупланирным диаграммам соответствует алгебра свободных операторов рождения-уничтожения. Для рассматриваемой модели будет установлено, что в стохастическом пределе получается деформация болыцмановской алгебры, называемая температурной свободной алгеброй.

3. МОДЕЛЬ ЧАСТИЦЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С КВАНТОВЫМ ПОЛЕМ

Мы будем изучать модель частицы, взаимодействующей с квантовым полем при ненулевой температуре. Операторы координаты и импульса квантовой частицы $q = (q_1, \dots, q_d)$ и $p = (p_1, \dots, p_d)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[q_m, p_n] = i\delta_{mn}.$$

Квантовое поле описывается бозонными операторами (операторнозначными обобщенными функциями)

$$a(k) = (a_1(k), \dots, a_d(k)), \quad a^\dagger(k) = (a_1^\dagger(k), \dots, a_d^\dagger(k)), \quad k \in R^d,$$

с перестановочными соотношениями

$$[a_j(k), a_h^\dagger(k')] = \delta_{jh}\delta(k - k').$$

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = H_0 + \lambda H_I = \int \omega(k) a^\dagger(k) a(k) dk + \frac{1}{2} p^2 + \lambda H_I,$$

где ω – некоторая положительная функция на R^d , реалистичный пример которой есть $\omega(k) = |k|$, H_I задает взаимодействие свободной частицы с квантовым полем. Взаимодействие частицы с полем выражено через потенциал $\mathcal{A}(x)$, описывающий квантовое поле в точке пространства $x \in R^d$: $\mathcal{A}(x)$ есть потенциал поля, действующего на частицу с координатой x . Явная форма гамильтониана взаимодействия имеет вид

$$H_I = p\mathcal{A}(q) + \mathcal{A}(q)p, \tag{5}$$

где

$$\mathcal{A}(q) = \int dk \{g(k)e^{ik \cdot q} a^\dagger(k) + \bar{g}(k)e^{-ik \cdot q} a(k)\}. \tag{6}$$

Временная зависимость $H_I(t)$ задается через оператор

$$a_\lambda(t, k) = \frac{1}{\lambda} e^{i \frac{t}{\lambda^2} H_0} e^{-ikq} a(k) e^{-i \frac{t}{\lambda^2} H_0} = \frac{1}{\lambda} e^{\frac{-i(\tilde{\omega}(k)+kp)t}{\lambda^2}} e^{-ikq} a(k), \quad (7)$$

где $\tilde{\omega}(k) = \omega(k) + k^2/2$.

Мы будем изучать предел температурных корреляционных функций

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle a_\lambda^{\epsilon_N}(t_N, k_N) a_\lambda^{\epsilon_N-1}(t_{N-1}, k_{N-1}) \dots a_\lambda^{\epsilon_1}(t_1, k_1) \rangle.$$

Средние

$$\begin{aligned} \langle a(k) a^\dagger(k') \rangle &= \frac{\delta(k - k')}{1 - e^{-\beta \omega(k)}}, \\ \langle a^\dagger(k') a(k) \rangle &= \frac{\delta(k - k')}{e^{\beta \omega(k)} - 1} \end{aligned}$$

— это температурные бозонные корреляторы (остальные вычисляются по температурной теореме Вика), $\varepsilon \equiv \{\epsilon_N, \dots, \epsilon_1\} \in \{1, 0\}^N$, $\epsilon \in \{1, 0\}$ ($\epsilon = 0$ для a и $\epsilon = 1$ для $a^\dagger$). Температурное среднее $\langle \cdot \rangle$ понимается как гиббсовское среднее по степеням свободы поля, не затрагивающее степеней свободы квантовой частицы, т.е.

$$\langle X \rangle = \frac{\text{tr}(X \exp\{-\beta \int \omega(k) a^\dagger(k) a(k) dk\})}{\text{tr}(\exp\{-\beta \int \omega(k) a^\dagger(k) a(k) dk\})}.$$

По степеням свободы квантовой частицы среднее $\langle \cdot \rangle$ действует как условное ожидание, т.е. $\langle pX \rangle = p\langle X \rangle$.

При $N = 2n$ и равенстве числа операторов рождения и уничтожения рассмотрим разбиение $\sigma(\varepsilon)$ последовательности ε на пары из 0 и 1, что отвечает виковскому разложению

$$\langle a_\lambda^{\epsilon_N}(t_N, k_N) a_\lambda^{\epsilon_N-1}(t_{N-1}, k_{N-1}) \dots a_\lambda^{\epsilon_1}(t_1, k_1) \rangle$$

на пары операторов рождения-уничтожения. Произвольное разбиение такого вида соответствует некоторой виковской диаграмме. Нас будут интересовать разбиения, соответствующие полупланарным непересекающимся диаграммам. Такие разбиения будем называть нетривиальными.

Виковская диаграмма по разбиению строится следующим образом. Расположим индексы 0 и 1 последовательности ε на отрезке в порядке возрастания номера. Соединим дугами индексы, для которых присутствует пара в разбиении $\sigma(\varepsilon)$. Если все дуги полученной диаграммы расположить в одной полуплоскости относительно отрезка, причем дуги не пересекаются, то такую диаграмму назовем полуплоской непересекающейся, а соответствующее разбиение $\sigma(\varepsilon)$ — нетривиальным.

ТЕОРЕМА 1. *Предел температурных корреляционных функций всегда существует. Кроме того,*

- 1) *если число операторов рождения не равно числу операторов уничтожения, то коррелятор равен нулю (даже до предельного перехода),*
- 2) *если число операторов рождения равно числу операторов уничтожения, то предел коррелятора*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle a_{\lambda}^{\varepsilon_{2n}}(t_{2n}, k_{2n}) a_{\lambda}^{\varepsilon_{2n-1}}(t_{2n-1}, k_{2n-1}) \dots a_{\lambda}^{\varepsilon_1}(t_1, k_1) \rangle \quad (8)$$

представляется в виде суммы по нетривиальным разбиениям

$$\sum_{\sigma(\varepsilon)} \prod_{h=1}^n \delta(k_{m'_h} - k_{m_h}) c_{m_h m'_h}(k_{m_h}) 2\pi \delta(t_{m'_h} - t_{m_h}) \times \\ \times \delta \left(\tilde{\omega}(k_{m_h}) + k_{m_h} p + \sum_{\alpha} (-1)^{\varepsilon_{\alpha}} \chi_{(m_{\alpha}, m'_{\alpha})}(m_h) k_{m_{\alpha}} k_{m_h} - \varepsilon_h k_{m_h}^2 \right), \quad (9)$$

где $\{(m'_j, t_j); j = 1, \dots, n\}$ – разбиения $\{1, \dots, 2n\}$, соответствующие разбиениям $\sigma(\varepsilon)$. Величина m'_h соответствует оператору уничтожения, m_h – оператору рождения,

$$c_{m_h m'_h}(k) = \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega(k)}}, \quad m'_h > m_h, \\ c_{m_h m'_h}(k) = \frac{1}{e^{\beta \omega(k)} - 1}, \quad m'_h < m_h,$$

$(-1)^{\varepsilon_h} = 1$ для $m'_h > m_h$ и $(-1)^{\varepsilon_h} = -1$ для $m'_h < m_h$. Функция $\chi_{(m_{\alpha}, m'_{\alpha})}$ есть индикатор (характеристическая функция) отрезка $(m_{\alpha}, m'_{\alpha})$, т.е. суммирование по α ведется по парам $(m_{\alpha}, m'_{\alpha})$ таким, что m_h расположен между m_{α} и m'_{α} .

Доказательство теоремы 1 будет проведено в разделе 5. Здесь для иллюстрации теоремы 1 будут вычислены 2-точечные и 4-точечные корреляторы.

Вычислим 2-точечный коррелятор

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle a_{\lambda}(t, k_1) a_{\lambda}^{\dagger}(\tau, k_2) \rangle = \\ = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda^2} e^{-it/\lambda^2 (\tilde{\omega}(k_1) + k_1 p)} e^{-iq(k_1 - k_2)} e^{i\frac{\tau}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k_2) + k_2 p)} \langle a(k_1) a^{\dagger}(k_2) \rangle. \quad (10)$$

Используя формулы для бозонных 2-точечных корреляторов, получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda^2} e^{-i\frac{t-\tau}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k_1) + k_1 p)} \frac{\delta(k_1 - k_2)}{1 - e^{-\beta \omega(k_1)}}.$$

Применив формулу

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda^2} e^{i\frac{t}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k) + kp)} = 2\pi \delta(\tilde{\omega}(k) + kp) \delta(t), \quad (11)$$

получим для предела 2-точечного коррелятора выражение

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle a_\lambda(t, k_1) a_\lambda^\dagger(\tau, k_2) \rangle = 2\pi\delta(t - \tau) \delta(\tilde{\omega}(k_1) + k_1 p) \frac{\delta(k_1 - k_2)}{1 - e^{-\beta\omega(k_1)}}. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь 2-точечный коррелятор

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle a_\lambda^\dagger(\tau, k_2) a_\lambda(t, k_1) \rangle &= \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda^2} \left\langle a^\dagger(k_2) e^{ik_2 q} e^{i\frac{\tau}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k_2) + k_2 p)} e^{-i\frac{t}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k_1) + k_1 p)} e^{-ik_1 q} a(k_1) \right\rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя перестановочные соотношения для вейлевских операторов

$$e^{i\alpha p} e^{i\beta q} = e^{i\beta q} e^{i\alpha p} e^{i\alpha\beta},$$

где $[p, q] = -i$, получим для коррелятора (13) следующее выражение:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\delta(k_2 - k_1)}{e^{\beta\omega(k_1)} - 1} e^{-i\frac{t-\tau}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k_1) + k_1 p - k_1^2)}.$$

Применив опять формулу (11), найдем, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle a_\lambda^\dagger(\tau, k_2) a_\lambda(t, k_1) \rangle = 2\pi\delta(t - \tau) \delta(\tilde{\omega}(k_1) + k_1 p - k_1^2) \frac{\delta(k_2 - k_1)}{e^{\beta\omega(k_1)} - 1}. \quad (14)$$

Вычислим предел 4-точечного коррелятора

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle a_\lambda(t_1, k_1) a_\lambda(t_2, k_2) a_\lambda^\dagger(t'_2, k'_2) a_\lambda^\dagger(t'_1, k'_1) \rangle. \quad (15)$$

По температурной теореме Вика имеем

$$\begin{aligned} \langle a(k_1) a(k_2) a^\dagger(k'_2) a^\dagger(k'_1) \rangle &= \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega(k_1)}} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega(k_2)}} \times \\ &\times (\delta(k_2 - k'_2) \delta(k_1 - k'_1) + \delta(k_1 - k'_2) \delta(k_2 - k'_1)). \end{aligned} \quad (16)$$

Формула (16) для бозонного коррелятора $\langle a(k_1) a(k_2) a^\dagger(k'_2) a^\dagger(k'_1) \rangle$ содержит два члена, пропорциональных δ -функциям, которые соответствуют виковским диаграммам. Вычислим первый член $\mathcal{L}_1$, пропорциональный $\delta(k_1 - k'_1) \delta(k_2 - k'_2)$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega(k_1)}} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega(k_2)}} \delta(k_1 - k'_1) \delta(k_2 - k'_2) \times \\ &\times \frac{1}{\lambda^4} e^{-i\frac{t_1 - t'_1}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k_1) + k_1 p)} e^{-i\frac{t_2 - t'_2}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k_2) + k_2 p)} e^{-i\frac{t_2 - t'_2}{\lambda^2} k_1 k_2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из формулы (11) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= (2\pi)^2 \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega(k_1)}} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega(k_2)}} \times \\ &\times \delta(k_1 - k'_1) \delta(k_2 - k'_2) \delta(t_1 - t'_1) \delta(t_2 - t'_2) \times \\ &\times \delta(\tilde{\omega}(k_1) + k_1 p) \delta(\tilde{\omega}(k_2) + k_2 p + k_1 k_2). \end{aligned} \quad (18)$$

Вычислим второй член $\mathcal{L}_2$ коррелятора, пропорциональный $\delta(k_1 - k'_2) \delta(k_2 - k'_1)$. По формуле (11) находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega(k_1)}} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega(k_2)}} \delta(k_1 - k'_2) \delta(k_2 - k'_1) \times \\ &\times \frac{1}{\lambda^4} e^{-i\frac{t_1 - t'_2}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k_1) + k_1 p)} e^{-i\frac{t_2 - t'_1}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k_2) + k_2 p)} e^{-i\frac{t_2 - t'_2}{\lambda^2} k_1 k_2} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, 4-точечный коррелятор задается формулой (18).

4. ТЕМПЕРАТУРНАЯ СВОБОДНАЯ АЛГЕБРА

Нашей целью является построение алгебры $\mathcal{B}$ и состояния $\langle\langle\cdot\rangle\rangle$ на этой алгебре. При этом корреляционные функции алгебры $\mathcal{B}$ относительно состояния $\langle\langle\cdot\rangle\rangle$ должны воспроизводить стохастические пределы температурных корреляторов алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$, т.е. должны выполняться тождества

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle a_{\lambda}^{\epsilon_N}(t_N, k_N) a_{\lambda}^{\epsilon_{N-1}}(t_{N-1}, k_{N-1}) \dots a_{\lambda}^{\epsilon_1}(t_1, k_1) \rangle = \langle\langle b^{\epsilon_N}(t_N, k_N) b^{\epsilon_{N-1}}(t_{N-1}, k_{N-1}) \dots b^{\epsilon_1}(t_1, k_1) \rangle\rangle.$$

Коррелятор, полученный в теореме 1, можно описать следующим образом. Коррелятор, соответствующий последовательности индексов ϵ , равен сумме по полупланарным диаграммам, соответствующим разбиениям $\sigma(\epsilon)$. Вклад от каждой полупланарной диаграммы равен произведению вкладов по дугам. Вклад от дуги состоит из δ -функции по импульсам с температурным весом (что равно вкладу в бозонный коррелятор), $2\pi\delta$ -функции по соответствующим временам и δ -функции от фазы. В фазу входит член, зависящий от самой дуги и сумма вкладов от дуг, находящихся внутри данной. Такая простая структура коррелятора позволяет выразить его как состояние на алгебре $\mathcal{B}$, структура которой задается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2. *Корреляторы из теоремы 1 воспроизводятся, если величину $b(t, k)$ взять в виде суммы двух свободно независимых случайных величин*

$$b(t, k) = b_1(t, k) + b_2^{\dagger}(t, k), \quad (19)$$

удовлетворяющих соотношениям температурной свободной алгебры, и выбрать функционал $\langle\langle\cdot\rangle\rangle$ равным вакуумному среднему для полей $b_i(t, k)$. Температурная свободная алгебра имеет образующие $\{p, b_i(t, k), b_i^{\dagger}(t, k), i = 1, 2\}$, удовлетворяющие соотношениям

$$b_1(t, k_1) b_1^{\dagger}(\tau, k_2) = 2\pi\delta(t - \tau) \delta(\tilde{\omega}(k_1) + k_1 p) \frac{\delta(k_1 - k_2)}{1 - e^{-\beta\omega(k_1)}}, \quad (20)$$

$$b_2(t, k_1) b_2^{\dagger}(\tau, k_2) = 2\pi\delta(t - \tau) \delta(\tilde{\omega}(k_1) + k_1(p - k_1)) \frac{\delta(k_1 - k_2)}{e^{\beta\omega(k_1)} - 1}, \quad (21)$$

$$b_1(t, k_1) b_2^{\dagger}(\tau, k_2) = b_2(\tau, k_2) b_1^{\dagger}(t, k_1) = 0, \quad (22)$$

$$b_1(t, k)p = (p + k)b_1(t, k), \quad (23)$$

$$b_2(t, k)p = (p - k)b_2(t, k). \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО представляет собой прямое вычисление. Разложим коррелятор

$$\langle\langle b^{\epsilon_N}(t_N, k_N) b^{\epsilon_{N-1}}(t_{N-1}, k_{N-1}) \dots b^{\epsilon_1}(t_1, k_1) \rangle\rangle$$

в сумму корреляторов мономов от образующих $b_i^{\epsilon}(t, k)$. В корреляторах мономов будем производить сокращения, пользуясь соотношениями (20)–(22). Полученные δ -функции

будем передвигать между $b_i^\varepsilon(t, k)$, пользуясь соотношениями (23), (24). Будем продолжать эту процедуру, пока не приведем моном к нормально упорядоченному виду. Поскольку функционал $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$ есть вакуумное среднее, то в коррелятор войдет вклад только от δ -функций.

Спаривания $b_1(t_{m'_h}, k_{m'_h})b_1^\dagger(t_{m_h}, k_{m_h})$ и $b_2(t_{m_h}, k_{m_h})b_2^\dagger(t_{m'_h}, k_{m'_h})$ по соотношениям (20), (21) равны

$$\delta(k_{m'_h} - k_{m_h})c_{m_h m'_h}(k_{m_h})2\pi\delta(t_{m'_h} - t_{m_h})\delta(\tilde{\omega}(k_{m_h}) + k_{m_h}p - \varepsilon_h k_{m_h}^2). \quad (25)$$

Соотношения (23), (24) дают вклад

$$\sum_{\alpha} (-1)^{\varepsilon_{\alpha}} \chi_{(m_{\alpha}, m'_{\alpha})}(m_h)$$

в фазовый сдвиг (аргумент последней δ -функции в (25)), возникающий при переносе δ -функций через $b_i^\varepsilon(t, k)$. Это завершает доказательство теоремы 2.

Поля b_i из температурной свободной алгебры возникают как стохастический предел конструкции Араки–Вудса. Изложим эту конструкцию в бозонном варианте. Конструкция Араки–Вудса позволяет представить температурное состояние бозона через вакуумное состояние пары бозонов.

Введем два независимых бозонных поля $c_1(k)$, $c_2(k)$,

$$[c_i(k), c_j^\dagger(k')] = \delta_{ij}\delta(k - k').$$

Каждое из полей $c_i(k)$ действует в фоксовском представлении. Рассмотрим преобразование Боголюбова

$$a(k) = \sqrt{m(k)}c_1(k) + \sqrt{m(k) - 1}c_2^\dagger(k), \quad (26)$$

$$a^\dagger(k) = \sqrt{m(k)}c_1^\dagger(k) + \sqrt{m(k) - 1}c_2(k). \quad (27)$$

Тогда

$$[a(k), a^\dagger(k')] = \delta(k - k').$$

Для вакуумных средних имеем соотношение

$$\langle a(k)a^\dagger(k') \rangle = m(k)\delta(k - k').$$

Если взять

$$m(k) = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_k}},$$

то получим температурное состояние.

В стохастическом пределе оператор $a_\lambda(t, k)$ перейдет в сумму двух белых шумов $b_1(t, k) + b_2^\dagger(t, k)$. Формула (26) примет вид

$$\begin{aligned} b(t, k) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} e^{-i\frac{t}{\lambda^2}(\tilde{\omega}(k) + kp)} e^{-ikq} a(k) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} e^{-i\frac{t}{\lambda^2}(\tilde{\omega}(k) + kp)} e^{-ikq} \sqrt{m(k)}c_1(k) + \\ &\quad + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} e^{-i\frac{t}{\lambda^2}(\tilde{\omega}(k) + kp)} e^{-ikq} \sqrt{m(k) - 1}c_2^\dagger(k) = \\ &= b_1(t, k) + b_2^\dagger(t, k). \end{aligned}$$

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ n -ТОЧЕЧНОГО КОРРЕЛЯТОРА

В этом разделе будут вычислены стохастические пределы n -точечных корреляторов для модели взаимодействия частицы с нерелятивистским квантовым полем, т.е. доказана теорема 1.

Используя правила перемножения вейлевских операторов

$$e^{i\alpha p} e^{i\beta q} = e^{i(\alpha p + \beta q)} e^{i\frac{1}{2}\alpha\beta},$$

получим для свободной эволюции полевого оператора (7) выражение

$$a_\lambda^\epsilon(t, k) \equiv \frac{1}{\lambda} \exp \left[-i(-1)^\epsilon \left\{ \frac{t}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k) + kp) + kq - \frac{1}{2} \frac{t}{\lambda^2} k^2 \right\} \right] a^\epsilon(k). \quad (28)$$

При последовательности индексов $\varepsilon = \{\varepsilon_{2n}, \dots, \varepsilon_1\} \in \{1, 0\}^{2n}$ получим, что

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{j=1}^{2n} a_\lambda^{\varepsilon_j}(t_j, k_j) \right\rangle &= \prod_{j=1}^{2n} \left\{ \frac{1}{\lambda} \exp \left[-i(-1)^{\varepsilon_j} \left\{ \frac{t_j}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k_j) + k_j p) + k_j q - \frac{1}{2} \frac{t_j}{\lambda^2} k_j^2 \right\} \right] \right\} \times \\ &\times \left\langle \prod_{h=1}^{2n} a^{\varepsilon_h}(k_h) \right\rangle, \end{aligned} \quad (29)$$

причем

$$\left\langle \prod_{h=1}^{2n} a^{\varepsilon_h}(k_h) \right\rangle = \sum_{m'_h \neq m_h} \prod_{h=1}^n \delta(k_{m'_h} - k_{m_h}) c_{m_h m'_h}(k_{m_h}), \quad (30)$$

что равняется сумме спариваний всех операторов рождения-уничтожения. Операторы в этих произведениях считаются упорядоченными справа налево. Поэтому можно записать

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{j=1}^{2n} a_\lambda^{\varepsilon_j}(t_j, k_j) \right\rangle &= \prod_{j=1}^{2n} \left\{ \frac{1}{\lambda} \exp \left[-i(-1)^{\varepsilon_j} \left\{ \frac{t_j}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k_j) + k_j p) + k_j q - \frac{1}{2} \frac{t_j}{\lambda^2} k_j^2 \right\} \right] \right\} \times \\ &\times \sum_{m'_h \neq m_h} \prod_{h=1}^n \delta(k_{m'_h} - k_{m_h}) c_{m_h m'_h}(k_{m_h}). \end{aligned} \quad (31)$$

Используя правила перемножения вейлевских операторов, видим, что

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^{2n} \left\{ \frac{1}{\lambda} \exp \left[-i(-1)^{\varepsilon_j} \left\{ \frac{t_j}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k_j) + k_j p) + k_j q - \frac{1}{2} \frac{t_j}{\lambda^2} k_j^2 \right\} \right] \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{1 \leq j < l \leq 2n} (-1)^{\varepsilon_j + \varepsilon_l} k_j k_l \frac{t_j - t_l}{\lambda^2} \right\} \times \\ &\times \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{2n} \exp \left[-i \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{\varepsilon_j} \left\{ \frac{t_j}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k_j) + k_j p) + k_j q - \frac{1}{2} \frac{t_j}{\lambda^2} k_j^2 \right\} \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Используя то, что m'_h пробегает половину $2n$ индексов l и m_h пробегает другую половину этих индексов, а также то, что $(-1)^{\epsilon_{m'_h}} = 1$ и $(-1)^{\epsilon_{m_h}} = -1$, получаем для фазового фактора, входящего в формулу (32), следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{2} \sum_{l=1}^{2n} \sum_{j < l} (-1)^{\epsilon_j + \epsilon_l} k_j k_l (t_j - t_l) = \\
& = -\frac{i}{2} \sum_{h=1}^n \left\{ \sum_{1 \leq j < m'_h} (-1)^{\epsilon_j} k_j k_{m'_h} (t_j - t_{m'_h}) - \sum_{1 \leq j < m_h} (-1)^{\epsilon_j} k_j k_{m_h} (t_j - t_{m_h}) \right\} = \\
& = -\frac{i}{2} \sum_{h=1}^n \left\{ \sum_{\alpha}^{m'_\alpha < m'_h} k_{m'_\alpha} k_{m'_h} (t_{m'_\alpha} - t_{m'_h}) - \sum_{\beta}^{m_\beta < m'_h} k_{m_\beta} k_{m'_h} (t_{m_\beta} - t_{m'_h}) - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{\gamma}^{m'_\gamma < m_h} k_{m'_\gamma} k_{m_h} (t_{m'_\gamma} - t_{m_h}) + \sum_{\delta}^{m_\delta < m_h} k_{m_\delta} k_{m_h} (t_{m_\delta} - t_{m_h}) \right\} \equiv \\
& \equiv -\frac{i}{2} \sum_{h=1}^n (I_h + II_h). \tag{33}
\end{aligned}$$

Здесь учитывается, что $k_{m_h} = k_{m'_h}$. Группируя первый член с третьим и второй с четвертым, получим

$$\begin{aligned}
I_h &= \sum_{\alpha}^{m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} (t_{m'_\alpha} - t_{m'_h}) - \sum_{\gamma}^{m'_\gamma < m_h} k_{m_\gamma} k_{m_h} (t_{m'_\gamma} - t_{m_h}) = \\
&= \sum_{\alpha}^{m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} (t_{m'_\alpha} - t_{m_h}) + \sum_{\alpha}^{m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} (t_{m_h} - t_{m'_h}) - \\
&\quad - \sum_{\gamma}^{m'_\gamma < m_h} k_{m_\gamma} k_{m_h} (t_{m'_\gamma} - t_{m_h}) = \sum_{\alpha}^{m_h < m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} (t_{m'_\alpha} - t_{m_h}) + \\
&\quad + \sum_{\alpha}^{m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} (t_{m_h} - t_{m'_h}) \quad \text{при } m'_h > m_h
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
I_h &= - \sum_{\alpha}^{m'_h < m'_\alpha < m_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} (t_{m'_\alpha} - t_{m_h}) + \\
&\quad + \sum_{\alpha}^{m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} (t_{m_h} - t_{m'_h}) + k_{m_h} k_{m_h} (t_{m_h} - t_{m'_h}) \quad \text{при } m'_h < m_h
\end{aligned}$$

Для суммы второго и четвертого членов получим

$$- II_h = \sum_{\beta}^{m_\beta < m'_h} k_{m_\beta} k_{m_h} (t_{m_\beta} - t_{m'_h}) - \sum_{\delta}^{m_\delta < m_h} k_{m_\delta} k_{m_h} (t_{m_\delta} - t_{m_h}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\beta}^{m_{\beta} < m'_h} k_{m_{\beta}} k_{m_h} (t_{m_{\beta}} - t_{m'_h}) - \sum_{\delta}^{m_{\delta} < m_h} k_{m_{\delta}} k_{m_h} (t_{m_{\delta}} - t_{m'_h}) - \\
&\quad - \sum_{\delta}^{m_{\delta} < m_h} k_{m_{\delta}} k_{m_h} (t_{m'_h} - t_{m_h}) = \sum_{\beta}^{m_h < m_{\beta} < m'_h} k_{m_{\beta}} k_{m_h} (t_{m_{\beta}} - t_{m'_h}) + \\
&\quad + \sum_{\delta}^{m_{\delta} < m_h} k_{m_{\delta}} k_{m_h} (t_{m_h} - t_{m'_h}) + k_{m_h} k_{m_h} (t_{m_h} - t_{m'_h}) \quad \text{при } m'_h > m_h
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
-\text{II}_h &= - \sum_{\beta}^{m'_h < m_{\beta} < m_h} k_{m_{\beta}} k_{m_h} (t_{m_{\beta}} - t_{m'_h}) + \\
&\quad + \sum_{\delta}^{m_{\delta} < m_h} k_{m_{\delta}} k_{m_h} (t_{m_h} - t_{m'_h}) \quad \text{при } m'_h < m_h.
\end{aligned}$$

Теперь можно записать, что

$$\begin{aligned}
\text{I}_h + \text{II}_h &= \sum_{\alpha}^{m_h < m'_{\alpha} < m'_h} k_{m_{\alpha}} k_{m_h} (t_{m'_{\alpha}} - t_{m_h}) + \sum_{\alpha}^{m'_{\alpha} < m'_h} k_{m_{\alpha}} k_{m_h} (t_{m_h} - t_{m'_{\alpha}}) - \\
&\quad - \sum_{\beta}^{m_h < m_{\beta} < m'_h} k_{m_{\beta}} k_{m_h} (t_{m_{\beta}} - t_{m'_h}) - \sum_{\beta}^{m_{\beta} < m_h} k_{m_{\beta}} k_{m_h} (t_{m_h} - t_{m'_h}) - \\
&\quad - k_{m_h} k_{m_h} (t_{m_h} - t_{m'_h}) \quad \text{при } m'_h > m_h
\end{aligned} \tag{34}$$

и

$$\begin{aligned}
\text{I}_h + \text{II}_h &= - \sum_{\alpha}^{m'_h < m'_{\alpha} < m_h} k_{m_{\alpha}} k_{m_h} (t_{m'_{\alpha}} - t_{m_h}) + \sum_{\alpha}^{m'_{\alpha} < m'_h} k_{m_{\alpha}} k_{m_h} (t_{m_h} - t_{m'_{\alpha}}) + \\
&\quad + \sum_{\beta}^{m'_h < m_{\beta} < m_h} k_{m_{\beta}} k_{m_h} (t_{m_{\beta}} - t_{m'_h}) - \sum_{\beta}^{m_{\beta} < m_h} k_{m_{\beta}} k_{m_h} (t_{m_h} - t_{m'_h}) + \\
&\quad + k_{m_h} k_{m_h} (t_{m_h} - t_{m'_h}) \quad \text{при } m'_h < m_h.
\end{aligned}$$

Рассмотрим в формуле (32) следующий член:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2n} \exp \left[-i \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{\epsilon_j} \left\{ \frac{t_j}{\lambda^2} (\tilde{\omega}(k_j) + k_j p) + k_j q - \frac{1}{2} \frac{t_j}{\lambda^2} k_j^2 \right\} \right] \times \\
&\quad \times \sum_{m'_h \neq m_h} \prod_{h=1}^n \delta(k_{m'_h} - k_{m_h}) c_{m_h m'_h} (k_{m_h}).
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq l \leq 2n} (-1)^{\epsilon_l} t_l k_l &= - \sum_{1 \leq h \leq n} (t_{m_h} - t_{m'_h}) k_{m_h}, \\ \sum_{1 \leq l \leq 2n} (-1)^{\epsilon_l} k_l q &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Тогда рассматриваемый член принимает вид

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2n} \exp \left[i \sum_{1 \leq h \leq n} \frac{t_{m_h} - t_{m'_h}}{\lambda^2} \left(\tilde{\omega}(k_{m_h}) + k_{m_h} p - \frac{1}{2} k_{m_h}^2 \right) \right] \times \\ &\times \sum_{m'_h \neq m_h} \prod_{h=1}^n \delta(k_{m'_h} - k_{m_h}) c_{m_h m'_h}(k_{m_h}). \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} u_{m_h} &= t_{m_h}, \\ v_{m_h} &= t_{m_h} - t_{m'_h}. \end{cases} \quad (36)$$

Приведенные выше выкладки позволяют сформулировать следующую лемму.

ЛЕММА 1. Для рассматриваемого в теореме 1 коррелятора имеет место формула

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{j=1}^{2n} a_{\lambda}^{\epsilon_j}(t_j, k_j) \right\rangle &= \exp \left[-\frac{i}{2} \frac{1}{\lambda^2} \sum_{h=1}^n \{I_h + \Pi_h\} \right] \times \\ &\times \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2n} \exp \left[i \sum_{1 \leq h \leq n} \frac{v_{m_h}}{\lambda^2} \left(\tilde{\omega}(k_{m_h}) + k_{m_h} p - \frac{1}{2} k_{m_h}^2 \right) \right] \times \\ &\times \sum_{m'_h \neq m_h} \prod_{h=1}^n \delta(k_{m'_h} - k_{m_h}) c_{m_h m'_h}(k_{m_h}). \end{aligned} \quad (37)$$

Фазовый фактор в (37) равен

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha}^{m_h < m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} (-v_{m_\alpha} + u_{m_\alpha} - u_{m_h}) + \sum_{\alpha}^{m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_h} - \\ &- \sum_{\beta}^{m_h < m_\beta < m'_h} k_{m_\beta} k_{m_h} (v_{m_h} + u_{m_\beta} - u_{m_h}) - \\ &- \sum_{\beta}^{m_\beta < m_h} k_{m_\beta} k_{m_h} v_{m_h} - k_{m_h} k_{m_h} v_{m_h} \quad \text{при} \quad m'_h > m_h \end{aligned} \quad (38)$$

u

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\alpha}^{m'_h < m'_\alpha < m_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} (-v_{m_\alpha} + u_{m_\alpha} - u_{m_h}) + \sum_{\alpha}^{m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_h} + \\
& + \sum_{\beta}^{m'_h < m_\beta < m_h} k_{m_\beta} k_{m_h} (v_{m_h} + u_{m_\beta} - u_{m_h}) - \\
& - \sum_{\beta}^{m_\beta < m_h} k_{m_\beta} k_{m_h} v_{m_h} + k_{m_h} k_{m_h} v_{m_h} \quad \text{при} \quad m'_h < m_h.
\end{aligned}$$

По лемме Римана–Лебега осцилляторные множители типа $\exp(ik^2 u/\lambda^2)$ исчезают в пределе $\lambda \rightarrow 0$. Таким образом, в этом пределе разбиение $\{(m_h, m'_h)\}$ в (8) “выживает” тогда и только тогда, когда для любого фиксированного $h = 1, \dots, n$ и для любого α или

$$m_h < m_\alpha < m'_h \Leftrightarrow m_h < m'_\alpha < m'_h,$$

или

$$m_h > m_\alpha > m'_h \Leftrightarrow m_h > m'_\alpha > m'_h,$$

т.е. имеет место разбиение, соответствующее непересекающейся полуплоской диаграмме. Соответственно только нетривиальные разбиения последовательности $\varepsilon = \{\epsilon_{2n}, \dots, \epsilon_1\} \in \{1, 0\}^{2n}$ дают нетривиальный вклад в предел коррелятора. Обозначая через $\{(m_h, m'_h)\}$ разбиение, видим, что соответствующее значение фазового фактора (38) равно

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha}^{m_h < m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} (-v_{m_\alpha} - v_{m_h}) + \sum_{\alpha}^{m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_h} - \\
& - \sum_{\beta}^{m_\beta < m_h} k_{m_\beta} k_{m_h} v_{m_h} - k_{m_h} k_{m_h} v_{m_h} \quad \text{при} \quad m'_h > m_h
\end{aligned} \tag{39}$$

и

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\alpha}^{m'_h < m'_\alpha < m_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} (-v_{m_\alpha} - v_{m_h}) + \sum_{\alpha}^{m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_h} - \\
& - \sum_{\beta}^{m_\beta < m_h} k_{m_\beta} k_{m_h} v_{m_h} + k_{m_h} k_{m_h} v_{m_h} \quad \text{при} \quad m'_h < m_h.
\end{aligned}$$

Исследуем полученный фазовый фактор. Для $m'_h > m_h$ имеем

$$\sum_{\alpha}^{m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_h} = \sum_{\alpha}^{m_h < m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_h} + \sum_{\alpha}^{m'_\alpha \leq m_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_h}.$$

Так как $m'_\alpha \neq m_h$, то

$$\sum_{\alpha}^{m'_\alpha \leq m_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_h} = \sum_{\alpha}^{m'_\alpha < m_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_h}.$$

Следовательно, фазовый фактор равен

$$\begin{aligned} & - \sum_{\alpha}^{m_h < m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_\alpha} + \sum_{\alpha}^{m'_\alpha < m_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_h} - \\ & - \sum_{\beta}^{m_\beta < m_h} k_{m_\beta} k_{m_h} v_{m_h} - k_{m_h} k_{m_h} v_{m_h}. \end{aligned}$$

В случае $m'_h < m_h$ из условия отсутствия пересечений получаем, что

$$- \sum_{\alpha}^{m'_h < m'_\alpha < m_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} (-v_{m_\alpha} - v_{m_h}) = - \sum_{\alpha}^{m'_h < m_\alpha < m_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} (-v_{m_\alpha} - v_{m_h}).$$

Таким образом, фазовый фактор равен

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha}^{m'_h < m'_\alpha < m_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_\alpha} + \sum_{\alpha}^{m'_\alpha < m'_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_h} - \\ & - \sum_{\beta}^{m_\beta < m'_h} k_{m_\beta} k_{m_h} v_{m_h} + k_{m_h} k_{m_h} v_{m_h}. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$I_h + II_h = \Phi_h - (-1)^{\varepsilon_h} k_{m_h} k_{m_h} v_{m_h}.$$

Здесь $(-1)^{\varepsilon_h} = 1$ для $m'_h > m_h$ и $(-1)^{\varepsilon_h} = -1$ для $m'_h < m_h$. Получаем для фазового фактора формулы

$$\begin{aligned} \Phi_h &= - \sum_{\alpha \in (m_h, m'_h) \text{ или } (m'_h, m_h)} (-1)^{\varepsilon_h} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_\alpha} - \\ & - \sum_{\alpha: h \in (m_\alpha, m'_\alpha) \text{ или } (m'_\alpha, m_\alpha)} (-1)^{\varepsilon_\alpha} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_h}, \\ \sum_{1 \leq h \leq n} \Phi_h &= -2 \sum_{1 \leq h \leq n} \sum_{\alpha: h \in (m_\alpha, m'_\alpha) \text{ или } (m'_\alpha, m_\alpha)} (-1)^{\varepsilon_\alpha} k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_h} = \\ &= -2 \sum_{1 \leq h \leq n} \sum_{\alpha} (-1)^{\varepsilon_\alpha} \chi_{(m_\alpha, m'_\alpha)}(m_h) k_{m_\alpha} k_{m_h} v_{m_h}. \end{aligned}$$

Здесь $\chi_{(m_\alpha, m'_\alpha)}$ есть индикатор интервала (m_α, m'_α) или (m'_α, m_α) . Таким образом, доказана следующая лемма.

ЛЕММА 2. Вклад в коррелятор от непересекающихся диаграмм равен

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2n} \exp \left[i \sum_{1 \leq h \leq n} \frac{v_{m_h}}{\lambda^2} \left(\tilde{\omega}(k_{m_h}) + k_{m_h} p + \sum_{\alpha} (-1)^{\varepsilon_{\alpha}} \chi_{(m_{\alpha}, m'_{\alpha})}(m_h) k_{m_{\alpha}} k_{m_h} - \frac{1}{2} k_{m_h}^2 + \frac{1}{2} (-1)^{\varepsilon_h} k_{m_h}^2 \right) \right] \sum_{m'_h \neq m_h} \prod_{h=1}^n \delta(k_{m'_h} - k_{m_h}) c_{m_h m'_h}(k_{m_h}).$$

Используя формулу (11) и удерживая только нетривиальные разбиения, получим, что

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle a_{\lambda}^{\varepsilon_{2n}}(t_{2n}, k_{2n}) a_{\lambda}^{\varepsilon_{2n-1}}(t_{2n-1}, k_{2n-1}) \dots a_{\lambda}^{\varepsilon_1}(t_1, k_1) \rangle = \\ = \sum_{m'_h \neq m_h} \prod_{h=1}^n \delta(k_{m'_h} - k_{m_h}) c_{m_h m'_h}(k_{m_h}) 2\pi \delta(t_{m'_h} - t_{m_h}) \times \\ \times \delta \left(\tilde{\omega}(k_{m_h}) + k_{m_h} p + \sum_{\alpha} (-1)^{\varepsilon_{\alpha}} \chi_{(m_{\alpha}, m'_{\alpha})}(m_h) k_{m_{\alpha}} k_{m_h} - \varepsilon_h k_{m_h}^2 \right), \end{aligned}$$

где $\{(m'_j, m_j): j = 1, \dots, n\}$ есть нетривиальное разбиение $\{1, \dots, 2n\}$, ассоциированное с ε . Теорема 1 доказана.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта INTAS, № 96-0698 и гранта РФФИ, № 96-01-00312.

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов.* УМЖ. 1950. Т. 2. № 2. С. 3–24.
- [2] *H. Fröhlich.* Adv. in Phys. 1954. V. 3. P. 325.
- [3] *С. Швеебер.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: ИЛ, 1963.
- [4] *Р. Фейнман.* Статистическая механика. М.: Мир, 1975.
- [5] *L. Accardi, A. Frigerio, Y. G. Lu.* Commun. Math. Phys. 1990. V. 131. P. 537–570.
- [6] *L. Accardi, S. Kozyrev, I. V. Volovich.* Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. 375.
- [7] *L. Accardi, Y. G. Lu.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 180. № 3. P. 605–632.
- [8] *M. Skeide.* Hilbert modules in quantum electrodynamics and quantum probability: Preprint Universitat Heidelberg, 1996.
- [9] *J. Gough.* J. of Phys. A. 1997. V. 149. P. 2375.
- [10] *J. Cuntz.* Commun. Math. Phys. 1977. V. 57. P. 173–185.
- [11] *D. E. Evans.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1980. V. 16. P. 915–927.
- [12] *H. Araki, D. E. Evans.* J. Operat. Theory. 1981. V. 23. P. 326.
- [13] *D. Voiculescu, K. J. Dykema, A. Nica.* Free random variables. CRM Monograph Series. V.1. Amer. Math. Soc., 1992.
- [14] *B. Kummerer, R. Speicher.* J. Funct. Anal. 1992. V. 103. P. 372–478.
- [15] *O. Bratteli, P. E. T. Jorgensen, A. Kishimoto, R. F. Werner.* Pure states on O_d . func-an/9711004.
- [16] *I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 462. P. 600.

Поступила в редакцию 17.II.1998 г.,
после доработки 28.V.1998 г.