Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. В. Диль, С. Б. Руткевич, Трехмерная $O(n)$ - ϕ^4 -модель в плоско-параллельном слое со свободными граничными условиями: точные результаты для нетривиального размерного кроссовера в пределе $n \rightarrow \infty$, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 2, 325–343

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 07:15:50

© 2017 г.

Х. В. Диль*, С. Б. Руткевич*

ТРЕХМЕРНАЯ $O(n)$ - ϕ^4 -МОДЕЛЬ
В ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОМ СЛОЕ
СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ:
ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ НЕТРИВИАЛЬНОГО
РАЗМЕРНОГО КРОССОВЕРА В ПРЕДЕЛЕ $n \rightarrow \infty$

Дан краткий обзор недавних результатов точных расчетов критических сил Казимира в $O(n)$ - ϕ^4 -модели при $n \rightarrow \infty$ для трехмерного слоя ширины L , ограниченного двумя параллельными плоскостями со свободными граничными условиями. В этой модели дальний порядок имеет место при температурах ниже критической точки T_c объемного фазового перехода только в пределе $L \rightarrow \infty$, однако дальний порядок в модели отсутствует при всех температурах $T > 0$ при произвольной конечной ширине слоя $L < \infty$. Последовательное описание скейлингового поведения системы вблизи T_c оказывается весьма сложной задачей, так как наряду с объемным и поверхностным скейлингом, а также конечно-размерным скейлингом необходимо учитывать нетривиальный размерный кроссовер. Модель допускает точное решение в пределе $n \rightarrow \infty$ в терминах собственных значений и собственных функций самосопряженного уравнения Шредингера. Это решение содержит потенциал $v(z)$, который имеет при $z \rightarrow +0$ сингулярное поведение $v(z) \approx -1/(4z^2) + 4m/(\pi^2 z)$ в приграничном слое, где $m = 1/\xi_+(|t|)$ – обратная корреляционная длина в объемной системе, $t \sim (T - T_c)/T_c$, и аналогичная сингулярность имеет место вблизи второй граничной плоскости. В недавней работе нами совместно с соавторами численными методами с высокой точностью были вычислены потенциал $v(z)$, избыточная свободная энергия и сила Казимира. Дано объяснение того, как эти численные результаты могут быть дополнены точными аналитическими результатами для целого ряда величин (коэффициенты разложения потенциала $v(z)$, данные рассеяния для потенциала $v(z)$ в полубесконечной геометрии $L = \infty$ при всех значениях $m \gtrless 0$, низкотемпературная асимптотика избыточной свободной энергии и силы Казимира). Эти аналитические результаты были получены сочетанием таких методов, как операторные разложения, обобщенная теория обратной задачи рассеяния, новая формула следов и квазиклассические (ВКБ) разложения.

Ключевые слова: флуктуационно-индуцированные силы, эффект Казимира, обратная задача рассеяния, размерный кроссовер, конечно-размерный скейлинг.

DOI: 10.4213/tmf9120

---

*Department of Physics, University of Duisburg-Essen, Duisburg, Germany.
E-mail: h.w.diehl@uni-due.de

1. ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие нейтральных атомов, таких как ^4He , – это взаимодействие дальнего действия, т.е. давно известное взаимодействие Ван-дер-Ваальса, природа которого хорошо изучена (см., например, [1]). В результате квантово-механических флуктуаций зарядов один из атомов приобретает наведенный (флуктуационный) дипольный момент, создающий электрическое поле, которое воздействует на другой атом. Хотя усредненные дипольные моменты равны нулю, значения их квадратов отличны от нуля, и в результате возникает флуктуационно-индуцированное (ван-дер-ваальсово) взаимодействие. В 1948 году Казимир показал, что подобные флуктуационно-индуцированные взаимодействия имеют место между макроскопическими металлическими объектами в пустом пространстве, так как эти объекты возмущают электромагнитную энергию основного состояния [2]. Рассматривая пару параллельных заземленных металлических пластин с площадью поверхности A , расположенных на расстоянии L друг от друга в вакууме, он обнаружил, что в (неизмеримой, бесконечной) электромагнитной энергии вакуума, отнесенной к площади поверхности A (при $A \rightarrow \infty$), имеется зависящий от L вклад, который не содержит ультрафиолетовых (УФ) расходимостей:

$$\frac{\Delta E_0}{A} = \frac{\hbar c}{2} \left[\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \sum_{k,\lambda} \sqrt{p^2 + k^2} - 2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} q \right] = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720} \frac{1}{L^2}. \quad (1)$$

Здесь $(\mathbf{p}, k)$ и $\mathbf{q}$ – трехмерные волновые векторы, $\mathbf{p}$ и k – двумерная и одномерная составляющие, первая параллельна пластинам, а вторая перпендикулярна. Из граничных условий, которым должны удовлетворять электромагнитные поля на пластинах, следует, что k принимает квантованные значения $k = \nu\pi/L$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$. Сумма $\sum_\lambda$ берется по одной или двум поляризациям при $\nu = 0$ и $\nu > 0$ соответственно.

Полученный результат легко интерпретировать следующим образом: коэффициент $\hbar c/L$ задает энергетическую шкалу. Таким образом, из размерных соображений следует, что изменение энергии основного состояния, отнесенное к площади поверхности, имеет вид $\Delta E_0/A = \Delta_C \hbar c L^{-3}$, где Δ_C – безразмерное число, называемое амплитудой Казимира. Эта амплитуда не зависит от микроскопических деталей, т.е. универсальна. Соответствующая сила Казимира, отнесенная к площади поверхности, имеет вид

$$\frac{\mathcal{F}_C(L)}{A} = -\frac{\partial E_0/A}{\partial L} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 L^4} = -\frac{0.013001255 \dots \text{дин}}{(L/\text{мкм})^4} \frac{\text{см}^2}{\text{см}^2} \quad (2)$$

и зависит от общих характеристик, таких как размерность пространства (здесь равная 3), дисперсионное соотношение для электромагнитных волн и геометрические соотношения. Эта сила мала, если только расстояние, разделяющее пластины, не станет меньше нескольких микрон. Так как в микромеханических и микроэлектро-механических приборах реализуются именно такие малые расстояния, силы Казимира представляют интерес с точки зрения технологии, и им надо уделять соответствующее внимание [3]. Исчерпывающее описание теории сил Казимира и способов их измерения, а также обширную библиографию можно найти в монографии [4].

Тридцать лет спустя после пионерской работы Казимира [2] в работе [5] было показано, что вблизи критических точек длинноволновые низкоэнергетические классические тепловые флуктуации систем могут генерировать подобные эффективные силы между макроскопическими объектами (пластинами и стенками контейнеров), погруженными в эти системы. Эти критические силы Казимира (КСК) стали предметом серьезных исследований в последние 25 лет. Ранние попытки определить эти силы сводились к получению косвенного подтверждения действия этих сил в смачивающих пленках [6]–[10]. Позже группа Бечингера провела прямые измерения КСК между стенкой и коллоидными частицами в смеси бинарных жидкостей вблизи точек их полного смешивания [11]–[13].

Так же как и квантово-электродинамические силы Казимира (КЭДСК), КСК обладают универсальными свойствами. Они зависят от общих характеристик среды, в которой они возникают, а именно от класса универсальности соответствующего объемного критического поведения (скейлинга), от общих характеристик погруженных макроскопических объектов или стенок, которые обычно представляются в виде макроскопических граничных условий в теории поля сплошной среды, и от геометрии. Несмотря на очевидную аналогию между КЭДСК и КСК, между ними существует ряд значительных различий. Хотя они уже и были ранее отмечены (см., например, [14]–[17]), эти различия не всегда в должной мере учитываются. Первое очевидное различие состоит в том, что КСК генерируются скорее тепловыми, чем квантовыми флуктуациями. Квантовые флуктуации не вносят вклада в главные члены асимптотик на больших расстояниях, если только не имеются в виду флуктуационно-индуцированные силы вблизи квантовых критических точек [18].

Другое важное отличие состоит в следующем: универсальные свойства КЭДСК обычно можно моделировать с помощью теории эффективного свободного поля, в которой взаимодействие электромагнитных полей с макроскопическими объектами (металлическими пластинами) учитывается в граничных условиях. Однако в случае КСК обычно приходится иметь дело с теориями взаимодействующих классических полей, такими как, например, ϕ^4 -теории. Это следует из того, что нужно должным образом описать объемный скейлинг.

Еще одно различие заключается в том, что, в отличие от КЭДСК, КСК обычно не полностью генерируются флуктуациями. Дело в том, что среднее значение параметра порядка ϕ может быть не равно нулю при некоторых геометрических структурах слоя: в случае низкотемпературного режима (если система имеет дальний порядок) или даже в общем случае при всех температурах, как в случае классических жидкостей и газов и смесей бинарных жидкостей из-за явного нарушения $\phi \rightarrow -\phi$ симметрии граничных полей [19], [20]. Если $\langle \phi \rangle \neq 0$, то это среднее значение реагирует на изменения расстояния между граничными плоскостями, таким образом создавая некоторую эффективную силу даже в теории Ландау. В таком случае КСК складывается из нефлуктуационного фона и флуктуационно-индуцированных вкладов.

В настоящей работе основное внимание уделяется случаю КСК в системах, скейлинг которых можно описать с помощью $O(n)$ -инвариантного гамильтониана. Эта задача привлекла наше внимание по нескольким причинам. Во-первых, случай $O(2)$ имеет прямое отношение к экспериментам, в которых КСК измеряется в ^4He вблизи

λ -перехода в сверхтекучее состояние, вызванного истончением смачивающих пленок [6], [8]. Во-вторых, мы считаем, что эта задача является более близким аналогом случая КЭДСК, чем исследование смесей бинарных жидкостей, потому что профиль параметра порядка $\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle$ для атома ^4He равен нулю при всех температурах $T > 0$, тогда как толщина слоя L конечна. В-третьих, мы считаем, что эта сложная задача имеет фундаментальное значение. На самом деле сложность этой задачи состоит в том, что проблемы, возникающие при ее решении, сильно отличаются от тех, с которыми обычно приходится иметь дело при изучении КСК в системах со свободными границами, а именно необходимо одновременно рассматривать объемный и поверхностный скейлинги, а также конечно-размерный скейлинг. Дополнительная трудность, с которой приходится иметь дело в случае трехмерных слоев с $O(n)$ -симметричным гамильтонианом, – это своеобразный размерный кроссовер от объемной трехмерной системы ($L = \infty$) с дальним порядком при низких температурах к слою $L < \infty$ без дальнего порядка при всех температурах $T > 0$ [16], [17], [21].

Цель настоящей работы – объяснить постановку этих задач и показать, как можно решать все эти задачи, применяя один и тот же подход, а именно: как получить точное решение при $n \rightarrow \infty$. В работе проанализировано, почему получить решения при $n = \infty$ для скейлинговых функций избыточной свободной энергии и КСК при свободных граничных условиях (СГУ) значительно труднее, чем получить их аналоги при периодических граничных условиях (ПГУ); также показано, что поведение решений при СГУ и ПГУ качественно и количественно различаются.

Статья построена следующим образом. Сначала вводится $O(n)$ - ϕ^4 -модель для слоя, определяются граничные условия и обсуждается ее фазовая диаграмма. Затем описаны точные решения модели при $n \rightarrow \infty$ в терминах собственных значений и собственных состояний самосогласованного одномерного уравнения Шредингера.

2. МОДЕЛЬ, ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

2.1. Гамильтониан и граничные условия. Рассмотрим модель, задаваемую редуцированным гамильтонианом

$$\mathcal{H}[\phi] = \int_{\mathfrak{V}} d^d r \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{\overset{\circ}{c}}{2} \phi^2 + \frac{g}{4!n} \phi^4 \right] + \frac{\overset{\circ}{c}}{2} \int_{\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2} d^{d-1} y \phi^2, \quad (3)$$

где $\phi(\mathbf{r}) = (\phi_\alpha(\mathbf{r}))$, $\alpha = 1, \dots, n$, – действительное n -компонентное поле параметра порядка, заданное на d -мерном слое $\mathfrak{V} = \mathbb{R}^{d-1} \times [0, L]$. Запишем радиус-вектор в виде $\mathbf{r} = (\mathbf{y}, z)$, где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$ – координаты, параллельные граничным плоскостям, а $z \in [0, L]$ – координата, перпендикулярная граничным плоскостям, при этом $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbf{y}, 0\}$ и $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbf{y}, L\}$ соответственно. Здесь $(\nabla \phi)^2$ – краткое обозначение суммы $\sum_\alpha (\nabla \phi_\alpha)^2$, а ϕ^2 – квадрат $\sum_\alpha \phi_\alpha^2$ длины вектора ϕ .

Граничные члены гамильтониана порождают так называемые граничные условия Робина [19], [20], [15]

$$\partial_n \phi = \overset{\circ}{c} \phi, \quad \mathbf{r} \in \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2, \quad (4)$$

где ∂_n – производные вдоль внутренних нормалей. Для простоты рассмотрим случай одинаковых значений величины $\overset{\circ}{c}$ на обеих граничных плоскостях. Это условие можно легко ослабить, выбирая различные значения $\overset{\circ}{c}_j$ на $\mathfrak{B}_j$ [14], [15], [17], [21],

но здесь это не требуется, так как рассматривается случай, когда асимптотика на больших расстояниях определяется неподвижной точкой, соответствующей граничным условиям Дирихле на обеих плоскостях $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$; этот случай можно изучать, положив $\mathring{c} = \infty$ [14], [15], [19], [20].

Модель с ПГУ в направлении оси z ,

$$\phi(\mathbf{y}, L) = \phi(\mathbf{y}, 0), \quad (5)$$

определяется аналогично; в выражении (3) нет граничного члена, содержащего $\int_{\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2}$, поскольку в этом случае нет границ.

2.2. Замечания об УФ-особенностях и проблемах перенормировки. Мы будем рассматривать данные модели при $2 < d < 4$. Основное внимание уделим трехмерному случаю $d = 3$. При $d < 4$ эти модели оказываются суперперенормируемыми. УФ-расходимости в многоточечных кумулянтах можно устранить введением перенормированных величин

$$\tau = \mathring{\tau} - \mathring{\tau}_c \quad (6)$$

и (только для СГУ)

$$c = \mathring{c} - \mathring{c}_{\text{sp}}, \quad (7)$$

где УФ-расходящиеся параметры $\mathring{\tau}_c$ и $\mathring{c}_{\text{sp}}$ задают положение критической точки.

Если регуляризация проводится с помощью обрезания при больших значениях импульса Λ , эти сдвиги меняются как $\mathring{\tau}_c \sim \Lambda^{d-2}$ и $\mathring{c}_{\text{sp}} \sim \Lambda^{d-3}$. При $d = 4$ появляются дополнительные (логарифмические) УФ-особенности, что приводит к дальнейшим перепараметризациям. Заинтересованный читатель найдет подробное изложение этого предмета и того, как можно перенормировать $(4 - \epsilon)$ -мерную теорию, в обзорных статьях [19], [20] и оригинальных статьях [14], [15], [22]–[25]. Так как мы ограничиваемся случаем $2 < d < 4$, здесь эта проблема не возникает. Однако объемная и поверхностная свободные энергии требуют вычитания аддитивных контрчленов для компенсации их УФ-особенностей даже в случае $d < 4$. Мы ограничиваемся только отдельными замечаниями, а в некоторых случаях даем ссылки на более подробное изложение в соответствующей литературе.

2.3. Объемная, поверхностная, избыточная и остаточная свободные энергии. Чтобы такие величины, как свободные энергии и статистическая сумма, были вполне определенными, требуется регуляризация их УФ-особенностей, поэтому мы формально определим статистическую сумму через функциональный интеграл

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\phi] e^{-\mathcal{H}[\phi]}$$

и удельную свободную энергию $-A^{-1}n^{-1} \ln \mathcal{Z}$, приведенную относительно площади поверхности $A = \int d^{d-1}y \rightarrow \infty$ и числа компонент. Найдем предел при $n \rightarrow \infty$ плотности свободной энергии (относительно площади) f_L , плотность объемной сво-

Рис. 1. Конечно-размерная фазовая диаграмма при $d = 3$. Объемная критическая точка (ОКТ) отделяет низкотемпературную фазу с объемным дальним порядком от разупорядоченной высокотемпературной объемной фазы. Линии $L = \pm|m|$ – это линии кроссовера.

бодной энергии f_b , плотность избыточной свободной энергии f_{ex} , поверхностную свободную энергию f_s и избыточную свободную энергию f_{res} :

$$f_L = - \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{Z}}{nA}, \quad (8)$$

$$f_b = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{f_L}{L}, \quad (9)$$

$$f_{ex}(L) \equiv f_L - Lf_b, \quad (10)$$

$$f_s = \frac{f_{ex}(\infty)}{2}, \quad (11)$$

$$f_{res}(L) = f_{ex}(L) - 2f_s. \quad (12)$$

Объемная свободная энергия f_b не зависит от граничных условий (ПГУ или СГУ). Другие четыре свободные энергии различаются при ПГУ и СГУ. А именно, f_s^{FBC} , f_{ex}^{FBC} и $f_{res}^{\text{FBC}}(L)$ также зависят от константы поверхностного взаимодействия $\hat{c}$, тогда как $f_s^{\text{PBC}} \equiv 0$.

2.4. Конечно-размерная фазовая диаграмма при $d = 3$. Гамильтониан (3) в $O(n)$ - ϕ^4 -теории инвариантен относительно непрерывной $O(n)$ -симметрии. Из теоремы Мермина–Вагнера [26] следует, что такая симметрия не может спонтанно нарушаться при любой температуре $T > 0$ в объемных системах с близкодействием при $d \leq 2$. Однако при $d > 2$ фаза с объемным дальним порядком существует при температурах ниже критической $T_c > 0$. Из строгих обобщений теоремы Мермина–Вагнера следует, что классический ферромагнетик в $O(n)$ -моделях на сетях не может спонтанно намагничиваться при любой температуре $T > 0$, если случайные блуждания на этой структуре имеют рекуррентный характер, т. е. возвращаются к своей исходной точке с вероятностью единица [27]. Так как в трехмерном прямоугольном кубоиде с площадью поперечного сечения $A = \infty$ и конечной толщины L случайные блуждания рекуррентны, фаза с объемным дальним порядком невозможна в случае $d = 3$ при любой температуре $T > 0$ и при $L < \infty$. Следовательно, при $d = 3$ мы имеем конечно-размерную фазовую диаграмму, представленную на рис. 1, она не зависит от выбранных граничных условий (ПГУ или СГУ).

Низкотемпературная и разупорядоченная высокотемпературная объемные фазы с дальним порядком находятся на линии $1/L = 0$. Определим температурную переменную

$$m = \frac{\text{sgn}(t)}{\xi_b(|t|)} \simeq \frac{\text{sgn}(t)|t|^\nu}{\xi_b^{(+)}}, \quad (13)$$

где $\xi_b^{(+)}$ – амплитуда объемной корреляционной длины $\xi_b \simeq \xi_b^{(+)} t^\nu$ в разупорядоченной ($t > 0$) фазе и $\nu = (d-2)^{-1}|_{d=3} = 1$ при $n = \infty$.

Линии $L^{-1} = \pm m$ – это линии конечно-размерного кроссовера: в масштабах $|m|^{-1} \gtrsim L$ система больше не демонстрирует трехмерное объемное поведение, а становится существенно двумерной системой. В случае СГУ, когда нарушается трансляционная инвариантность вдоль оси z , длина $|m|^{-1}$ также характеризует толщину граничных областей, внутри которых локальные плотности при $z \lesssim |m|^{-1} \ll L/2$ и $L - z \lesssim |m|^{-1} \ll L$ отклоняются от своих объемных значений, которых они достигают в пределах $z, L \rightarrow \infty$ для $z < L/2$ и $L - z, L \rightarrow \infty$ для $L - z < L/2$. Объемное поведение достигается экспоненциально по L при $m > 0$. Таким образом, в случае СГУ отклонения локальных плотностей от объемных значений меняются как $\sim e^{-2zm+O(\ln zm)}$ при $z, L \rightarrow \infty$ для $0 < m^{-1} \ll z \ll L/2$. Кроме того, избыточные величины, которые стремятся к нулю в пределе $L \rightarrow \infty$, как f_{ex} , затухают в случае СГУ, как $e^{-2mL+O(\ln mL)}$ при больших L . Появление множителя 2 в обеих экспоненциальных формах можно объяснить с помощью теории возмущений, а именно: возмущение, вызванное присутствием свободной поверхности при $z = 0$, дает вклады в свободную двухточечную функцию, зависящую от расстояния $2z$ от одной из ее точек $\mathbf{r} = (\mathbf{y}, z)$ до точки образа $(\mathbf{y}, -z)$. В случае ПГУ (отсутствие границ) имеем $f_{\text{ex}} \sim e^{-mL+O(\ln mL)}$.

При $m < 0$ объемный дальний порядок существует при $d \geq 3$. Благодаря спонтанному нарушению $O(n)$ -симметрии корреляции затухают алгебраически, а не экспоненциально быстро, так что обычные определения корреляционной длины в данном случае неприменимы [28]. Можно определить соответствующую длину когерентности (или длину спиральности ξ_{hel}), характеризующую асимптотическое затухание объемной корреляционной функции $\langle \phi(\mathbf{r}) \cdot \phi(\mathbf{0}) \rangle$, через обычный модуль спиральности $\Upsilon(T)$ как $\xi_{\text{hel}} = [(k_B T / \Upsilon(T))^{1/(d-2)}]$. Так как $\Upsilon \sim |m|^{\nu(d-2)}$ при $m \rightarrow 0-$ для $2 < d < 4$, эта длина спиральности (или джозефсоновская длина когерентности) меняется в этом пределе как $\xi_{\text{hel}} \sim |m|^{-\nu}$ при $\nu|_{n=\infty} = (d-2)^{-1}$. А именно, при $d = 3$ температурная переменная $|m|$ соответствует $1/\xi_{\text{hel}}$ (с точностью до нормирующего множителя).

Длина ξ_{hel} играет роль, аналогичную ξ_+ при $t > 0$, а именно: если она становится сравнимой с L , то становятся существенными поправки, обусловленные конечно-размерными эффектами, и в случае СГУ она характеризует толщину граничных областей $z \lesssim \xi_{\text{hel}} \ll L$ и $L - z \lesssim \xi_{\text{hel}} \ll L$.

3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ ПРИ $n \rightarrow \infty$

3.1. Самосогласованные уравнения при $n = \infty$. Существуют разные методы вывода уравнений, которые надо решить, чтобы получить точное решение нашей модели при $n \rightarrow \infty$ (см., например, [29], [30]). Один из таких методов – это преобразование Хаббарда–Стратоновича

$$e^{-g\phi^4/4!n} \propto \int_{-\infty}^{\infty} d\psi e^{\phi^2 i\psi/2 - 3n\psi^2/2g}, \quad (14)$$

из которого следует, что модель в пределе больших n эквивалентна n экземплярам гауссовой модели со связью с однокомпонентным полем $\Phi(\mathbf{r})$ (представляющим одну из компонент ϕ_α), и нужно учитывать граничные условия (4) или (5). Эта гауссова модель имеет эффективный гамильтониан

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}[\Phi, \psi] = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{V}} d^d r \left[\Phi(-\nabla^2 + \overset{\circ}{\tau} + i\psi)\Phi + \frac{3n}{g} \psi^2 \right], \quad (15)$$

где $\psi(\mathbf{r})$ – некоторое вспомогательное поле. В пределе $n \rightarrow \infty$ ψ -интегрирование сводится к вычислению величины подынтегрального выражения в точке перевала. В отличие от случая ПГУ, эта точка перевала зависит от z , так как трансляционная инвариантность нарушается вдоль оси z . Запишем уравнение для точки перевала

$$i\psi(z) = v(z) - \overset{\circ}{\tau}, \quad (16)$$

из которого следует, что свободную энергию f_L можно представить как

$$f_L = \frac{1}{2} (2\pi)^{-(d-1)} \int d^{d-1} p \sum_{\nu} \ln(p^2 + \varepsilon_{\nu}) - \frac{3}{2g} \int_0^L dz [\overset{\circ}{\tau} - v(z)]^2, \quad (17)$$

т.е. выразить через собственные значения ε_{ν} и собственные функции $\varphi_{\nu}(z)$, $\nu = 1, 2, \dots$, самосопряженного уравнения Шредингера

$$[-\partial_z^2 + v(z)]\varphi_{\nu}(z) = \varepsilon_{\nu}\varphi_{\nu}(z) \quad (18)$$

при условии самосопряжения

$$\overset{\circ}{\tau} - v(z) = \bigcirc = -\frac{g}{6} (2\pi)^{-(d-1)} \int d^{d-1} p \sum_{\nu} \frac{|\varphi_{\nu}(z)|^2}{\mathbf{p}^2 + \varepsilon_{\nu}}, \quad (19)$$

где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{d-1}$ – волновой вектор, сопряженный вектору $\mathbf{y}$.

Эти уравнения записаны в неявном предположении, что дальний порядок отсутствует, так что $\langle \Phi(\mathbf{r}) \rangle = 0$. В полубесконечном случае $L = \infty$ дальний порядок появляется при $d > 2$ всякий раз, когда значение $\overset{\circ}{\tau}$ оказывается меньше объемной критической величины $\overset{\circ}{\tau}_c = -(g/6)(2\pi)^{-d} \int d^d q q^{-2}$. Однако при $d > 3$ поверхность может упорядочиваться при $\overset{\circ}{\tau} > \overset{\circ}{\tau}_c$, если $\overset{\circ}{\tau}$ превышает отрицательное пороговое значение $\overset{\circ}{\tau}_{\text{сп}}$. Мы не будем рассматривать последний случай, а предположим, что $\overset{\circ}{\tau}$ достаточно велико, так что профиль параметра порядка $\langle \Phi(\mathbf{r}) \rangle$ убывает при всех значениях $\overset{\circ}{\tau}$ или при всех $\overset{\circ}{\tau} \geq \overset{\circ}{\tau}_c$ в зависимости от того, какое из условий $L < \infty$ или $L = \infty$ выполняется.

3.2. Скейлинговые формы. Как в случае ПГУ, так и в случае СГУ будем искать решения уравнения (19) на больших масштабах в масштабно-инвариантном виде и с их помощью определим скейлинговые формы избыточной свободной энергии f_{res} и силу Казимира $\mathcal{F}_C$ при $L \rightarrow \infty$, $m \rightarrow 0$ и при фиксированном $x \equiv mL$. Так как потенциал $v(z)$ соответствует плотности энергии в масштабах $m^{d-1/\nu} = m^2$ (при $n = \infty$), имеем

$$v(z; L, m) = m^2 v(|m|z; |m|L, \pm 1) = \frac{v(z/L; 1, mL)}{L^2} = \frac{v(1; L/z, mz)}{z^2} \quad (20)$$

в случае СГУ. В случае ПГУ зависимость от z исчезает и остаются только первые два уравнения, в которых отсутствуют первые (относящиеся к z) аргументы потенциала v .

Избыточная свободная энергия и сила Казимира принимают скейлинговую форму

$$\begin{aligned} f_{\text{res}}(L, m) &\simeq L^{-(d-1)}\Theta(mL), \\ \mathcal{F}_C(L, m) &\simeq L^{-d}\vartheta(mL), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\vartheta(x) = (d-1)\Theta(x) - x\Theta'(x); \quad (22)$$

здесь Θ и ϑ – универсальные функции, зависящие от d и граничных условий.

3.3. Точные решения при $n = \infty$ в случае периодических граничных условий. Из независимости потенциала $v^{\text{PBC}}(L, m)$ от z в случае ПГУ следует, что соответствующие собственные значения и собственные функции определяются точно: $\varepsilon_\nu^{\text{PBC}} = v^{\text{PBC}} + k_\nu^2$ и $\varphi_\nu^{\text{PBC}}(z; L, m) = L^{-1/2}e^{ik_\nu z}$ при $k_\nu = 2\pi\nu/L$. Благодаря этому при $d = 3$ масштабированный потенциал и скейлинговые функции можно определить в замкнутой форме [31]–[33]. Имеем

$$\check{v}(x) \equiv v^{\text{PBC}}(L, m) \Big|_{\substack{L=1, \\ m=x}} \stackrel{d=3}{=} \left[2 \operatorname{arcsch} \frac{e^x}{2} \right]^2 \quad (23)$$

и

$$\Theta(x) \stackrel{d=3}{=} -\frac{8\pi^2 x^3}{3}\theta(x) + Q[\sqrt{\check{v}(x)}] - \frac{\check{v}(x)}{12\pi} + \frac{x\check{v}(x)}{2}, \quad (24)$$

где

$$Q(y) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{y^2}^{\infty} dt \ln[1 - e^{-\sqrt{t}}] = -\frac{1}{2\pi} [\operatorname{Li}_3(e^{-y}) + y \operatorname{Li}_2(e^{-y})], \quad (25)$$

$\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\operatorname{Li}_s(x)$ – полилогарифм. Скейлинговые функции $\Theta^{\text{PBC}}(x)$ и $\vartheta^{\text{PBC}}(x)/2$ при $d = 3$ показаны на рис. 2.

Эти функции отрицательные и монотонно убывают при всех x . Их значение

$$\Delta_C^{\text{PBC}} \equiv \Theta_{d=3}^{\text{PBC}}(0) = \frac{1}{2}\vartheta_{d=3}^{\text{PBC}}(0) = -\frac{2\zeta(3)}{5\pi} = -0.1530506\dots \quad (26)$$

при T_c определяет так называемую амплитуду Казимира Δ_C . Величина насыщения при $x \rightarrow -\infty$

$$\Delta_{G,C}^{\text{PBC}} = \Theta_{d=3}^{\text{PBC}}(-\infty) = \frac{1}{2}\vartheta_{d=3}^{\text{PBC}}(-\infty) = -\frac{\zeta(3)}{2\pi} = -0.191313298\dots \quad (27)$$

определяет соответствующую амплитуду в теории безмассового скалярного свободного поля.

3.4. Общие характеристики скейлинговых функций в случае свободных граничных условий. Поведение функций $\Theta(x) \equiv \Theta^{\text{FBC}}(x)$ и $\vartheta(x) \equiv \vartheta^{\text{FBC}}(x)$ качественно и количественно отличается от поведения их аналогов в случае ПГУ. Впервые этот факт был обнаружен экспериментально при изучении истончения смазывающих пленок ^4He , адсорбированных на медных подложках, при значениях термодинамических параметров, соответствующих λ -переходу из нормального состояния в сверхтекучее, и при более низких температурах [6], [8]. Скейлинговая функция $\vartheta_{^4\text{He}}(x)$, построенная по данным этих экспериментов, оказалась отрицательно

Рис. 2. Скейлинговые функции $\Theta(x)$ и $\vartheta(x)/2$ при $(d, n) = (3, \infty)$ и ПГУ.

определенной при всех x , как и функция $\vartheta^{\text{PBC}}(x)$ при $n = \infty$, представленная на рис. 2. Однако, в отличие от последней функции, она не убывает монотонно от $\vartheta(\infty) = 0$ до своего предельного значения $\vartheta(-\infty)$ при $x \rightarrow -\infty$, а проходит через минимум при $x < 0$ и затем оказывается монотонно возрастающей до предельного значения $\vartheta(-\infty) < 0$ при дальнейшем возрастании x . Такое поведение может быть подтверждено вычислениями методом Монте-Карло для ХУ-модели на пленке размерности $d = 3$ в случае СГУ вдоль короткого направления [34]–[37]. Хотя эти результаты, полученные в экспериментах и при моделировании, относятся к случаю $n = 2$ для ^4He , есть основания полагать, что скейлинговая ($n = \infty$)-функция $\vartheta^{\text{FBC}}(x)$ должна иметь следующее качественное поведение: 1) должна быть отрицательно определенной при всех x ; 2) должна иметь четко выраженный гладкий минимум при некотором $x_{\min} < 0$; 3) должна монотонно приближаться к предельному значению $\vartheta(-\infty) < 0$. С другой стороны, случай $n = 2$ (для ^4He) отличается тем, что переход Костерлица–Таулеса происходит слева от точки минимума. Это было установлено при моделировании методом Монте-Карло [37], [38], но едва ли может как-то проявиться в поведении функции $\vartheta_{n=2}^{\text{FBC}}(x)$.

Главная проблема состоит в определении скейлинговых функций $\vartheta^{\text{FBC}}(x)$ и $\Theta^{\text{FBC}}(x)$ при всех x с помощью одной и той же аппроксимационной схемы так, чтобы все их важные свойства, перечисленные выше, были бы определены правильно, по крайней мере с качественной точки зрения. Оказалось, что подходы с использованием пертурбативной ренормгруппы, основанные на применении ϵ -разложения около верхней критической размерности $d^* = 4$, дают приемлемые результаты для разупорядоченной фазы $x > 0$ [14], [15], [39], [40], но обычно не могут должным образом описать размерные кроссоверы. Таким образом, ϵ -разложение не может применяться при $L < \infty$ около критической или псевдокритической точки пленки [14], [41]–[43]. В случае ПГУ теория Ландау ошибочно предсказывает существование критической точки пленки непосредственно в T_c . Следовательно, ϵ -разложение неприменимо при T_c [41]. Согласно теории Ландау в случае СГУ пленка становится критической при некоторой температуре $T_{c,L} < T_c$, зависящей от L и $\hat{c}$. Можно положить $\hat{c} = \infty$,

Рис. 3. Скейлинговая функция $\vartheta_{\text{mf}}^{\text{FBC}}(x)$ в теории среднего поля в случае свободных граничных условий. Согласно работе [44] ее амплитуда нормализована так, чтобы величина ее минимума при $x_{\text{min}} = -\pi^2$ была равна -1 . При $x > 0$ эта функция обращается в нуль.

выбрав граничные условия Дирихле. Тогда критическая точка пленки имеет место при $\overset{\circ}{\tau} - \overset{\circ}{\tau}_c = -(\pi/L)^2$, где собственное число ε_1 низшей моды обращается в нуль.

Скейлинговая функция $\vartheta_{\text{mf}}^{\text{FBC}}(x)$ в рамках теории среднего поля (теория Ландау) была точно определена в работах [44], [45]; ее график представлен на рис. 3.

Критическая температура пленки $T_{c,L}$ определяет положение минимума функции $\vartheta_{\text{mf}}^{\text{FBC}}(x)$. Так как $(\epsilon = 4 - d)$ -разложение основано на разложении в соответствии с теорией Ландау, то ясно, что, даже если критическая точка существует при $T > 0$ и $L < \infty$ (как это имеет место в случае $n = 1$), вблизи этой точки должен иметь место кроссовер к эффективно $(d - 1)$ -мерному поведению на больших расстояниях. Описание этого кроссовера методом ϵ -разложения представляется весьма затруднительным. При $n \geq 2$ ситуация будет хуже, так как при $d \leq 3$ дальний порядок отсутствует при всех $T > 0$ и $L < \infty$. Предсказания теории Ландау качественно неверны не только в том, что она предсказывает резкий переход при $T_{c,L} > 0$ для $L < \infty$, когда $n \geq 2$ и $d \leq 3$. Эти предсказания также противоречат другим важным качественным свойствам функции $\vartheta_{\text{mf}}^{\text{FBC}}(x)$, которые были перечислены выше. В отличие от последней функции, функция $\vartheta_{\text{mf}}^{\text{FBC}}(x)$ не является непрерывно дифференцируемой в окрестности минимума. Точнее, ее производная имеет разрыв в точке x_{min} . Более того, $\vartheta_{\text{mf}}^{\text{FBC}}(x)$ обращается в нуль при $x \rightarrow -\infty$, вместо того чтобы стремиться к некоторой отрицательной величине. Дело в том, что теория Ландау игнорирует эффекты флуктуации, обусловленные голдстоуновскими модами, при масштабах $|m|^{-1} \lesssim L$. Поэтому теория Ландау не может предсказать отсутствие дальнего порядка при $T > 0$ и $L < \infty$ в случае непрерывной симметрии при $n \geq 2$, когда $d \leq 2$. С другой стороны, предел $n \rightarrow \infty$ соответствует теореме Мермина–Вагнера [26], [27], таким образом обеспечивая некоторый механизм непертурбативного генерирования массы.

К сожалению, нелегко получить точную аналитическую информацию о потенциале $v(z) \equiv v^{\text{FBC}}(z)$ и скейлинговых функциях $\Theta^{\text{FBC}}(x)$ и $\vartheta^{\text{FBC}}(x)$ для общих

значений m и L , даже при $d = 3$. Дело в том, что функция $v(z)$ зависит от z . Соответственно, спектр $\{\varepsilon_\nu\}$ и собственные функции уравнения (18) в общем случае заранее не известны, а должны определяться из уравнения (18), которое нужно решать совместно с уравнением (19), чтобы получить $v(z)$. А все это вместе – довольно трудная задача.

Скейлинговое решение $v(z)$ этих уравнений в замкнутом аналитическом виде при конечном L неизвестно даже в критической точке T_c . Информация о потенциале $v(z)$ может быть получена различными способами. Для этой цели были использованы, в частности, такие методы, как: 1) непосредственное решение задачи при $m = 0$ и $L = \infty$ [46]; 2) граничные и локальные операторные разложения [47]; 3) численные решения [16], [17], [48], [49]; 4) метод обратной задачи рассеяния [21]; 5) формулы следов; 6) преобразование модели при больших $-x$ в нелинейную сигма-модель [16], [17]; 7) квазиклассические разложения [21]. Ниже мы приведем краткий обзор точных результатов, полученных этими методами; особое внимание уделяется случаю $d = 3$, если не оговорено иное.

4. ОБЗОР ТОЧНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИ $n = \infty$ В СЛУЧАЕ СГУ

Точные скейлинговые решения в полубесконечном критическом случае $(m, L) = (0, \infty)$ при $2 < d < 4$ были получены в работе [46]. Авторы использовали анзац $v(z) = Az^{-2}$, получили решение уравнения (18), выраженное через функции Бесселя, на полупрямой $z \geq 0$ с граничным условием, что собственные функции меняются, как $\sim z^{(1+\sqrt{1+4A})/2}$, при $z \rightarrow 0$, и определили коэффициент A из условия самосогласования (19):

$$v(z; \infty, 0) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(d-3)^2 - 1}{4z^2}, & 2 < d < 4, \\ \frac{(5-d)^2 - 1}{4z^2}, & 3 < d < 4, \end{array} \right\} \stackrel{d=3}{=} -\frac{1}{4z^2}. \quad (28)$$

Дополнительное решение, полученное при $3 < d < 4$, относится к так называемому “специальному” поверхностному переходу, при котором переменная $\tilde{c}$ принимает упомянутое выше пороговое значение $\tilde{c}_{sp}$ [19]. При $d = 3$ остается только решение, соответствующее так называемому “обычному” поверхностному переходу. Эти результаты согласуются со скейлинговой формой в правой части уравнения (20); отсюда следует, что нужно рассматривать потенциалы, сингулярные на границе. Поскольку при общих значениях L и m поведение потенциала вблизи границы (асимптотики) при $z \rightarrow 0+$ и $z \rightarrow L-$ должно согласовываться с уравнением (28), потенциал $v(z)$ сингулярен на обеих граничных плоскостях. В частности, при $d = 3$ должны выполняться соотношения

$$v(z; L, m) \simeq -\frac{1}{4} \begin{cases} z^{-2}, & z \rightarrow 0+, \\ (L-z)^{-2}, & z \rightarrow L-. \end{cases} \quad (29)$$

Ситуация с операторами Шредингера с сингулярными потенциалами весьма тонкая, так как неясно, существуют ли их самосопряженные продолжения и какое граничное условие нужно налагать на волновые функции (см., например, [50]). Ранние

исследования этого вопроса можно найти в работах [51], [52]. В учебнике [52] радиальное уравнение Шредингера $aR'' + 2/rR - v(r)R = \varepsilon R$ рассматривается с потенциалом $-\gamma/r^2$. Значение $\gamma = 1/4$, которое, как следует из уравнения (28), имеет место при $d = 3$, оказывается пороговым, а именно: тогда как физически самосопряженные продолжения существуют при $\gamma \geq 1/4$ [53], [54], это не имеет места при $\gamma < 1/4$, где нет никакого приемлемого ограниченного снизу самосопряженного оператора энергии [55].

Зададим две новые скейлинговые функции $\mathcal{V}_+$ и $\mathcal{V}_-$, индекс $\pm$ в которых определяется знаком параметра $m \geq 0$, следующим соотношением:

$$v(z; L, m) = z^{-2}\mathcal{V}_{\pm}(z/L, |m|z). \quad (30)$$

Информацию об асимптотическом поведении $\mathcal{V}_{\pm}(\mathfrak{z}, z)$ при $\mathfrak{z} \rightarrow 0$ можно получить с помощью граничного операторного разложения, используя тот факт, что вклад компоненты T_{zz} тензора напряжений дает главную поправку при малых $\mathfrak{z}$ [47]. При $d = 3$ имеем

$$\mathcal{V}_{\pm}(\mathfrak{z}, z) \underset{\zeta \ll 1}{=} A_{\pm}(z) + \mathfrak{z}^3 B_{\pm}(z) + \dots, \quad (31)$$

где функции $A_{\pm}(z)$ и $B_{\pm}(z)$ имеют известные асимптотики:

$$A_{\pm}(z) \underset{z \ll 1}{=} -\frac{1}{4} \pm \frac{4z}{\pi^2} + \frac{56\zeta(3)z^2}{\pi^4} + o(z^2), \quad (32)$$

$$B_{\pm}(z) \underset{z \ll 1}{=} \frac{256\Delta_C}{\pi} + O(z). \quad (33)$$

Первый член в правой части формулы (32) был получен в работе [46], второй член был получен в работе [47] с помощью подходящим образом выбранного продолжения прямого решения. Третий член был получен в работе [21], где теория обратной задачи рассеяния применялась совместно с формулой следа [54]. Наконец, слагаемое $B_{\pm}(0)$ в формуле (33) было получено в работе [47] с помощью граничного и локального операторных разложений совместно с результатами, полученными в работах [56] и [57]. Точное аналитическое значение амплитуды Казимира, содержащейся в нем, остается неизвестным. Однако численные исследования [16], [17] дали высокоточный результат

$$\Delta_C = -0.01077340685024782(1). \quad (34)$$

Чтобы достичь такой точности, необходимо хорошо понимать и контролировать поправки к скейлингу. При $d = 3$ появляются аномальные поправки $\sim L^{-1} \ln L$, поскольку объемный поправочный к скейлингу индекс $\omega|_{n=\infty} = 4 - d$ оказывается вырожденным вместе с поверхностным поправочным к скейлингу индексом $d - (d - 1) = 1$, который соответствует граничному оператору T_{zz} [16], [17], [20], [58]. Поправки к скейлингу можно частично подавить, переходя к пределу при $g \rightarrow \infty$ и таким образом сводя модель к сферической модели, рассмотренной в работе [49] с отдельными ограничениями на плотность энергии для каждого слоя z [48]. Оставшиеся поправки к скейлингу можно значительно уменьшить, заменив L эффективной толщиной L_{eff} .

В работах [16], [17] путем численного решения уравнений (18) и (19) были получены значения $v(z; L, m)$, собственные значения ε_{ν} и собственные функции для

разных $m \gtrless 0$ и L , последующий анализ которых позволил определить скейлинговые функции $\Theta^{\text{FBC}}(x)$ и $\vartheta^{\text{FBC}}(x)$. Полученные результаты отражают все важные качественные свойства, известные для случая ${}^4\text{He}$. Мы здесь не приводим эти результаты и отсылаем заинтересованного читателя к оригинальным статьям. Вместо этого приведем некоторые дополнительные точные результаты и дадим краткое описание того, как эти результаты были получены.

Одним из продуктивных методов является использование метода обратной задачи рассеяния. Напомним, что эта теория позволяет восстановить потенциал по данным рассеяния или по спектральным данным. Более точно, рассмотрим полубесконечный случай $L = \infty$. Вычтем из потенциалов $v(z; \infty, \pm|m|)$ их объемное значение $\theta(m)m^2$, чтобы получить потенциалы $v(z; \infty, \pm 1) - m^2 \theta(m)$, обращающиеся в нуль при $z \rightarrow \infty$, и затем нормировать m на единицу, вводя $z = z|m|$ и перемасштабированное волновое число $k = k/|m|$. Можно построить два решения Йоста для уравнения Штурма–Лиувилля, соответствующего уравнению (18), с предельным поведением (асимптотикой) $f(z, \pm k) \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} e^{\pm ikz}$ и затем выбрать линейную комбинацию, т. е. “регулярное решение”, удовлетворяющее граничному условию $\varphi(z, k) = \sqrt{z} [1 + O(z)]$. Его асимптотика

$$\varphi(z, k) \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{A(k)}{k} \sin[kz + \eta(k)], \quad A(k) = e^{\sigma(k)}, \quad (35)$$

определяет амплитуду рассеяния $A(k)$ и фазовый сдвиг $\eta(k)$. В нашем случае эти данные рассеяния различаются при $m = \pm 1$, что отмечено нижними индексами: $A_{\pm}(k)$ и $\eta_{\pm}(sk)$.

Применяя метод обратной задачи рассеяния, нужно преодолеть следующие две трудности. Во-первых, нужно обобщить метод обратной задачи рассеяния на случай потенциалов с сингулярным поведением вида $v(z) \simeq -z^{-2}/4 + v_{-1}z^{-1} + O(1)$. Во-вторых, отсутствуют данные рассеяния для восстановления потенциалов из этих данных. Мы применили следующий прием. Ввели УФ-конечный функционал свободной энергии $f[v]$ такой, что из стационарного уравнения $\delta f[v]/\delta v(z) = 0$ для этого функционала следуют уравнения (19) и (18). Затем рассмотрели вариации $v(z) = v_*(z) + \delta v(z)$ стационарного решения $v_*(z)$, которое выбрали так, чтобы сингулярная часть потенциала $v(z)$ оставалась неизменной. Затем выразили

$$\delta f[v_*, \delta v] = \int_0^\infty dz \frac{\delta v(z) \delta f[v_*]}{\delta v_*(z)}$$

через $\sigma_{\pm}(k)$ и $\delta\eta_{\pm}(k)$, учитывая, что $\delta\sigma_{\pm}(k)$ и $\delta\eta_{\pm}(k)$ связаны соотношениями Крамера–Кронига. Таким образом мы получили интегральное уравнение для $\sigma_{\pm}(k)$, которое мы смогли решить, и получили

$$\begin{aligned} A_+(k) &= \sqrt{\frac{k}{\arctg k}}, & \eta_+(k) &= \int_0^\infty du \frac{2 \arctg(k \operatorname{th} u)}{4u^2 + \pi^2}, \\ A_-(k) &= \frac{|k|}{\sqrt{1 + \pi|k|/2}}, \\ \eta_-(k) &= \operatorname{sgn}(k) \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{Li}_2\left(-\frac{\pi|k|}{2}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{\pi|k|}{2}\right) - \ln\left(\frac{\pi|k|}{2}\right) \ln \frac{2 - \pi|k|}{2 + \pi|k|} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Фазовые сдвиги $\eta_{\pm}(k)$ представлены на рис. 4.

Рис. 4. Фазовые сдвиги $\eta_-(k)$ при $m = -1$ (сплошная кривая) и $\eta_+(k)$ при $m = +1$ (пунктирная кривая) и $m = 0$ (штриховая кривая).

Эти результаты позволяют точно вычислить скейлинговую функцию для поверхностной двухточечной функции. Так как параметр порядка меняется как $\sqrt{z}$ при $z \rightarrow 0$, подходящий граничный оператор, который не обращается в нуль при $z = 0$, можно определить как $\Phi_s(\mathbf{y}) \equiv \lim_{z \rightarrow 0} z^{-1/2} \Phi(\mathbf{y}, z)$. Его корреляционная функция имеет вид

$$\langle \Phi_s(\mathbf{y}) \Phi_s(\mathbf{0}) \rangle = \frac{1}{2\pi y^2} \left\{ \theta(m) e^{-my} + \theta(-m) \left[1 + |m|y + \frac{m^2 y^2}{2} \right] \right\}, \quad (36)$$

тогда как объемная корреляционная функция задается выражением

$$\langle \Phi(\mathbf{y}, \infty) \Phi(\mathbf{0}, \infty) \rangle = \frac{1}{4\pi y} \{ e^{-my} \theta(m) + \theta(-m) [1 + |m|y] \}. \quad (37)$$

Применив метод обратной задачи рассеяния, мы также смогли точно вычислить плотность модифицированной избыточной энергии при $m \leq 0$:

$$\int_0^\infty dz \left[\langle \Phi(\mathbf{y}, z) \rangle^2 - \frac{m^3}{4\pi} \left(1 - \frac{\theta(z|m| - 1)}{2z|m|} \right) \right] = -\frac{1 + \gamma_E + \ln(4/\pi)}{2} \frac{m^2}{4\pi}. \quad (38)$$

Здесь единица в скобках обеспечивает обычное вычитание объемного члена $\langle \Phi(\mathbf{y}, \infty) \rangle^2$. Дополнительное вычитание, соответствующее слагаемому, содержащему $\theta(z|m| - 1)$, необходимо при $d = 3$, так как плотность энергии при $d > 2$ имеет степенной хвост $\sim z^{-(d-2)}|_{d=3} = 1/z$, обусловленный спиновыми волнами [19], [21], [59].

Точные результаты можно также получить для свойств скейлинговых функций $\Theta(x)$ и $\vartheta(x)$. Полная свободная энергия при $L < \infty$ регулярна в точке T_c . Однако избыточная свободная энергия f_{res} содержит вычитания, которые не являются аналитическими в точке T_c . Следовательно, сингулярные члены должны появиться в выражении скейлинговой функции $\Theta(x)$ при малых x , таким образом компенсируя упомянутые выше неаналитические члены. Эти сингулярности имеют вид [47]

$$\Theta(x) - \Delta_C \underset{x \rightarrow 0}{\approx} - \left[\Delta A_0^{(s)} + \frac{x}{48\pi} \right] 2x^2 \theta(x) + \frac{1}{2\pi^3} x^2 \ln|x| + \dots, \quad (39)$$

где многоточием обозначены регулярные члены линейного и высших порядков по x , а $\Delta A_0^{(s)}$ – разность универсальных амплитуд, соответствующая температурной сингулярности функции f_s [21]:

$$\Delta A_0^{(s)} = \int_0^\infty \frac{du}{16\pi} \frac{\operatorname{cth} u - 1/u}{u^2 + \pi^2/4} = \frac{1}{2\pi^3} \sum_{k=1}^\infty \frac{\ln(2k)}{4k^2 - 1} = 0.00944132199 \dots \quad (40)$$

Из уравнения (39) непосредственно следует, что вторая производная функции ϑ имеет точное значение

$$\vartheta_3''(0) = -\pi^{-3}. \quad (41)$$

Гораздо труднее получить асимптотику для $\Theta(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, а именно

$$\Theta(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\simeq} -\frac{\zeta(3)}{16\pi} \left[1 + \frac{d_1 + 2 \ln |x|}{|x|} + o(|x|^{-1}) \right], \quad (42)$$

где

$$d_1 = 2 \left[\gamma_E + \ln \frac{4}{\pi} \right] - 1 - 2 \frac{\zeta'(3)}{\zeta(3)} = 0.967205644660601 \dots \quad (43)$$

Дело в том, что требуется получить асимптотики как вблизи границы, так и во внутренних областях $z < |m|^{-1} < L/2$ и $|m|^{-1} < z < L/2$ соответственно. Это можно сделать, применяя различные квазиклассические разложения в каждой из этих областей и сшивая решения в промежуточных областях [21]. Такая процедура оказалась необходимой, в частности, для определения коэффициента d_1 . В противоположность этому коэффициент при аномальном члене $\sim |x|^{-1} \ln |x|$ можно также определить с помощью отображения рассматриваемой модели на нелинейную сигма-модель [17].

Также можно определить асимптотику скейлинговых форм для собственных значений $\varepsilon_\nu(1, mL) = L^2 \varepsilon_\nu(L, m)$ в пределе $x \equiv mL \rightarrow -\infty$. Имеем [21]

$$\varepsilon_\nu(1, x) \underset{x \rightarrow -\infty}{=} \begin{cases} \frac{e}{\pi} |x| e^{-|x| + o(1/|x|^0)}, & \nu = 1, \\ \frac{1}{\pi^2(\nu-1)^2} \left[1 + \frac{2}{\pi(\nu-1)} \frac{\ln(2|x|)}{|x|} + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right], & \nu > 1. \end{cases} \quad (44)$$

Главные члены соответствуют спектру в теории свободного безмассового поля на слое с граничными условиями Неймана [16], [59]. Предел $\Theta(-\infty) = -\zeta(3)/16\pi$ – это соответствующая амплитуда Казимира.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Скейлинговые функции $\Theta(x)$ и $\vartheta(x)$ избыточной свободной энергии и критической силы Казимира в трехмерном слое качественно различаются в случаях ПГУ и СГУ. В отличие от случая ПГУ, в котором точные аналитические выражения в замкнутой форме известны для этих функций в пределе $n \rightarrow \infty$ при всех значениях x , это не имеет места в случае СГУ, и нужно использовать численные методы для вычисления этих функций при общих значениях $x \in (-\infty, \infty)$. Тем не менее удалось получить множество точных аналитических свойств этих функций, комбинируя различные методы, такие как прямое решение самосогласованного уравнения

Шредингера, граничное и локальное операторные разложения, метод обратной задачи рассеяния, отображение модели на нелинейную сигма-модель, формулы следов и квазиклассические разложения. Эти точные результаты создают полезную базу для оценки точности уже существующих и будущих потенциально возможных численных результатов [16], [17], [48].

Благодарности. Авторы благодарят М. Хасенбуша, А. Хухта и Ф. Шмидта за плодотворное общение.

Список литературы

- [1] P. M. Chaikin, T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [2] H. B. G. Casimir, “On the attraction between two perfectly conducting plates”, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, **51** (1948), 793–795.
- [3] E. Buks, M. L. Roukes, “Stiction, adhesion energy, and the Casimir effect in micromechanical systems”, *Phys. Rev. B*, **63**:3 (2001), 033402, 4 pp.
- [4] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect*, International Series of Monographs on Physics, **145**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2009.
- [5] M. E. Fisher, P.-G. de Gennes, “Phénomènes aux parois dans un mélange binaire critique”, *C. R. Acad. Sci. Paris B*, **287** (1978), 207–209.
- [6] R. Garcia, M. H. W. Chan, “Critical fluctuation-induced thinning of ^4He films near the superfluid transition”, *Phys. Rev. Lett.*, **83**:6 (1999), 1187–1190.
- [7] R. Garcia, M. H. W. Chan, “Critical Casimir effect near the ^3He - ^4He tricritical point”, *Phys. Rev. Lett.*, **88**:8 (2002), 086101, 4 pp.
- [8] A. Ganshin, S. Scheidemantel, R. Garcia, M. H. W. Chan, “Critical Casimir force in ^4He films: confirmation of finite-size scaling”, *Phys. Rev. Lett.*, **97**:7 (2006), 075301, 4 pp.
- [9] S. Rafai, D. Bonn, J. Meunier, “Repulsive and attractive critical Casimir forces”, *Phys. A*, **386**:1 (2007), 31–35.
- [10] M. Fukuto, Y. F. Yano, P. S. Pershan, “Critical Casimir effect in three-dimensional Ising systems: measurements on binary wetting films”, *Phys. Rev. Lett.*, **94**:13 (2005), 135702, 4 pp.
- [11] C. Hertlein, L. Helden, A. Gambassi, S. Dietrich, C. Bechinger, “Direct measurement of critical Casimir forces”, *Nature*, **451** (2008), 172–175.
- [12] A. Gambassi, A. Maciolek, C. Hertlein, U. Nellen, L. Helden, C. Bechinger, S. Dietrich, “Critical Casimir effect in classical binary liquid mixtures”, *Phys. Rev. E*, **80**:6 (2009), 061143, 27 pp.
- [13] A. Gambassi, “The Casimir effect: from quantum to critical fluctuations”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **161**:1 (2009), 012037, 18 pp.
- [14] H. W. Diehl, F. M. Schmidt, “The critical Casimir effect in films for generic non-symmetry-breaking boundary conditions”, *New J. Phys.*, **13**:12 (2011), 123025, 44 pp.
- [15] F. M. Schmidt, H. W. Diehl, “Crossover from attractive to repulsive Casimir forces and vice versa”, *Phys. Rev. Lett.*, **101**:10 (2008), 100601, 4 pp.
- [16] H. W. Diehl, D. Grüneberg, M. Hasenbusch, A. Hucht, S. B. Rutkevich, F. M. Schmidt, “Exact thermodynamic Casimir forces for an interacting three-dimensional model system in film geometry with free surfaces”, *Europhys. Lett.*, **100**:1 (2012), 10004, arXiv: 1205.6613.
- [17] H. W. Diehl, D. Grüneberg, M. Hasenbusch, A. Hucht, S. B. Rutkevich, F. M. Schmidt, “Large- n approach to thermodynamic Casimir effects in slabs with free surfaces”, *Phys. Rev. E*, **89**:6 (2014), 062123, 21 pp., arXiv: 1405.5787.
- [18] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011.

- [19] H. W. Diehl, “Field-theoretical approach to critical behaviour at surfaces”, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, v. 10, eds. C. Domb, J. L. Lebowitz, Academic Press, London, 1986, 75–267.
- [20] H. W. Diehl, “The theory of boundary critical phenomena”, *Internat. J. Modern Phys. B*, **11** (1997), 3503–3523, arXiv:cond-mat/9610143.
- [21] S. B. Rutkevich, H. W. Diehl, “Inverse-scattering-theory approach to the exact $n \rightarrow \infty$ solutions of $O(n)$ ϕ^4 models on films and semi-infinite systems bounded by free surfaces”, *Phys. Rev. E*, **91**:6 (2015), 062114, 48 pp.
- [22] H. W. Diehl, S. Dietrich, “Scaling laws and surface exponents from renormalization group equations”, *Phys. Lett. A*, **80**:5–6 (1980), 408–412.
- [23] H. W. Diehl, S. Dietrich, “Field-theoretical approach to static critical phenomena in semi-infinite systems”, *Z. Phys. B*, **42**:1 (1981), 65–86; Erratum, **43** (1981), 281.
- [24] H. W. Diehl, S. Dietrich, “Field-theoretical approach to multicritical behavior near free surfaces”, *Phys. Rev. B*, **24**:5 (1981), 2878–2880.
- [25] H. W. Diehl, S. Dietrich, “Multicritical behaviour at surfaces”, *Z. Phys. B*, **50**:2 (1983), 117–129.
- [26] N. D. Mermin, H. Wagner, “Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models”, *Phys. Rev. Lett.*, **17**:2 (1966), 1133–1136.
- [27] F. Merkl, H. Wagner, “Recurrent random walks and the absence of continuous symmetry breaking on graphs”, *J. Statist. Phys.*, **75**:1–2 (1994), 153–165.
- [28] M. E. Fisher, M. N. Barber, D. Jasnow, “Helicity modulus, superfluidity, and scaling in isotropic systems”, *Phys. Rev. A*, **8**:2 (1973), 1111–1124.
- [29] А. Н. Васильев, *Квантовополовая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамики*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.
- [30] M. Moshe, J. Zinn-Justin, “Quantum field theory in the large N limit: a review”, *Phys. Rep.*, **385**:3–6 (2003), 69–228.
- [31] D. Danchev, “Finite-size scaling Casimir force function: exact spherical-model results”, *Phys. Rev. E*, **53**:3 (1996), 2104–2109.
- [32] D. M. Danchev, “Exact three-dimensional Casimir force amplitude, c function, and Binder’s cumulant ratio: spherical model results”, *Phys. Rev. E*, **58**:2 (1998), 1455–1462.
- [33] D. Dantchev, H. W. Diehl, D. Grüneberg, “Excess free energy and Casimir forces in systems with long-range interactions of van der Waals type: general considerations and exact spherical-model results”, *Phys. Rev. E*, **73**:1 (2006), 016131, 26 pp.
- [34] A. Hucht, “Thermodynamic Casimir effect in ^4He films near T_λ : Monte Carlo results”, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:18 (2007), 185301, 4 pp.
- [35] O. Vasilyev, A. Gambassi, A. Maciolek, S. Dietrich, “Monte Carlo simulation results for critical Casimir forces”, *Europhys. Lett.*, **80**:6 (2007), 60009, 6 pp.
- [36] O. Vasilyev, A. Gambassi, A. Maciolek, S. Dietrich, “Universal scaling functions of critical Casimir forces obtained by Monte Carlo simulations”, *Phys. Rev. E*, **79**:4 (2009), 041142, 21 pp.; Erratum, **80**:3 (2009), 039902.
- [37] M. Hasenbusch, “Specific heat, internal energy, and thermodynamic Casimir force in the neighborhood of the λ transition”, *Phys. Rev. B*, **81**:16 (2010), 165412, 11 pp.
- [38] M. Hasenbusch, “The specific heat of thin films near the λ -transition: a Monte Carlo study of an improved three-dimensional lattice model”, *J. Stat. Mech.*, **2009**:10 (2009), P10006, 38 pp.
- [39] M. Krech, S. Dietrich, “Finite-size scaling for critical films”, *Phys. Rev. Lett.*, **66**:3 (1991), 345–348; Erratum, **67**:8 (1991), 1055.
- [40] M. Krech, S. Dietrich, “Free energy and specific heat of critical films and surfaces”, *Phys. Rev. A*, **46**:4 (1992), 1886–1921.
- [41] H. W. Diehl, D. Grüneberg, M. A. Shpot, “Fluctuation-induced forces in periodic slabs: breakdown of ϵ expansion at the bulk critical point and revised field theory”, *Europhys. Lett.*, **75**:2 (2006), 241–247, arXiv:cond-mat/0605293.

- [42] D. Grüneberg, H. W. Diehl, “Thermodynamic Casimir effects involving interacting field theories with zero modes”, *Phys. Rev. B*, **77**:11 (2008), 115409, 22 pp., arXiv: 0710.4436.
- [43] H. W. Diehl, D. Grüneberg, “Critical Casimir amplitudes for n -component ϕ^4 models with $O(n)$ -symmetry breaking quadratic boundary terms”, *Nucl. Phys. B*, **822**:3 (2009), 517–542.
- [44] A. Maciolek, A. Gambassi, S. Dietrich, “Critical Casimir effect in superfluid wetting films”, *Phys. Rev. E*, **76**:3 (2007), 031124, 17 pp.
- [45] R. Zandi, A. Shackell, J. Rudnick, M. Kardar, L. P. Chayes, “Thinning of superfluid films below the critical point”, *Phys. Rev. E*, **76**:3 (2007), 030601, 4 pp.
- [46] A. J. Bray, M. A. Moore, “Critical behavior of a semi-infinite system: n -vector model in the large- n limit”, *Phys. Rev. Lett.*, **38**:14 (1977), 735–738.
- [47] H. W. Diehl, S. B. Rutkevich, “The $O(n)$ ϕ^4 model with free surfaces in the large- n limit: some exact results for boundary critical behaviour, fluctuation-induced forces and distant-wall corrections”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:14 (2014), 145004, 15 pp., arXiv: 1401.1357.
- [48] H. W. Diehl, D. Grüneberg, M. Hasenbusch, A. Hucht, S. B. Rutkevich, F. M. Schmidt, “Comment on ‘Casimir force in the $O(n \rightarrow \infty)$ model with free boundary conditions’”, *Phys. Rev. E*, **91**:2 (2015), 026101, 3 pp., arXiv: 1405.5787.
- [49] D. Dantchev, J. Bergknoff, J. Rudnick, “Casimir force in the $O(n \rightarrow \infty)$ model with free boundary conditions”, *Phys. Rev. E*, **89**:4 (2014), 042116, 14 pp.
- [50] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 2: *Гармонический анализ. Самосопряженность*, Мир, М., 1978.
- [51] К. М. Case, “Singular potentials”, *Phys. Rev.*, **80**:5 (1950), 797–806.
- [52] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1974.
- [53] K. Kirsten, P. Loya, J. Park, “The very unusual properties of the resolvent, heat kernel, and zeta function for the operator $-d^2/dr^2 - 1/(4r^2)$ ”, *J. Math. Phys.*, **47**:4 (2006), 043506, 27 pp.
- [54] S. B. Rutkevich, H. W. Diehl, “Inverse scattering theory and trace formulae for one-dimensional Schrödinger problems with singular potentials”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:37 (2015), 375201, 25 pp.
- [55] W. M. Frank, D. J. Land, R. M. Spector, “Singular potentials”, *Rev. Modern Phys.*, **43**:1 (1971), 36–98.
- [56] J. L. Cardy, “Universal critical-point amplitudes in parallel-plate geometries”, *Phys. Rev. Lett.*, **65**:12 (1990), 1443–1445.
- [57] D. M. McAvity, H. Osborn, “Conformal field theories near a boundary in general dimensions”, *Nucl. Phys. B*, **455**:3 (1995), 522–576.
- [58] H. W. Diehl, S. Dietrich, E. Eisenriegler, “Universality, irrelevant surface operators, and corrections to scaling in systems with free surfaces and defect planes”, *Phys. Rev. B*, **27**:5 (1983), 2937–2954.
- [59] H. W. Diehl, A. Nüsser, “Critical behavior of the nonlinear σ model with a free surface: the ‘ordinary’ transition in $2 + \epsilon$ dimensions”, *Phys. Rev. Lett.*, **56**:26 (1986), 2834–2837.