Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Урбановски, Свойства ложного вакуума как неустойчивого квантового состояния, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 3, 533–547

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 09:05:50

© 2017 г.

К. Урбановски*

СВОЙСТВА ЛОЖНОГО ВАКУУМА КАК НЕУСТОЙЧИВОГО КВАНТОВОГО СОСТОЯНИЯ

Проанализированы свойства неустойчивых вакуумных состояний с точки зрения квантовой теории. В литературе можно встретить высказывания о том, что некоторые ложные (неустойчивые) вакуумные состояния могут выжить вплоть до времен, когда вероятность их выживания приобретает неэкспоненциальный вид. На асимптотически больших временах вероятность выживания как функция времени t носит обратно-степенной характер. Показано, что в этом временном интервале энергия ложных вакуумных состояний стремится к энергии истинного вакуума по закону $1/t^2$ при $t \rightarrow \infty$. Это означает, что плотность энергии в неустойчивом вакуумном состоянии и, следовательно, космологическая постоянная $\Lambda = \Lambda(t)$ должны иметь аналогичные свойства. Вывод таков, что Λ во вселенной с неустойчивым вакуумом должна иметь вид суммы “голой” космологической постоянной и члена типа $1/t^2$: $\Lambda(t) \equiv \Lambda_{\text{bare}} + d/t^2$ (где Λ_{bare} – космологическая постоянная вселенной с истинным вакуумом).

Ключевые слова: ложный вакуум, неустойчивые состояния, космологическая постоянная.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9121>

1. ВЕДЕНИЕ

Широкое обсуждение проблемы ложного вакуума началось после публикации пионерских работ Коулмана с коллегами [1]–[3]. Авторы этих работ обсуждали вопрос устойчивости физической системы в состоянии, которое не является абсолютным минимумом плотности ее энергии и отделено от минимума эффективным потенциальным барьером. В упомянутых работах показано, что даже если состояние ранней вселенной слишком холодное для активации *термического* перехода (посредством термических флуктуаций) в состояние с наинизшей энергией (т.е. в *истинный вакуум*), квантовый распад ложного вакуума в истинный все же возможен благодаря

Работа частично финансово поддержана National Science Centre, Poland (грант DEC-2013/09/B/ST2/03455).

*Institute of Physics, University of Zielona Góra, Zielona Góra, Poland.
E-mail: K.Urbanski@if.uz.zgora.pl, k.a.urbanowski@gmail.com

проникновению через барьер посредством квантового туннелирования. Как выяснилось некоторое время назад, проблема распада состояния ложного вакуума может иметь отношение к процессу туннелирования между различными вакуумными состояниями струнного ландшафта (набор вакуумов в низкоэнергетическом приближении теории струн). В этом случае потенциал скалярного поля, управляющий инфляцией, имеет кратные низкоэнергетические минимумы, или *ложные вакуумы*. В такой ситуации абсолютный минимум плотности энергии является истинным вакуумом.

Проблема туннелирования космологических состояний изучалась во многих работах. Часть этих исследований была направлена на анализ роли в инфляционной космологии бозона Хиггса в Стандартной модели. Представленные в пионерской работе [4] результаты свидетельствуют о том, что инфляция может естественным образом следовать из Стандартной модели. Эта идея анализировалась во многих работах (см., например, статьи [5]–[8]). Применение некоторых результатов изучения туннелирования космологических состояний в инфляционной космологии, управляющейся бозоном Хиггса, можно найти, например, в работах [9], [10]. Зависимость инфляционного сценария и динамики вселенной (включая проблему устойчивости вакуума Стандартной модели) от массы бозона Хиггса обсуждается, например, в работах [4]–[10]. Открытие резонанса типа хиггсовского на 125–126 ГэВ (см., например, [11]–[14]) также стало дополнительной причиной многочисленных обсуждений устойчивости ложного вакуума. В работе [12] на основе предположения о справедливости Стандартной модели вплоть до планковских энергий показано, что если масса бозона Хиггса $m_H < 126$ ГэВ, то состояние электрослабого вакуума метастабильно. Это означает, что от массы бозона Хиггса зависят не только инфляционный сценарий и динамика ранней вселенной, но и устойчивость вакуумного состояния вселенной, которое является вакуумом Хиггса Стандартной модели. Таким образом, обсуждение устойчивости вакуума Хиггса не может быть сосредоточено исключительно на Стандартной модели элементарных частиц, нужно также рассматривать устойчивость с космологической точки зрения, особенно при анализе процесса туннелирования между многими вакуумными состояниями струнного ландшафта.

Анализируя распад ложного вакуума в работах [15], [16], Краус и Дент указали на то, что в процессе бесконечной инфляции многие области ложного вакуума могут выживать вплоть до времен много больше тех, на которых справедлив экспоненциальный закон распада. Есть простое объяснение этому эффекту: несмотря на то что области ложного вакуума должны предположительно разрушаться экспоненциально, может случиться так, что гравитационные эффекты заставляют пространство в области, где распад еще не произошел, расти экспоненциально быстро.

Цель настоящей работы – обсудить свойства состояния ложного вакуума как неустойчивого и проанализировать поведение энергии этого состояния при больших временах.

2. КОРОТКО О НЕУСТОЙЧИВЫХ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЯХ

Если $|M\rangle$ – начальное неустойчивое состояние, то вероятность выживания задается как $\mathcal{P}(t) = |a(t)|^2$, где $a(t)$ – амплитуда выживания, $a(t) = \langle M|M;t\rangle$, $a(0) = 1$, и $|M;t\rangle = e^{-itH}|M\rangle$, H – полный гамильтониан рассматриваемой системы (мы используем единицы, в которых $\hbar = c = 1$). Предполагается, что спектр $\sigma(H)$ гамильтониана H ограничен снизу, $\sigma(H) = [E_{\min}, \infty)$ и $E_{\min} > -\infty$.

Из основных принципов квантовой теории известно, что амплитуда $a(t)$ и, следовательно, закон распада $\mathcal{P}(t)$ неустойчивого состояния $|M\rangle$ полностью определяются плотностью распределения энергии $\omega(\mathcal{E})$ системы в данном состоянии:

$$a(t) = \int_{\sigma(H)} \omega(E) e^{-iEt} dE, \quad (1)$$

где $\omega(E) \geq 0$ при $E \geq E_{\min}$ и $\omega(E) = 0$ при $E < E_{\min}$. Из этого последнего условия и теоремы Пэли–Винера следует, что при $|t| \rightarrow \infty$ должно выполняться требование $|a(t)| \geq A \exp[-bt^q]$ [17]. Здесь $A > 0$, $b > 0$ и $0 < q < 1$. Это означает, что закон распада $\mathcal{P}(t)$ неустойчивых состояний, распадающихся в вакуум, нельзя описать экспоненциальной функцией времени t при достаточно больших временах $t \rightarrow \infty$, а на таких интервалах времени $\mathcal{P}(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ медленнее, чем любая экспоненциальная функция от t . Анализ моделей процессов распада приводит к формуле $\mathcal{P}(t) \simeq \exp[-\Gamma_M^0 t]$ (где Γ_M^0 – скорость распада состояния $|M\rangle$), которая с очень большой точностью справедлива при канонических временах распада t : от времени, достаточно большого по сравнению с начальным моментом t_0 , вплоть до $t \gg \tau_M = 1/\Gamma_M^0$ (где τ_M – время жизни), и меньшего, чем $t = T$, где T – время перехода, которое соответствует времени, когда начинают преобладать неэкспоненциальные отклонения амплитуды $a(t)$.

Вообще говоря, $a(t)$ в случае квазистационарных (метастабильных) состояний удобно представить в следующем виде: $a(t) = a_c(t) + a_{lt}(t)$, где $a_c(t)$ – экспоненциальная (каноническая) часть амплитуды $a(t)$, т. е.

$$a_c(t) \stackrel{\text{def}}{=} N \exp \left[-it \left(E_M^0 - \frac{i}{2} \Gamma_M^0 \right) \right]$$

(где E_M^0 – энергия системы в состоянии $|M\rangle$, измеренная при канонических временах распада, N – нормировочная постоянная), и $a_{lt}(t)$ – неэкспоненциальная часть амплитуды $a(t)$, соответствующая большим временам. При временах $t \sim \tau_M$ мы имеем $|a_c(t)| \gg |a_{lt}(t)|$. Время T можно найти, решив следующее уравнение

$$|a_c(t)|^2 = |a_{lt}(t)|^2. \quad (2)$$

Амплитуда $a_{lt}(t)$ ведет себя по обратно-степенному закону в области больших времен $t \gg T$. Интегральное представление (1) амплитуды $a(t)$ указывает на то, что $a(t)$ является преобразованием Фурье плотности распределения энергии $\omega(E)$. Используя этот факт, можно найти асимптотику амплитуды $a(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Полученные результаты являются строгими [18], [19]. Предположим, что

$$\omega(E) = (E - E_{\min})^\lambda \eta(E) \in L_1(-\infty, \infty) \quad (3)$$

(где $0 \leq \lambda < 1$), а также, что $\eta(E_{\min}) \stackrel{\text{def}}{=} \eta_0 > 0$ и производные $\eta^{(k)}(E) = d^k \eta(E)/dE^k$, $k = 0, 1, \dots, n$, существуют и непрерывны на интервале $[E_{\min}, \infty)$. Кроме того, предположим, что для всех упомянутых выше k существуют пределы

$$\lim_{E \rightarrow E_{\min} + 0} \eta^{(k)}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \eta_0^{(k)}, \quad \lim_{E \rightarrow \infty} (E - E_{\min})^\lambda \eta^{(k)}(E) = 0.$$

Тогда получим [18]

$$a(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} (-1) e^{iE_{\min} t} \left[\left(-\frac{i}{t} \right)^{\lambda+1} \Gamma(\lambda+1) \eta_0 + \lambda \left(-\frac{i}{t} \right)^{\lambda+2} \Gamma(\lambda+2) \eta_0^{(1)} + \dots \right] = a_{\text{lt}}(t), \quad (4)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера.

Из соотношения (4) видно, что поведение амплитуды выживания $a(t)$ при асимптотически больших временах довольно слабо зависит от конкретного вида плотности распределения энергии $\omega(E)$. Это же относится и к кривым распада $\mathcal{P}(t) = |a(t)|^2$. Типичный вид кривой распада (т. е. зависимость вероятности $\mathcal{P}(t)$ от времени t при изменении t от $t = t_0 = 0$ до $t > 30\tau_M$) показан на рис. 1а и 2а. Представленные на этих рисунках результаты получены для функции Брейта–Вигнера плотности распределения энергии,

$$\omega(E) \equiv \omega_{\text{BW}} = \frac{N}{2\pi} \Theta(E - E_{\min}) \frac{\Gamma_M^0}{(E - E_M^0)^2 + (\Gamma_M^0/2)^2},$$

что соответствует $\lambda = 0$ в формуле (3).

3. МГНОВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ В НЕУСТОЙЧИВОМ СОСТОЯНИИ

Амплитуда $a(t)$ содержит информацию о законе распада $\mathcal{P}(t)$ состояния $|M\rangle$, т. е. о скорости распада Γ_M^0 состояния, а также об энергии системы E_M^0 в этом состоянии. Эту информацию можно извлечь из $a(t)$. Действительно, если $|M\rangle$ – неустойчивое (квазистационарное) состояние, то

$$a(t) \cong N \exp \left[-i \left(E_M^0 - \frac{i}{2} \Gamma_M^0 \right) t \right] = a_c(t), \quad t \sim \tau_M.$$

Таким образом,

$$E_M^0 - \frac{i}{2} \Gamma_M^0 \equiv i \frac{\partial a_c(t)}{\partial t} \frac{1}{a_c(t)}, \quad t \sim \tau_M, \quad (5)$$

в случае квазистационарных состояний.

Стандартное толкование и понимание квантовой теории, а также соответствующая им конструкция наших измерительных приборов таковы, что, регистрируя энергию E_M^0 и скорость распада Γ_M^0 , можно быть уверенным в том, что $a(t)$ имеет канонический вид $a_c(t)$ и поэтому справедливо соотношение (5). Принимая это во внимание, введем “эффективный гамильтониан” h_M для одномерного подпространства состояний $\mathcal{H}_{\parallel}$, натянутого на нормированный вектор $|M\rangle$, следующим образом [18]–[20]:

$$h_M \stackrel{\text{def}}{=} i \frac{\partial a(t)}{\partial t} \frac{1}{a(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_M(t) - \frac{i}{2} \gamma_M(t). \quad (6)$$

В общем случае h_M может зависеть от времени, $h_M \equiv h_M(t)$. Такой эффективный гамильтониан возникает, если начать с уравнения Шредингера для полного пространства состояний $\mathcal{H}$ и искать точное эволюционное уравнение для выделенного подпространства состояний $\mathcal{H}_{\parallel} \subset \mathcal{H}$ (см. приложение, а также работы [18], [19]). Используя $h_M(t)$, найдем следующие выражения для энергии и скорости распада

системы в рассматриваемом состоянии $|M\rangle$, точнее, для мгновенной энергии $\mathcal{E}_M(t)$ и мгновенной скорости распада $\gamma_M(t)$ (см. приложение и работу [18]):

$$\mathcal{E}_M \equiv \mathcal{E}_M(t) = \operatorname{Re}[h_M(t)], \quad \gamma_M \equiv \gamma_M(t) = -2 \operatorname{Im}[h_M(t)], \quad (7)$$

где $\operatorname{Re}(z)$ и $\operatorname{Im}(z)$ означают соответственно действительную и мнимую части числа z .

Положив

$$h_M^{\text{lt}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} h_M(t)|_{t \rightarrow \infty} \quad (8)$$

и используя формулу для амплитуды $a_{\text{lt}}(t)$ при асимптотически больших временах, найдем форму $h_M^{\text{lt}}(t)$ гамильтониана $h_M(t)$ при асимптотически больших временах:

$$h_M^{\text{lt}}(t) = i \frac{\partial a_{\text{lt}}(t)}{\partial t} \frac{1}{a_{\text{lt}}(t)}. \quad (9)$$

Таким образом, из асимптотического выражения (4) для $a(t)$ с использованием (9) можно найти $h_M^{\text{lt}}(t)$ при временах $t \gg T$ как функцию малого параметра $x = 1/t$:

$$h_M^{\text{lt}}(x) = \frac{b(x)}{a_{\text{lt}}(x)}, \quad b(x) = i \frac{\partial a_{\text{lt}}(t)}{\partial t} \Big|_{x=1/t}.$$

Затем, разлагая полученный таким образом гамильтониан $h_M^{\text{lt}}(x)$ в ряд Тейлора в окрестности $x = 0$, после некоторых алгебраических преобразований получаем

$$h_M(t)|_{t \rightarrow \infty} = h_M^{\text{lt}}(t) \simeq E_{\min} + \left(-\frac{i}{t}\right) c_1 + \left(-\frac{i}{t}\right)^2 c_2 + \dots, \quad (10)$$

где $c_i = c_i^*$, $i = 1, 2, \dots$ (коэффициенты c_i зависят от $\omega(E)$). Из последнего соотношения имеем

$$\mathcal{E}_M(t) \simeq E_{\min} - \frac{c_2}{t^2} + \dots, \quad \gamma_M(t) \simeq 2 \frac{c_1}{t} + \dots, \quad t \gg T. \quad (11)$$

Эти свойства справедливы для всех неустойчивых состояний, которые выживают вплоть до времен $t \gg T$. Заметим, что из (11) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_M(t) = E_{\min}$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_M(t) = 0$.

Для плотности $\omega(E)$ вида (3) (т. е. для $a(t)$, имеющей асимптотическую форму (4)) имеем

$$c_1 = \lambda + 1, \quad c_2 = (\lambda + 1) \frac{\eta^{(1)}(E_{\min})}{\eta(E_{\min})}. \quad (12)$$

Рассматриваемые в квантовой механике и квантовой теории поля плотности распределения энергии можно описать с помощью $\omega(E)$ вида (3). Например, модели квантовой теории поля, анализирующие двухчастичный распад, соответствуют $\lambda = 1/2$.

Рис. 1. Случай $s_0 = 10$. Зависимость $\mathcal{P}$ от t/τ_M в логарифмическом масштабе (а). Зависимость κ от t/τ_M , горизонтальная штриховая линия соответствует уровню $\kappa = 1$ (б).

Рис. 2. Случай $s_0 = 50$. Зависимость $\mathcal{P}$ от t/τ_M в логарифмическом масштабе (а). Зависимость κ от t/τ_M , горизонтальная штриховая линия соответствует уровню $\kappa = 1$, т. е. $\mathcal{E}_M(t) = E_M^0$ (б).

Общий вид отношения

$$\kappa(t) = \frac{\mathcal{E}_M(t) - E_{\min}}{E_M^0 - E_{\min}} \quad (13)$$

как функции времени t , меняющегося от $t = t_0 = 0$ до $t > T$, представлен на рис. 1б и 2б. Эти результаты получены для $\omega(E) = \omega_{\text{BW}}(E)$. Время перехода T , т. е. интервал времени, в котором происходят флуктуации функций $\mathcal{P}(t)$ и $\mathcal{E}_M(t)$, зависит от значения параметра $s_0 = (E_M^0 - E_{\min})/\Gamma_M^0$ в рассматриваемой модели: чем меньше s_0 , тем короче T .

Эквивалентная формула для $h_M(t)$ задается соотношением

$$h_M(t) \equiv \frac{\langle M|H|M(t) \rangle}{\langle M|M(t) \rangle}, \quad (14)$$

которое объясняет свойства $\mathcal{E}_M(t)$ в различных временных интервалах, что можно увидеть на рис. 1б и 2б. Действительно, если переписать числитель правой части уравнения (14) как

$$\langle M|H|M(t) \rangle \equiv \langle M|H|M \rangle a(t) + \langle M|H|M(t) \rangle_{\perp}, \quad (15)$$

где $|M(t)\rangle_{\perp} = Q|M(t)\rangle$, $Q = \mathbb{I} - P$ – проектор на подпространство продуктов распада, $P = |M\rangle\langle M|$ и $\langle M|M(t)\rangle_{\perp} = 0$, то можно заметить наличие постоянного вклада

продуктов распада в энергию рассматриваемого неустойчивого состояния, который описывается с помощью $|M(t)\rangle_\perp$. Интенсивность этого вклада зависит от времени. Практически этот вклад в мгновенную энергию пренебрежимо мал и постоянен во времени на канонических временах распада, тогда как на временах перехода $t \sim T$ он является флуктуирующей функцией времени, причем амплитуда этих флуктуаций может быть существенной. Кроме того, соотношения (14) и (15) позволяют доказать, что в случае неустойчивых состояний $\text{Re}[h_M(t)] \neq \text{const}$. Используя эти соотношения, получаем

$$h_M(t) = E_M + \frac{\langle M|H|M(t)\rangle_\perp}{a(t)}, \quad (16)$$

где E_M – математическое ожидание гамильтониана H : $E_M = \langle M|H|M\rangle$. Из этой формулы видно, что если существует матричный элемент $\langle M|H|M\rangle$, то $h_M(0) = E_M$. Это происходит потому, что $|M(0)\rangle_\perp = 0$ и $a(0) = 1$. Теперь, если предположить, что при $0 \leq t_1 \neq t_2$ справедливы условия

$$\text{Re}[h_M(0)] = \text{Re}[h_M(t_1)] = \text{Re}[h_M(t_2)] = \text{const},$$

сразу же приходим к выводу, что равенство $\text{Re}[h_M(t)] = E_M$ должно выполняться при всех $t \geq 0$. К сожалению, это наблюдение противоречит сущности соотношения (16): из этого соотношения следует, что

$$\text{Re} \frac{\langle M|H|M(t)\rangle_\perp}{a(t)} \neq 0 \quad \text{при} \quad t > 0$$

и, таким образом, $\text{Re}[h_M(t)] \neq E_M \equiv \text{Re}[h_M(0)]$ при $t > 0$, а это указывает на то, что $\text{Re}[h_M(t)] \equiv \mathcal{E}_M(t)$ не может быть постоянной во времени.

4. СВЯЗЬ С КОСМОЛОГИЕЙ

С точки зрения квантовой теории распад ложного вакуума является процессом квантового распада [1]–[3], [15], [16]. Кроме того, некоторые космологические сценарии предсказывают возможность распада вакуума Стандартной модели на инфляционной стадии эволюции вселенной (см., например, работу [21], а также работу [22] и ссылки в ней). Конечно, такой распадающийся вакуум Стандартной модели описывается квантовым состоянием, соответствующим локальному минимуму плотности энергии, который при этом не является абсолютным минимумом для рассматриваемой системы. Это означает, что соответствующий ложному вакууму вектор состояния представляет собой квантовое неустойчивое (или метастабильное) состояние. Поэтому все общие свойства квантовых неустойчивых состояний должны присутствовать и в случае ложного вакуума. Это относится, в частности, к такому свойству, как отклонение при больших временах от экспоненциального закона распада, а также к свойствам энергии $\mathcal{E}_0^{\text{false}}(t)$ системы в квантовом состоянии ложного вакуума при поздних временах $t > T$.

Космологический сценарий, в котором ложный вакуум может распадаться на инфляционной стадии развития вселенной, соответствует гипотезе, проанализированной Крауссом и Дентом в работе [15]. А именно, в этой работе была сформулирована

гипотеза о том, что некоторые области ложного вакуума выживают вплоть до времени T и позже. Итак, пусть $|M\rangle = |0\rangle^{\text{false}}$ и $|0\rangle^{\text{true}}$ – состояния ложного и истинного вакуума, E_0^{false} – энергия состояния, соответствующего ложному вакууму, измеренная на канонических временах распада, и E_0^{true} – энергия истинного вакуума (т.е. истинного основного состояния системы). Как видно из результатов предыдущего раздела, проблема состоит в том, что энергия тех областей ложного вакуума, которые выживают до времен порядка T и много больших, отличается от E_0^{false} [23].

Если теперь предположить, что $E_0^{\text{true}} \equiv E_{\min}$ и $E_0^{\text{false}} = E_M^0$, а также учесть результаты предыдущего раздела (включая результаты, отображенные на рис. 16 и 26), то можно прийти к выводу, что энергия системы в состоянии ложного вакуума имеет следующие общие свойства:

$$\mathcal{E}_0^{\text{false}}(t) = E_0^{\text{true}} + \Delta E \cdot \kappa(t), \quad (17)$$

где $\Delta E = E_0^{\text{false}} - E_0^{\text{true}}$ и $\kappa(t) \simeq 1$ при $t \sim \tau_0^{\text{false}} < T$ (здесь τ_0^{false} – время жизни неустойчивого состояния ложного вакуума). При этом $\kappa(t)$ является флуктуирующей функцией при временах $t \sim T$ и $\kappa(t) \propto 1/t^2$ при $t \gg T$.

На асимптотически больших временах $t \gg T$ имеем

$$\mathcal{E}_0^{\text{false}}(t) \simeq E_0^{\text{true}} - \frac{c_2}{t^2} + \dots \neq E_0^{\text{false}}, \quad (18)$$

где $c_2 = c_2^*$ и этот параметр может быть положительным или отрицательным в зависимости от рассматриваемой модели. Аналогично $\gamma_0^{\text{false}}(t) \simeq +2c_1/t + \dots$ при $t \gg T$. Из двух последних свойств состояний ложного вакуума следует, что

$$\mathcal{E}_0^{\text{false}}(t) \rightarrow E_0^{\text{true}}, \quad \gamma_0^{\text{false}}(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Чтобы теперь обобщить полученные на основе квантовой механики результаты на квантовую теорию поля, нужно учесть, кроме всего прочего, объемные факторы. Поэтому следует рассматривать вероятность выживания в единице объема и в единицу времени. Стандартные расчеты распада ложного вакуума показывают, что одни и те же объемные факторы должны появляться при оценке скорости распада как на ранних, так и на поздних временах (см. работы [15], [24]). Это означает, что расчеты времени перехода T можно применить и к вычислению вероятностей выживания в единице объема. По той же причине в рамках квантовой теории поля величину $\mathcal{E}_M(t)$ можно заменить энергией в единице объема $\rho_M(t) = \mathcal{E}_M(t)/V$, поскольку эти объемные факторы V появляются в числителе и знаменателе формулы (6) для $h_M(t)$. По-видимому, этот вывод остается справедливым при рассмотрении энергии $\mathcal{E}_0^{\text{false}}(t)$ системы в состоянии ложного вакуума $|0\rangle^{\text{false}}$ в силу того, что Вселенная считается однородной и изотропной на достаточно больших масштабах. Следовательно, на таких масштабах с достаточно хорошей точностью можно извлечь свойства плотности энергии $\rho_0^{\text{false}} = E_M^0/V = E_0^{\text{false}}/V$ системы в состоянии ложного вакуума $|0\rangle^{\text{false}}$ из свойств энергии $\mathcal{E}_0^{\text{false}}(t)$ системы в этом состоянии, определив $\rho_0^{\text{false}}(t)$ как $\rho_0^{\text{false}}(t) = \mathcal{E}_0^{\text{false}}(t)/V$. Отсюда следует справедливость следующего важного свойства функции $\kappa(t)$ в случае метастабильного (неустойчивого или распадающегося, ложного) вакуума:

$$\kappa(t) \equiv \frac{\rho_0^{\text{false}}(t) - \rho_{\text{bare}}}{\rho_0^{\text{false}} - \rho_{\text{bare}}},$$

где $\rho_{\text{bare}} = E_{\text{min}}/V$ – плотность энергии истинного (голого) вакуума. Из последнего уравнения следует, что

$$\rho_0^{\text{false}}(t) - \rho_{\text{bare}} = (\rho_0^{\text{false}} - \rho_{\text{bare}})\kappa(t).$$

Таким образом, поскольку $\kappa(t) \simeq 1$ при $t < T$, получаем

$$\rho_0^{\text{false}}(t) \simeq \rho_0^{\text{false}} \quad \text{при} \quad t < T,$$

при этом для $t \gg T$ имеем

$$\rho_0^{\text{false}}(t) - \rho_{\text{bare}} = (\rho_0^{\text{false}} - \rho_{\text{bare}})\kappa(t) \simeq \pm d_2 \frac{\hbar^2}{t^2}, \quad t \gg T, \quad (20)$$

где $d_2 = d_2^*$. В следующих формулах используются единицы измерения, в которых $\hbar = 1 = c$. Аналогичные соотношения (с той же функцией $\kappa(t)$) справедливы также для $\Lambda(t) = (8\pi G/c^2)\rho(t)$ или $\Lambda(t) = 8\pi G\rho(t)$:

$$\Lambda(t) - \Lambda_{\text{bare}} = (\Lambda_0 - \Lambda_{\text{bare}})\kappa(t), \quad (21)$$

или

$$\Lambda(t) = \Lambda_{\text{bare}} + (\Lambda_0 - \Lambda_{\text{bare}})\kappa(t). \quad (22)$$

Можно предположить, что Λ_0 совпадает с космологической постоянной, рассчитанной в рамках квантовой теории поля. Из выражения (22) видно, что при $t < T$

$$\Lambda(t) \simeq \Lambda_0, \quad (23)$$

потому что $\kappa(t) \simeq 1$ при $t < T$. Если теперь предположить, что Λ_0 соответствует значению космологической “постоянной” Λ , рассчитанной в рамках квантовой теории поля, то можно ожидать, что [25]

$$\frac{\Lambda_0}{\Lambda_{\text{bare}}} \geq 10^{120}, \quad (24)$$

а это позволяет записать уравнение (22) в следующем виде

$$\Lambda(t) \simeq \Lambda_{\text{bare}} + \Lambda_0 \kappa(t). \quad (25)$$

Отметим, что при $t \gg T$ должно быть справедливо соотношение (см. (20))

$$\Lambda_0 \kappa(t) \simeq 8\pi G \frac{d_2}{t^2} \equiv \pm \frac{\alpha^2}{t^2} \quad \text{при} \quad t \gg T. \quad (26)$$

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Параметризация, вытекающая из квантово-теоретической трактовки метастабильных вакуумных состояний, может объяснить причину, по которой следует рассматривать космологии с зависящей от времени космологической постоянной $\Lambda(t)$. Такая параметризация может оказаться полезной при объяснении проблемы космологической постоянной [26], [27]. Из литературы известно, что многие авторы рассматривали зависимость от времени типа $\Lambda(t) = \Lambda_{\text{bare}} + \alpha^2/t^2$; аналогичный вид Λ был

получен в работе [28], где изучалась инвариантность обобщенных уравнений Эйнштейна относительно преобразований масштаба. Такая зависимость от времени для космологической постоянной Λ также постулируется в работе [29] в результате анализа гипотезы больших чисел. Космологическая модель с зависящей от времени космологической постоянной постулированного выше вида изучалась также в работе [30]. Этот вид Λ предполагался, например, в работе [31], но до сих пор не было предложено никакой физической основы для такого выбора. Космологические модели с зависящей от времени Λ изучаются также в совсем недавних работах.

Преимущество изложенного в разделе 4 формализма заключается в учете того факта, что процесс распада метастабильного вакуумного состояния является процессом квантового распада. Поэтому в случае вселенной с метастабильным (ложным) вакуумом, когда ясно, что распад неустойчивого вакуумного состояния есть процесс квантового распада, автоматически возникает необходимость существования истинного основного состояния системы, которое является истинным (или голым) вакуумом с минимальной энергией $E_{\min} > -\infty$ соответствующей ему системы и, аналогично, $\rho_{\text{bare}} = E_{\min}/V$ или $\Lambda_{\text{bare}} = 8\pi G\rho_{\text{bare}}$. Кроме того, такая $\Lambda \equiv \Lambda(t)$ указывает на то, что при достаточно больших временах она имеет вид, выраженный соотношениями (25), (26). В этом случае задаваемая соотношением (13) функция $\kappa(t)$ описывает зависимость от времени плотности энергии $\rho_M(t)$ или космологической “постоянной” $\Lambda_M(t)$ при всех временах t , ее общий вид представлен на рис. 16 и 26. Заметим, что результаты разделов 2–4 являются строгими. Изложенный формализм применялся в работах [24], [25], в которых изучались космологические модели с $\Lambda(t) = \Lambda_{\text{bare}} \pm \alpha^2/t^2$; изящный и, возможно, наиболее обещающий результат представлен в работе [25], в которой с помощью параметризации, мотивированной вышеуказанным квантово-теоретическим анализом процесса распада неустойчивого вакуумного состояния, была предпринята попытка объяснить малость значения космологической постоянной Λ в наши дни. Поэтому можно сделать вывод, что описанные в настоящей работе и в работах [24], [25] формализм и подход являются многообещающими, они могут помочь в решении проблемы космологической постоянной и других космологических проблем и нуждаются в дальнейшем изучении. Более того, такой вывод кажется разумным и оправданным в свете полученного на БАК результата по измерению массы m_H бозона Хиггса и космологических последствий этого результата. Это объясняется тем, что наблюдаемый результат $m_H < 126$ ГэВ может иметь в качестве следствия неустойчивость электрослабого вакуума и существование космологического сценария, предсказывающего даже возможность распада этого вакуума на инфляционной стадии эволюции вселенной [22], [21].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим общие свойства гамильтониана $h_M(t)$. При квантово-механических расчетах процессов распада всегда начинают с уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} |M(t)\rangle = H |M(t)\rangle. \quad (\text{П.1})$$

Здесь $|M(t)\rangle \in \mathcal{H}$, H – полный самосопряженный гамильтониан и $|M\rangle = |M(0)\rangle \in \mathcal{H}$ есть начальное неустойчивое состояние системы; $\langle M|M\rangle = 1$. Точнее, проблема сводится к замене уравнения Шредингера (П.1) двумя связанными уравнениями

и далее, после их решения, к получению уравнения для амплитуды $a(t)$. Прибегая к введенным в разделе 3 проекторам $P = |M\rangle\langle M|$ и $Q = \mathbb{I} - P$, заметим, что, очевидно,

$$P|M; t\rangle \equiv a(t)|M\rangle \quad (\text{П.2})$$

и вместо (П.1) получим два связанных уравнения (см., например, [32])

$$i \frac{\partial}{\partial t} P|M(t)\rangle = PHP|M(t)\rangle + PHQ|M(t)\rangle, \quad (\text{П.3})$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} Q|M(t)\rangle = QHQ|M(t)\rangle + QHP|M(t)\rangle. \quad (\text{П.4})$$

Начальные условия имеют вид

$$P|M(0)\rangle = |M\rangle, \quad Q|M(0)\rangle = 0. \quad (\text{П.5})$$

Учитывая начальные условия и подставляя решение $Q|M(t)\rangle$ уравнения (П.4) в (П.3), получаем уравнение для амплитуды $a(t)$:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - PHP\right)a(t)|M\rangle = -i \int_0^\infty k(t-\tau)a(\tau)|M\rangle d\tau, \quad t \geq 0, \quad (\text{П.6})$$

где

$$k(t) = \Theta(t)\langle M|HQe^{-itQH}QH|M\rangle \quad (\text{П.7})$$

($\Theta(t)$ – единичная ступенька). Имеем

$$PHP \equiv \langle M|H|M\rangle|M\rangle \equiv E_M|M\rangle,$$

где $E_M = \langle M|H|M\rangle$ – средняя энергия системы в состоянии $|M\rangle$. Последнее свойство означает, что уравнение (П.6) можно представить следующим образом (см. работу [32] или [33], где рассмотрены схожие эквивалентные уравнения):

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - E_M\right)a(t) = -i \int_0^\infty k(t-\tau)a(\tau) d\tau. \quad (\text{П.8})$$

Уравнения (П.6) и (П.8) являются точными. При вычислении вероятности распада обычно используются приближенные методы решения уравнения (П.8). Для получения поправок к энергии неустойчивого состояния удобно заменить интегро-дифференциальное уравнение (П.8) эквивалентным чисто дифференциальным:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - E_M - v_M(t)\right)a(t) \equiv 0, \quad (\text{П.9})$$

где “квазипотенциал” $v_M(t)$ ищется как решение нелинейного уравнения

$$v_M(t)a(t) = -i \int_0^\infty k(t-\tau)a(\tau) d\tau. \quad (\text{П.10})$$

Приближенное решение этого уравнения в первом нетривиальном порядке можно найти с помощью “свободного” решения $a^{(0)}(t)$ уравнения (П.8), т.е. с помощью решений уравнения

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - E_M\right) a^{(0)}(t) = 0 \quad (\text{П.11})$$

с начальным условием $a^{(0)}(0) = a(0) = 1$. Подставляя решение $a^{(0)}(t) = e^{-itE_M}$ уравнения (П.11) в (П.10), получаем (подробности см. в работе [32], уравнения (32)–(35))

$$v_M(t) \simeq v_M^{(1)}(t) = -i \int_0^\infty k(t-\tau) e^{i(t-\tau)E_M} d\tau. \quad (\text{П.12})$$

Это соотношение приводит к следующему выражению для $v_M^{(1)}(t)$:

$$v_M^{(1)}(t) = \left\langle M \left| HQ \frac{e^{-it(QHQ - E_M)} - 1}{QH Q - E_M} HQ \right| M \right\rangle \equiv -\Delta_M^{(1)}(t) - \frac{i}{2} \Gamma_M^{(1)}(t), \quad (\text{П.13})$$

где $\Delta_M^{(1)}(t)$ и $\Gamma_M^{(1)}(t)$ действительные. Для больших t полученный приближенный результат совпадает с результатом Вейскопфа–Вигнера [34], [32]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_M^{(1)}(t) = v_M^{(1)} = -\Delta_M^{(1)} - \frac{i}{2} \Gamma_M^{(1)}, \quad (\text{П.14})$$

где

$$\Delta_M^{(1)} = \langle M | HQ \text{ P.v. } \frac{1}{QH Q - E_M} QH | M \rangle \quad (\text{П.15})$$

(здесь P.v. означает главное значение), $\Delta_M^{(1)}$ – поправка к энергии неустойчивого состояния и ширина распада задается формулой

$$\Gamma_M^{(1)} = 2\pi \langle M | HQ \delta(QHQ - E_M) QH | M \rangle. \quad (\text{П.16})$$

Более подробный анализ показывает, что полученные приближенные результаты достаточно точно описывают поведение неустойчивого состояния $|M\rangle$ только при канонических временах распада (т.е. когда с достаточной точностью справедлив экспоненциальный закон распада [17]).

Учитывая соотношения (П.9), (П.13)–(П.15), приходим к выводу о том, что энергия E_M^0 неустойчивого состояния $|M\rangle$ при канонических временах распада равна

$$E_M^0 \simeq E_M - \Delta_M^{(1)} \equiv E_M + \text{Re}[v_M^{(1)}]. \quad (\text{П.17})$$

С другой стороны, из уравнения (П.9) следует, что

$$E_M + v_M(t) \equiv \frac{i}{a(t)} \frac{\partial a(t)}{\partial t}. \quad (\text{П.18})$$

Это соотношение вместе с уравнением (6) означает, очевидно, что

$$h_M(t) \equiv E_M + v_M(t), \quad (\text{П.19})$$

поэтому уравнение (П.9) можно записать в виде

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - h_M(t)\right) a(t) \equiv 0, \quad (\text{П.20})$$

где $h_M(t)$ – обычный эффективный гамильтониан, управляющий временной эволюцией рассматриваемого неустойчивого состояния. Сравнивая (П.19) и (16), найдем

$$v_M(t) \equiv \frac{\langle M | H | M(t) \rangle_{\perp}}{a(t)}. \quad (\text{П.21})$$

Из проведенного анализа видно, что $v_M(0) = 0$, откуда следует $\text{Re}[h_M(0)] = E_M$.

На канонических временах распада имеем при $t \sim \tau_M$

$$\text{Re}[h_M(t)] = E_M^0 \simeq E_M - \Delta_M^{(1)}, \quad (\text{П.22})$$

$$\text{Im}[h_M(t)] = -\frac{1}{2}\Gamma_M^0 \simeq -\frac{1}{2}\Gamma_M^{(1)}. \quad (\text{П.23})$$

Поэтому, измеряя энергию рассматриваемого неустойчивого состояния при канонических временах распада, при $t \sim \tau_M$, мы можем ожидать, что получится величина энергии E_M^0 , заданная формулой (П.22).

Итак, как следует из формул (П.17)–(П.22), энергия $\mathcal{E}_M(t)$ системы в неустойчивом состоянии $|M\rangle$ равна действительной части эффективного гамильтониана $h_M(t)$:

$$\mathcal{E}_M(t) = \text{Re}[h_M(t)] = E_M - \Delta_M(t), \quad (\text{П.24})$$

где $\Delta_M(t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Re}[v_M(t)]$ и $\Delta_M(0) = 0$, а знак функции $\Delta_M(t)$ зависит от рассматриваемой модели. Строго говоря, если учесть все свойства $\text{Re}[h_M(t)]$, то энергия $\mathcal{E}_M(t)$ является мгновенной энергией системы в неустойчивом состоянии $|M\rangle$, и эта энергия равна сумме математического ожидания E_M энергии для полного гамильтониана и вклада $\Delta_M(t)$ от взаимодействий, которые обуславливают процессы распада и восстановления.

В заключение нашего анализа следует упомянуть связь свойств функции $v_M(t)$ при больших временах с аналогичными свойствами функций $\mathcal{E}_M(t)$ и $\gamma_M(t)$, которые обсуждались в разделе 3. При больших временах имеем

$$\Delta_M(t) \equiv \text{Re}[v_M(t)] \simeq E_M - E_{\min} + \frac{c_2}{t^2} + \dots, \quad t \gg T. \quad (\text{П.25})$$

При больших временах асимптотика функции $\text{Im}[v_M(t)] \equiv \text{Im}[h_M(t)]$ совпадает с $\gamma_M(t)$, которая дается формулой (11).

Список литературы

- [1] S. Coleman, “Fate of the false vacuum: semiclassical theory”, *Phys. Rev. D*, **15**:10 (1977), 2929–2936.
- [2] C. G. Callan, S. Coleman, “Fate of the false vacuum. II. First quantum corrections”, *Phys. Rev. D*, **16**:6 (1977), 1762–1768.
- [3] S. Coleman, F. de Lucia, “Gravitational effects on and of vacuum decay”, *Phys. Rev. D*, **21**:12 (1980), 3305–3315.

- [4] F. L. Bezrukov, M. E. Shaposhnikov, “The Standard Model Higgs boson as the inflaton”, *Phys. Lett. B*, **659**:3 (2008), 703–706, arXiv:0710.3755.
- [5] F. L. Bezrukov, A. Magnin, M. E. Shaposhnikov, “Standard Model Higgs boson mass from inflation”, *Phys. Lett. B*, **675**:1 (2009), 88–92.
- [6] F. L. Bezrukov, M. Yu. Kalmykov, B. A. Kniehl, M. E. Shaposhnikov, “Higgs boson mass and new physics”, *JHEP*, **10** (2012), 140, arXiv:1205.2893.
- [7] A. O. Barvinsky, A. Yu. Kamenshchik, A. A. Starobinsky, “Inflation scenario via the Standard Model Higgs boson and LHC”, *JCAP*, **2008**:11 (2008), 021, 14 pp., arXiv:0809.2104.
- [8] A. O. Barvinsky, A. Yu. Kamenshchik, C. Kiefer, A. A. Starobinsky, C. F. Steinwachs, “Higgs boson, renormalization group, and naturalness in cosmology”, *Eur. Phys. J. C*, **72**:11 (2012), 2219, 11 pp., arXiv:0910.1041.
- [9] A. O. Barvinsky, A. Yu. Kamenshchik, C. Kiefer, C. F. Steinwachs, “Tunneling cosmological state revisited: origin of inflation with a nonminimally coupled standard model Higgs inflaton”, *Phys. Rev. D*, **81**:4 (2010), 0435530, 9 pp.
- [10] А. О. Барвинский, “Туннелирующее космологическое состояние и происхождение хиггсовской инфляции в Стандартной модели”, *ТМФ*, **170**:1 (2012), 62–86.
- [11] A. Kobakhidze, A. Spencer-Smith, “Electroweak vacuum (in)stability in an inflationary universe”, *Phys. Lett. B*, **722**:1–3 (2013), 130–134.
- [12] G. Degrandi, S. Di Vit, J. Elias-Miró, J. R. Espinosa, G. F. Giudice, G. Isidori, A. Strumia, “Higgs mass and vacuum stability in the Standard Model at NNLO”, *JHEP*, **08** (2012), 098, 33 pp.
- [13] J. Elias-Miró, J. R. Espinosa, G. F. Giudice, G. Isidori, A. Riotto, A. Strumia, “Higgs mass implications on the stability of the electroweak vacuum”, *Phys. Lett. B*, **709**:3 (2012), 222–228.
- [14] W. Chaoet, M. Gonderinger, M. J. Ramsey-Musolf, “Higgs vacuum stability, neutrino mass, and dark matter”, *Phys. Rev. D*, **86**:11 (2012), 113017, 9 pp.
- [15] L. M. Krauss, J. Dent, “Late time behavior of false vacuum decay: possible implications for cosmology and metastable inflating states”, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:17 (2008), 171301, 4 pp.
- [16] S. Winitzki, “Age-dependent decay in the landscape”, *Phys. Rev. D*, **77**:6 (2008), 063508, 10 pp.
- [17] Л. А. Халфин, “К теории распада квазистационарного состояния”, *ЖЭТФ*, **33**:6 (1957), 1371–1382.
- [18] K. Urbanowski, “General properties of the evolution of unstable states at long times”, *Eur. Phys. J. D*, **54**:1 (2009), 25–29.
- [19] K. Urbanowski, “Long time properties of the evolution of an unstable state”, *Cent. Eur. J. Phys.*, **7**:4 (2009), 696–703.
- [20] F. Giraldi, “Logarithmic decays of unstable states”, *Eur. Phys. J. D*, **69**:1 (2015), 5, 8 pp.
- [21] V. Branchina, E. Messina, “Stability, Higgs boson mass, and new physics”, *Phys. Rev. Lett.*, **111**:23 (2013), 241801, 5 pp.
- [22] F. L. Bezrukov, M. E. Shaposhnikov, “Inflation, LHC and the Higgs boson”, *C. R. Phys.*, **16**:10 (2015), 994–1002.
- [23] K. Urbanowski, “Comment on ‘Late time behavior of false vacuum decay: possible implications for cosmology and metastable inflating states’”, *Phys. Rev. Lett.*, **107**:20 (2011), 209001, 1 pp.
- [24] K. Urbanowski, M. Szydłowski, “Cosmology with a decaying vacuum”, *AIP Conf. Proc.*, **1514**:1 (2013), 143–146.
- [25] M. Szydłowski, “Cosmological model with decaying vacuum energy from quantum mechanics”, *Phys. Rev. D*, **91**:12 (2015), 123538, 13 pp.
- [26] S. Weinberg, “The cosmological constant problem”, *Rev. Modern Phys.*, **61**:1 (1989), 1–23.
- [27] S. M. Carroll, “The cosmological constant”, *Living Rev. Relativity*, **3** (2001), lrr-2001-1, 56 pp.

- [28] V. Canuto, S. H. Hsieh, P. J. Adams, “Scale-covariant theory of gravitation and astrophysical applications”, *Phys. Rev. Lett.*, **39**:8 (1977), 429–432.
- [29] Y. K. Lau, S. J. Prokhovnik, “The large numbers hypothesis and a relativistic theory of gravitation”, *Aust. J. Phys.*, **39**:3 (1986), 339–346.
- [30] M. S. Berman, “Cosmological models with a variable cosmological term”, *Phys. Rev. D*, **43**:4 (1991), 1075–1078.
- [31] J. L. Lopez, D. V. Nanopoulos, “A new cosmological constant model”, *Modern Phys. Lett. A*, **11**:1 (1996), 1–7.
- [32] K. Urbanowski, “Early-time properties of quantum evolution”, *Phys. Rev. A*, **50**:4 (1994), 2847–2853.
- [33] A. Peres, “Nonexponential decay law”, *Ann. Phys.*, **129**:1 (1980), 33–46.
- [34] V. F. Weisskopf, E. T. Wigner, “Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie”, *Z. Phys.*, **63**:1 (1930), 54–73; “Über die natürliche Linienbreite in der Strahlung des harmonischen Oszillators”, **65**:1 (1930), 18–29.