Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Марачевский, Эффект Казимира для черн-
саймонсовских слоев в вакууме, *ТМФ*, 2017, том 190,
номер 2, 366–372

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:01:04

© 2017 г.

В. Н. Марачевский*

ЭФФЕКТ КАЗИМИРА ДЛЯ ЧЕРН-САЙМОНСОВСКИХ СЛОЕВ В ВАКУУМЕ

Решена задача дифракции электромагнитных волн на плоском $(2+1)$ -мерном слое с заданным на нем действием Черна–Саймонса. Энергия Казимира системы двух параллельных плоских черн–саймонсовских слоев выражена через коэффициенты отражения от отдельных слоев.

Ключевые слова: взаимодействие Черна–Саймонса, задача дифракции, энергия Казимира.

DOI: 10.4213/tmf9123

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффект Казимира [1] – квантовый эффект взаимодействия макроскопических тел [2]–[11]. Эффект Казимира для случая двух параллельных плоских диэлектриков, разделенных вакуумной щелью, был впервые рассмотрен в работе [12].

Теоретический формализм для проведения точных расчетов сил Казимира с использованием теории рассеяния в периодических геометриях был предложен в работах [13], [14], метод детально изложен в работе [15]. Использование теории рассеяния, нахождение матриц и коэффициентов отражения представляют собой эффективный метод нахождения энергии Казимира и потенциала Казимира–Полдера [16] в различных системах координат [6], [17], [18]. Теория рассеяния показала свою эффективность и при рассмотрении эффекта Казимира для системы “графен – параллельный диэлектрик (металл)” [19] при конечной температуре. Сравнение теории и эксперимента для такой системы осуществлено в работе [20], слой графена находился на диэлектрическом слое для удобства измерений силы Казимира. Фактически в работе [20] экспериментально подтверждена теория, разработанная ранее в работе [19] и основанная на поляризационном операторе $(2 + 1)$ -мерных дираковских фермионов в графене при конечной температуре.

Работа частично поддержана Санкт-Петербургским государственным университетом (грант № 11.38.237.2015).

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: maraval@mail.ru

Граничные члены действия Черна–Саймонса рассматривались в работах [21]–[24] по теории эффекта Казимира. В работе [23] была вычислена энергия взаимодействия двух параллельных плоских слоев с одинаково заданными на них членами действия Черна–Саймонса, в работе [24] был вычислен потенциал Казимира–Полдера нейтрального анизотропного атома при наличии плоского черн-саймонсовского слоя. В работе [23] было показано, что в системе двух одинаковых параллельных плоских черн-саймонсовских слоев может возникать как притяжение, так и отталкивание между слоями в зависимости от величины безразмерного параметра, определяющего действие Черна–Саймонса. Аналогичный эффект изменения знака силы Казимира имеет место и в системе “черн-саймонсовский слой – атом” [24]. Возникновение силы отталкивания между черн-саймонсовскими слоями, разделенными вакуумной щелью, является одной из наиболее интересных особенностей эффекта Казимира при наличии взаимодействия Черна–Саймонса.

В настоящей работе получено выражение для энергии Казимира двух параллельных плоских слоев, разделенных вакуумной щелью, с заданными на этих слоях $(2 + 1)$ -мерными действиями Черна–Саймонса. Решение данной задачи проведено калибровочно-инвариантным способом с использованием теории рассеяния. В разделе 2 приведено решение задачи дифракции для плоской электромагнитной волны на $(2 + 1)$ -мерном черн-саймонсовском слое. В разделе 3 вычислена энергия Казимира двух параллельных плоских $(2 + 1)$ -мерных слоев с заданными на них членами действия Черна–Саймонса.

Используется система единиц с $\hbar = c = 1$.

2. ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ

Действие для слоя с действием Черна–Саймонса при $z = 0$ имеет вид

$$S = \frac{a}{2} \int \varepsilon^{z\nu\rho\sigma} A_\nu F_{\rho\sigma} dt dx dy, \quad (1)$$

ток равен $J^\nu = a\varepsilon^{z\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$. Уравнения электромагнитного поля при наличии действия Черна–Саймонса (1) записываются в виде

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + a\varepsilon^{z\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \delta(z) = 0. \quad (2)$$

Из уравнений (2) нетрудно получить граничные условия сшивки для компонент электромагнитного поля для плоского черн-саймонсовского слоя, находящегося в вакууме [25]:

$$E_z|_{z=0+} - E_z|_{z=0-} = -2aH_z|_{z=0}, \quad (3)$$

$$H_x|_{z=0+} - H_x|_{z=0-} = 2aE_x|_{z=0}, \quad (4)$$

$$H_y|_{z=0+} - H_y|_{z=0-} = 2aE_y|_{z=0}. \quad (5)$$

Рассмотрим электромагнитную волну в ТЕ-поляризации (поперечно-электрической, или s -поляризации), падающую на плоскость с действием Черна–Саймонса,

расположенную при $z = 0$ (множитель $e^{i\omega t + ik_y y}$ опущен для упрощения обозначений):

$$\begin{aligned} E_x &= \begin{cases} e^{-ik_z z} + r_s e^{ik_z z}, & z > 0, \\ t_s e^{-ik_z z}, & z < 0, \end{cases} \\ H_x &= \begin{cases} r_{s \rightarrow p} e^{ik_z z}, & z > 0, \\ t_{s \rightarrow p} e^{-ik_z z}, & z < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Из условия непрерывности (4) следует

$$r_{s \rightarrow p} - t_{s \rightarrow p} = 2at_s. \quad (7)$$

Из условия $E_x|_{z=0+} = E_x|_{z=0-}$ имеем

$$1 + r_s = t_s. \quad (8)$$

Из условия $E_y|_{z=0+} = E_y|_{z=0-}$ и уравнения Максвелла $E_y = -(i\omega)^{-1} \partial_z H_x$ следует

$$r_{s \rightarrow p} = -t_{s \rightarrow p}. \quad (9)$$

Из условия непрерывности (5) и уравнения Максвелла $H_y = (i\omega)^{-1} \partial_z E_x$ получаем

$$1 - r_s - t_s = -2at_{s \rightarrow p}. \quad (10)$$

Решая уравнения (7)–(10), находим коэффициенты отражения и прохождения при дифракции плоской электромагнитной волны в ТЕ-поляризации на черн-саймонсовском члене при $z = 0$:

$$\begin{aligned} r_s &= -\frac{a^2}{1+a^2}, & t_s &= \frac{1}{1+a^2}, \\ r_{s \rightarrow p} &= \frac{a}{1+a^2}, & t_{s \rightarrow p} &= -\frac{a}{1+a^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим электромагнитную волну в ТМ-поляризации (поперечно-магнитной, или p -поляризации), падающую на плоскость с действием Черна–Саймонса, расположенную при $z = 0$:

$$\begin{aligned} H_x &= \begin{cases} e^{-ik_z z} + r_p e^{ik_z z}, & z > 0, \\ t_p e^{-ik_z z}, & z < 0, \end{cases} \\ E_x &= \begin{cases} r_{p \rightarrow s} e^{ik_z z}, & z > 0, \\ t_{p \rightarrow s} e^{-ik_z z}, & z < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Из условия $E_x|_{z=0+} = E_x|_{z=0-}$ следует

$$r_{p \rightarrow s} = t_{p \rightarrow s}. \quad (13)$$

Из условия $E_y|_{z=0+} = E_y|_{z=0-}$ и уравнения $E_y = -(i\omega)^{-1} \partial_z H_x$ имеем

$$1 - r_p = t_p. \quad (14)$$

Из условия непрерывности (4) следует

$$1 + r_p - t_p = 2ar_{p \rightarrow s}. \quad (15)$$

Из условия непрерывности (5) и уравнений Максвелла $H_y = (i\omega)^{-1} \partial_z E_x$, $E_y = -(i\omega)^{-1} \partial_z H_x$ получаем

$$r_{p \rightarrow s} + t_{p \rightarrow s} = 2at_p. \quad (16)$$

Решая уравнения (13)–(16), получаем коэффициенты отражения и прохождения при дифракции плоской электромагнитной волны в ТМ-поляризации на черн-саймонсовском члене при $z = 0$:

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{a^2}{1+a^2}, & t_p &= \frac{1}{1+a^2}, \\ r_{p \rightarrow s} &= \frac{a}{1+a^2}, & t_{p \rightarrow s} &= \frac{a}{1+a^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

3. ЭНЕРГИЯ КАЗИМИРА

Рассмотрим две параллельные плоскости с заданными на них действиями Черн-Саймонса, характеризующимися безразмерными параметрами a_1 , a_2 . Плоскости расположены на расстоянии l друг от друга (при $z = 0$ и $z = l$). Определим матрицу $R_{\text{down}} = R(a_1)$ отражения электромагнитных волн (распространяющихся вниз) от черн-саймонсовского слоя, расположенного при $z = 0$:

$$R(a_1) = \begin{pmatrix} r_s & r_{p \rightarrow s} \\ r_{s \rightarrow p} & r_p \end{pmatrix} = \frac{a_1}{1+a_1^2} \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Напишем матрицу R_{up} отражения электромагнитных волн (распространяющихся вверх) от слоя, расположенного при $z = l$. После евклидова поворота $\omega \rightarrow i\omega$ имеем

$$R_{\text{up}} = SR(a_2)S, \quad (19)$$

где

$$S = \begin{pmatrix} e^{-l\sqrt{\omega^2+k_x^2+k_y^2}} & 0 \\ 0 & e^{-l\sqrt{\omega^2+k_x^2+k_y^2}} \end{pmatrix} \quad (20)$$

– матрица сдвига, возникающая в результате замены системы координат $z_1 = -z + l$ (см. подробное изложение метода в работе [6]).

Энергия Казимира системы двух взаимодействующих слоев (слой, описываемый действием Черн-Саймонса с параметром a_1 при $z = 0$, и слой, описываемый действием Черн-Саймонса с параметром $-a_2$ при $z = l$) равна

$$\begin{aligned} E(a_1, -a_2, l) &= \frac{1}{2} \iiint \frac{d\omega dk_x dk_y}{(2\pi)^3} \ln \det(I - R_{\text{up}} R_{\text{down}}) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} dr r^2 \ln \det(I - e^{-2lr} R(a_2) R(a_1)) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} dr r^2 \ln \det(I - e^{-2lr} Q), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$Q = a_1 a_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{(a_1 - i)(a_2 + i)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(a_1 + i)(a_2 - i)} \end{pmatrix}.$$

Если заметить, что

$$\text{Li}_4(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^4} = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dr r^2 \ln(1 - x e^{-r}),$$

выражение (21) можно записать в аналитическом виде:

$$E(a_1, -a_2, l) = -\frac{1}{16\pi^2 l^3} \left(\text{Li}_4 \left(\frac{a_1 a_2}{(a_1 - i)(a_2 + i)} \right) + \text{Li}_4 \left(\frac{a_1 a_2}{(a_1 + i)(a_2 - i)} \right) \right). \quad (22)$$

Плоскость с черн-саймонсовским членом имеет выделенное направление (перпендикулярное плоскости), и замена безразмерного параметра $a \rightarrow -a$ в черн-саймонсовском члене эквивалентна повороту черн-саймонсовской плоскости вокруг любой проходящей через нее линии на 180° . При замене координат $z_1 = -z + l$ мы эффективно отражаем плоскость $z = 0$ с черн-саймонсовским членом и параметром a_2 в зеркале, расположенном при $z = l/2$. Волна, идущая вверх, отражается от плоскости (расположенной при $z = l$), являющейся зеркальным изображением черн-саймонсовской плоскости, расположенной при $z = 0$, и матрица отражения R_{up} вычислена именно для такой зеркально отраженной плоскости. Таким образом, при замене $a_2 \rightarrow -a_2$ получаем энергию Казимира двух черн-саймонсовских слоев, выделенные направления которых одинаковы, т. е. когда один плоский черн-саймонсовский слой с параметром a_1 расположен при $z = 0$, а другой плоский черн-саймонсовский слой, задаваемый параметром a_2 , расположен при $z = l$:

$$E(a_1, a_2, l) = -\frac{1}{16\pi^2 l^3} \left(\text{Li}_4 \left(\frac{a_1 a_2}{(a_1 + i)(a_2 + i)} \right) + \text{Li}_4 \left(\frac{a_1 a_2}{(a_1 - i)(a_2 - i)} \right) \right). \quad (23)$$

При $a_1 = -a_2$ плоскости притягиваются при любых значениях параметра a_1 , как следует из выражения (22). Случай $a_1 = -a_2$ соответствует известному утверждению [26], что для объектов, являющихся зеркальным отражением друг друга, сила Казимира является силой притяжения. Для случая $a_1 = a_2$ результат был впервые получен в работе [23] методом функций Грина. Знак силы Казимира между черн-саймонсовскими слоями в общем случае может быть легко определен для конкретных значений a_1, a_2 из формулы (23).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача дифракции электромагнитных волн на отдельном плоском слое с заданным на нем $(2+1)$ -мерным действием Черна–Саймонса. Использован новый метод расчета энергии Казимира двух плоских параллельных слоев с заданными на них $(2+1)$ -мерными действиями Черна–Саймонса, разделенных вакуумной щелью. Энергия Казимира выражена через коэффициенты отражения электромагнитных волн от отдельных черн-саймонсовских слоев.

Список литературы

- [1] H. B. G. Casimir, “On the attraction between two perfectly conducting plates”, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, **51** (1948), 793–795.
- [2] Ю. С. Бараш, В. Л. Гинзбург, “Электромагнитные флуктуации в веществе и молекулярные (ван-дер-ваальсовы) силы между телами”, *УФН*, **116**:1 (1975), 5–40; “Некоторые вопросы теории сил Ван-дер-Ваальса”, **143**:3 (1984), 345–389.
- [3] G. Plunien, B. Müller, W. Greiner, “The Casimir effect”, *Phys. Rept.*, **134**:1–2 (1986), 87–193.
- [4] K. A. Milton, “Casimir energies and pressures for δ -function potentials”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:24 (2004), 6391–6406.
- [5] R. L. Jaffe, “Casimir effect and the quantum vacuum”, *Phys. Rev. D*, **72**:2 (2005), 021301, 5 pp.
- [6] V. N. Marachevsky, “The Casimir effect: medium and geometry”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:37 (2012), 374021, 17 pp.
- [7] S. Scheel, S. Y. Buhmann, “Macroscopic quantum electrodynamics – concepts and applications”, *Acta Phys. Slovaca*, **58**:5 (2008), 675–809.
- [8] S. Y. Buhmann, *Dispersion Forces I: Macroscopic Quantum Electrodynamics and Ground-State Casimir, Casimir–Polder and van der Waals Forces*, Springer Tracts in Modern Physics, **247**, Springer, Berlin–Heidelberg, 2012; *Dispersion Forces II: Many-Body Effects, Excited Atoms, Finite Temperature and Quantum Friction*, Springer Tracts in Modern Physics, **248**, Springer, Berlin–Heidelberg, 2012.
- [9] D. Fursaev, D. Vassilevich, *Operators, Geometry and Quanta: Methods of Spectral Geometry in Quantum Field Theory*, Springer, Dordrecht, 2011.
- [10] Е. М. Сантанжело, “Вычисление энергии Казимира с помощью спектральных функций”, *ТМФ*, **131**:1 (2002), 98–117.
- [11] M. Bordag, I. Pirozhenko, “Vacuum energy between a sphere and a plane at finite temperature”, *Phys. Rev. D*, **81**:8 (2010), 085023, 12 pp.
- [12] Е. М. Лифшиц, “Теория молекулярных сил притяжения между твердыми телами”, *ЖЭТФ*, **29**:7 (1955), 94–112.
- [13] A. Lambrecht, V. N. Marachevsky, “Casimir interaction of dielectric gratings”, *Phys. Rev. Lett.*, **101**:16 (2008), 160403, 4 pp.
- [14] A. Lambrecht, V. N. Marachevsky, *Internat. J. Modern Phys. A*, **24**:8–9 (2009), 1789–1795.
- [15] В. Н. Марачевский, “Флуктуационный потенциал взаимодействия нейтрального атома с дифракционной решеткой”, *ТМФ*, **185**:1 (2015), 151–161.
- [16] H. B. G. Casimir, D. Polder, “The influence of retardation on the London–van der Waals forces”, *Phys. Rev.*, **73**:4 (1948), 360–372.
- [17] S. J. Rahi, T. Emig, N. Graham, R. L. Jaffe, M. Kardar, “Scattering theory approach to electrodynamic Casimir forces”, *Phys. Rev. D*, **80**:8 (2009), 085021, 27 pp.
- [18] H. Bender, C. Stehle, C. Zimmermann, S. Slama, J. Fiedler, S. Scheel, S. Y. Buhmann, V. N. Marachevsky, “Probing atom-surface interactions by diffraction of Bose–Einstein condensates”, *Phys. Rev. X*, **4**:1 (2014), 011029, 10 pp.
- [19] I. V. Fialkovsky, V. N. Marachevsky, D. V. Vassilevich, “Finite-temperature Casimir effect for graphene”, *Phys. Rev. B*, **84**:3 (2011), 035446, 10 pp.
- [20] G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko, “Theory of the Casimir interaction from graphene-coated substrates using the polarization tensor and comparison with experiment”, *Phys. Rev. B*, **89**:11 (2014), 115419, 8 pp.
- [21] E. Elizalde, D. V. Vassilevich, “Heat kernel coefficients for Chern–Simons boundary conditions in QED”, *Class. Quantum Grav.*, **16**:3 (1999), 813–822.

- [22] M. Bordag, D. V. Vassilevich, “Casimir force between Chern–Simons surfaces”, *Phys. Lett. A*, **268**:1–2 (2000), 75–80.
- [23] V. N. Markov, Yu. M. Pis'mak, “Casimir effect for thin films in QED”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:21 (2006), 6525–6532.
- [24] V. N. Marachevsky, Yu. M. Pis'mak, “Casimir–Polder effect for a plane with Chern–Simons interaction”, *Phys. Rev. D*, **81**:6 (2010), 065005, 6 pp.
- [25] D. Yu. Pis'mak, Yu. M. Pis'mak, F. J. Wegner, “Electromagnetic waves in a model with Chern–Simons potential”, *Phys. Rev. E*, **92**:1 (2015), 013204, 7 pp.
- [26] O. Kenneth, I. Klich, “Opposites attract: a theorem about the Casimir force”, *Phys. Rev. Lett.*, **97**:16 (2001), 160401, 4 pp.