Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гриб, Ю. В. Павлов, Черные дыры и частицы с нулевой и отрицательной энергией, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 2, 312–324

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9124>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 02:21:18

© 2017 г.

А. А. Гриб^{*†}, Ю. В. Павлов^{‡§}

ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ И ЧАСТИЦЫ С НУЛЕВОЙ И ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Исследуются свойства частиц с нулевой и отрицательной энергией и ненулевыми значениями проекции орбитального момента в эргосфере вращающейся черной дыры. Показано, что знак энергии частицы однозначно определяется угловой скоростью ее вращения в эргосфере. Приводится простое доказательство того факта, что экстремальные черные дыры не могут существовать. Исследован вопрос о возможности неограниченного роста энергии в системе центра масс двух сталкивающихся частиц, из которых одна или обе обладают отрицательной или нулевой энергией.

Ключевые слова: черные дыры, метрика Керра, частицы с отрицательной энергией, столкновения частиц, геодезические.

DOI: 10.4213/tmf9124

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в эргосфере вращающихся черных дыр, описываемых метрикой Керра, существуют особые геодезические, по которым могут двигаться частицы с отрицательной или нулевой (при ненулевой проекции момента количества движения) энергией [1]–[3]. Такие частицы, конечно же, не наблюдаются во внешней по отношению к эргосфере области, где существуют частицы только с положительной энергией.

Работа поддержана РФФИ (грант № 15-02-06818_a) и средствами субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

^{*}Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: andrei_grib@mail.ru

[†]Лаборатория теоретической физики им. А.А. Фридмана, Санкт-Петербург, Россия

[‡]Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: yuri.pavlov@mail.ru

[§]Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, Казань, Россия

В настоящей работе проводится систематический анализ свойств геодезических в эргосфере черной дыры, получены ограничения для энергии и для проекции орбитального момента частиц с любым значением энергии. На основе полученных ограничений доказано утверждение о том, что не может существовать экстремальная черная дыра с критическим значением собственного углового момента вращения черной дыры. Показано, что геодезические частиц с нулевой энергией в эргосфере черной дыры выходят из-под гравитационного радиуса и затем обратно уходят под гравитационный радиус (как и геодезические частиц с отрицательной энергией, что было показано нами ранее [4]). Получены оценки для угловой скорости частиц с положительной, отрицательной и нулевой энергией. Также исследуется вопрос о возрастании энергии в системе центра масс для двух сталкивающихся частиц при наличии частиц с отрицательной и нулевой энергией.

В статье используется система единиц, в которой гравитационная постоянная и скорость света равны единице: $G = c = 1$.

2. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ В МЕТРИКЕ КЕРРА

Метрика Керра вращающейся черной дыры [5] в координатах Бойера–Линдквиста [6] имеет вид

$$ds^2 = \frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma^2} dt^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \Sigma^2 (d\varphi - \omega dt)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, & \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2, \\ \Sigma^2 &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, & \omega &= \frac{2Mra}{\Sigma^2}, \end{aligned}$$

M – масса черной дыры, aM – ее момент импульса. Мы полагаем $0 \leq a \leq M$. Горизонт событий черной дыры Керра соответствует поверхности, которая задается уравнением $r = r_{\text{н}} \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2}$. Поверхность, задающаяся уравнением $r = r_{\text{с}} \equiv M - \sqrt{M^2 - a^2}$, называется горизонтом Коши. Поверхность предела статичности определяется формулой $r = r_1 \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$. Область пространства-времени между пределом статичности и горизонтом событий называется эргосферой [1], [3]. На границе эргосферы величина $S(r, \theta) = r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta$ обращается в ноль, внутри эргосферы $S(r, \theta) < 0$.

Используя соотношение

$$S\Sigma^2 + 4M^2 r^2 a^2 \sin^2 \theta = \rho^4 \Delta, \quad (2)$$

запишем уравнения геодезических для метрики Керра (1) в виде (см. монографии [2], § 62 или [3], п. 3.4.1)

$$\rho^2 \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\Delta} (\Sigma^2 E - 2MraJ), \quad \rho^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{\Delta} \left(2MraE + \frac{SJ}{\sin^2 \theta} \right), \quad (3)$$

$$\rho^2 \frac{dr}{d\lambda} = \sigma_r \sqrt{R}, \quad \rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sigma_\theta \sqrt{\Theta}, \quad (4)$$

где

$$R = \Sigma^2 E^2 - \frac{S J^2}{\sin^2 \theta} - 4 M r a E J - \Delta [m^2 \rho^2 + \Theta], \quad (5)$$

$$\Theta = Q - \cos^2 \theta \left[a^2 (m^2 - E^2) + \frac{J^2}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (6)$$

Здесь $E = \text{const}$ – энергия движущейся частицы (называемая в работе [1] энергией на бесконечности), J – сохраняющаяся проекция момента импульса частицы на ось вращения черной дыры, m – масса покоя движущейся частицы, λ – аффинный параметр вдоль геодезической, $\lambda = \tau/m$ для частицы с $m \neq 0$, где τ – ее собственное время, и Q – постоянная Картера, $Q = 0$ при движении в экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2$). Постоянные σ_r , $\sigma_\theta = \pm 1$ определяют направление движения по координатам r , θ .

Уравнения геодезических (3), (4) совпадают с уравнениями Эйлера–Лагранжа для лагранжиана

$$L = \frac{g_{ik}}{2} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda}. \quad (7)$$

Соответствующие обобщенные импульсы равны

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^i}{d\lambda} \right)} = g_{ik} \frac{dx^k}{d\lambda}, \quad (8)$$

$$p_t = E, \quad p_r = -\sigma_r \frac{\sqrt{R}}{\Delta}, \quad p_\theta = -\sigma_\theta \sqrt{\Theta}, \quad p_\varphi = -J. \quad (9)$$

Прямыми вычислениями несложно проверить, что $p_i p_k g^{ik} = m^2$. Отметим, что знаки компонент импульса в (9) соответствуют знакам ковариантных компонент 4-импульса в книге [7] (см. § 9): $p_i = (E, -\mathbf{p})$. На геодезических импульсы p_t и p_φ постоянны, т.е. постоянны E и J , это следует из того, что компоненты метрики Керра (1) не зависят от времени t и угловой координаты φ . То, что сохраняющийся на геодезической параметр E интерпретируется как энергия частицы, можно также получить исходя из метрического тензора энергии-импульса для классического действия точечной частицы [8].

Как следует из (4), параметры, характеризующие любую геодезическую, должны удовлетворять условиям

$$R \geq 0, \quad \Theta \geq 0. \quad (10)$$

Для геодезической, которая отвечает траектории движущейся пробной частицы снаружи горизонта событий, должно выполняться также условие движения “вперед во времени”:

$$\frac{dt}{d\lambda} > 0. \quad (11)$$

Условия (10), (11) приводят к следующим неравенствам для возможных значений энергии E и проекции углового момента J пробной частицы в точке с координатами (r, θ) при фиксированном значении $\Theta \geq 0$ [9]:

снаружи эргосферы, при $S(r, \theta) > 0$,

$$E \geq \frac{1}{\rho^2} \sqrt{(m^2 \rho^2 + \Theta) S}, \quad J_-(r, \theta) \leq J \leq J_+(r, \theta), \quad (12)$$

$$J_\pm(r, \theta) = \frac{\sin \theta}{S} [-2r M a E \sin \theta \pm \sqrt{\Delta(\rho^4 E^2 - (m^2 \rho^2 + \Theta) S)}]; \quad (13)$$

на границе эргосферы (при $\theta \neq 0, \pi$)

$$r = r_1(\theta) \implies E \geq 0, \quad (14)$$

$$J \leq E \left[\frac{Mr_1(\theta)}{a} + a \sin^2 \theta \left(1 - \frac{m^2}{2E^2} - \frac{\Theta}{4Mr_1(\theta)E^2} \right) \right], \quad (15)$$

при этом возможно значение $E = 0$, когда $m = 0$, $\Theta = 0$, и тогда допустимо любое значение $J < 0$;

внутри эргосферы, при $r_{\text{н}} < r < r_1(\theta)$, $S(r, \theta) < 0$,

$$J \leq \frac{\sin \theta}{-S} [2rMaE \sin \theta - \sqrt{\Delta(\rho^4 E^2 - (m^2 \rho^2 + \Theta)S)}], \quad (16)$$

а значение энергии частицы может, как известно, быть любым – как положительным, так и отрицательным.

Как видно из неравенств (15), (16), на границе и внутри эргосферы проекция момента импульса частиц, движущихся по геодезическим, может быть отрицательной и сколь угодно большой по абсолютной величине при фиксированном значении энергии. Это свойство, найденное в работах [9], [10] для метрики Керра, как было показано позднее в работе [11], справедливо в эргосфере любой черной дыры с аксиально симметричной метрикой.

Если заданы проекция момента импульса частицы J и значение $\Theta \geq 0$, то из условий (10), (11) получаем, что в любой точке снаружи горизонта

$$E \geq \frac{1}{\Sigma^2} \left[2Mr_a J + \sqrt{\Delta \left(\frac{\rho^4 J^2}{\sin^2 \theta} + (m^2 \rho^2 + \Theta) \Sigma^2 \right)} \right]. \quad (17)$$

Нижняя граница значений энергии здесь соответствует $R = 0$. Из этого неравенства видно, что энергия в эргосфере может быть отрицательной только при отрицательной проекции момента импульса частицы.

3. ВЛИЯНИЕ ПАДАЮЩИХ ЧАСТИЦ НА ВРАЩЕНИЕ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

При стремлении r к горизонту $r_{\text{н}}$ (для $\theta \neq 0, \pi$) из (16) и (17) получим соответственно

$$J \leq J_{\text{н}} = \frac{2Mr_{\text{н}}E}{a}, \quad E \geq \frac{aJ}{2Mr_{\text{н}}}. \quad (18)$$

Следовательно, $J_{\text{н}}$ является верхней границей значений проекции момента импульса частицы с энергией E у горизонта событий черной дыры.

Используем первое из неравенств (18) для оценки влияния падающих частиц на безразмерный угловой момент $A = a/M$ черной дыры. Из законов сохранения энергии и импульса получим формулу для безразмерного углового момента черной дыры после падения сквозь горизонт событий частицы:

$$A' = \frac{aM + J}{(M + E)^2}. \quad (19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} A' - A &= \frac{J - AE^2 - 2AME}{(M + E)^2} \leq \\ &\leq \frac{J_{\text{н}} - AE^2 - 2AME}{(M + E)^2} = \frac{2E(Mr_{\text{н}}/a - a) - E^2a/M}{(M + E)^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Полагая в этом соотношении $A = 1$ и учитывая, что в этом случае $r_{\text{н}} = a = M$, получаем доказательство следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Падение частицы на экстремальную черную дыру с $A = 1$ приводит к уменьшению ее безразмерного углового момента. Черная дыра становится неэкстремальной.*

Это свидетельствует о том, что экстремальные черные дыры в природе не могут существовать. Отметим, что оценка из работы [12] для предельного момента импульса черной дыры, достижимого при аккреции вещества на нее, составляет $a = 0.998M$.

Принимая во внимание, что при нулевой энергии $J < 0$, и используя левую часть неравенства (20), а для отрицательных энергий используя правую часть неравенства (20), получим следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Падение частицы с нулевой или отрицательной энергией на черную дыру с $A \leq 1$ приводит к уменьшению ее безразмерного углового момента.*

Для пробных частиц ($|E|/M \ll 1$) с $J \approx J_{\text{н}}$ имеем

$$A' - A \approx \frac{2E(Mr_{\text{н}}/a - a) - E^2a/M}{(M + E)^2} \approx \frac{2E(Mr_{\text{н}}/a - a)}{(M + E)^2}. \quad (21)$$

Поэтому справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *При падении пробных частиц с положительной энергией и проекцией момента импульса, близкой к максимальному значению $J_{\text{н}}$, на неэкстремальную черную дыру с $A < 1$ ее безразмерный угловой момент возрастает.*

Отметим здесь, что для неэкстремальных черных дыр допустимые значения J в окрестности снаружи горизонта всегда строго меньше $J_{\text{н}}$ (см., например, работу [13]).

Для случая частиц, свободно падающих на неэкстремальную черную дыру из бесконечности, докажем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Безразмерный угловой момент неэкстремальной черной дыры всегда может быть увеличен за счет свободного падения из бесконечности специально подобранных частиц.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простой анализ уравнений геодезических позволяет убедиться, что для нерелятивистской на бесконечности частицы с $E = m$ условием падения на черную дыру из бесконечности в экваториальной плоскости является неравенство

$$-2(1 + \sqrt{1 + A}) \leq \frac{J}{mM} \leq 2(1 + \sqrt{1 - A}). \quad (22)$$

При падении пробных частиц с $E = m \ll M$ и $J = 2(1 + \sqrt{1 - A})mM$ мы имеем

$$A' - A = \frac{2(1 + \sqrt{1 - A})mM - Am^2 - 2AmM}{(M + m)^2} \approx \frac{2mM}{(M + m)^2}(1 - A + \sqrt{1 - A}) > 0, \quad (23)$$

что и доказывает сделанное утверждение.

Отметим, что в силу простоты доказательства наших утверждений нет необходимости использовать законы механики черных дыр, сформулированные в известной работе [14] по аналогии с термодинамикой.

4. ЧАСТИЦЫ С НУЛЕВОЙ ЭНЕРГИЕЙ В МЕТРИКЕ КЕРРА

В литературе по черным дырам практически отсутствует исследование свойств частиц с нулевой энергией. Рассмотрим особенности геодезических для таких частиц.

Значения $E = 0$ возможны на границе и внутри эргосферы. Из условия $\Theta \geq 0$ (см. (10)) и выражения (6) получаем

$$E = 0 \implies Q \geq 0, \quad (24)$$

т. е. у пробных частиц с нулевой энергией константа Картера неотрицательна.

Из условия (11) и выражения (3) для $dt/d\lambda$ получаем

$$E = 0, \quad \rho^2 \frac{dt}{d\lambda} = -\frac{2rMaJ}{\Delta} > 0 \implies J < 0, \quad (25)$$

т. е. проекция момента импульса у частиц с нулевой энергией отрицательна. Из неравенства (16) для частиц с нулевой энергией внутри эргосферы имеем

$$E = 0 \implies J \leq -\sin\theta \sqrt{\frac{\Delta(m^2\rho^2 + \Theta)}{-S}}. \quad (26)$$

В случае нулевой энергии частицы

$$E = 0 \implies R = -\Delta(m^2\rho^2 + \Theta) - \frac{J^2}{\sin^2\theta} S(r, \theta). \quad (27)$$

Поэтому верхняя точка траектории массивных частиц с нулевой энергией лежит внутри эргосферы, $r < r_1(\theta)$.

Движение по координате θ может продолжаться до тех пор, пока величина $\Theta(\theta)$ не обратится в ноль. Поэтому в случае $m = 0$ из (27) получаем, что верхняя точка траектории безмассовых частиц с нулевой энергией лежит на границе эргосферы, $r = r_1(\theta)$. Из уравнения геодезических при нулевой энергии следует, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{-S(r)}{2rMa\sin^2\theta} = \frac{r^2 - 2rM + a^2\cos^2\theta}{-2rMa\sin^2\theta}. \quad (28)$$

Поэтому угловая скорость любых частиц с нулевой энергией не зависит от массы и момента импульса частицы и определяется формулой (28). Если частица с нулевой энергией достигает границы эргосферы (при этом обязательно $m = 0$), то $S(r) = 0$ и

$$r \rightarrow r_1(\theta) \implies \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow 0. \quad (29)$$

Рис. 1. Траектория фотонов в эргосфере черной дыры с $a = M$ для случаев $E = 0$ (а) и $E > 0$, $J = ME$ (б).

Для радиальной скорости частицы с нулевой энергией имеем

$$E = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\sigma_r \Delta}{2Mra} \sqrt{\frac{-S}{\sin^2 \theta} - \Delta \frac{m^2 \rho^2 + \Theta}{J^2}}, \quad (30)$$

следовательно, радиальная скорость, вообще говоря, зависит от момента импульса. А именно, в случае $m^2 \rho^2 + \Theta > 0$ в точке с заданным r в эргосфере радиальная скорость тем больше по абсолютной величине, чем больше $|J|$, и может меняться от

$$\frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad J = -\sin \theta \sqrt{\frac{\Delta(m^2 \rho^2 + \Theta)}{-S}}$$

до

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\sigma_r \Delta \sqrt{-S}}{2Mra \sin \theta} \quad \text{при} \quad J \rightarrow -\infty.$$

Траектория фотонов в экваториальной плоскости ($m = 0$, $\Theta = 0$) не зависит от значения углового момента, как видно из уравнений (3), (4). В полярных координатах уравнение этой траектории записывается в элементарных функциях и имеет наиболее простой вид при $a = M$:

$$\varphi(r) - \varphi(2M) = \pm \left(\arcsin \left(\frac{r}{M} - 1 \right) + \frac{\sqrt{(2M-r)r}}{r-M} - \frac{\pi}{2} \right). \quad (31)$$

Часть этой траектории показана на рис. 1а, где использована радиальная координата r/M . На рис. 1б показана траектория фотона, движущегося в экваториальной плоскости по геодезической с положительной энергией и проекцией орбитального момента $J = ME$. Уравнение геодезической при $a = M$ имеет вид

$$\varphi(r) - \varphi(2M) = \pm \frac{2M-r}{r-M}. \quad (32)$$

Представленные траектории, как и траектории любых частиц, пересекающих горизонт событий черной дыры, оборачиваются вокруг горизонта бесконечно много раз. Действительно, из уравнений геодезических (3), (4) следует, что вблизи горизонта

$$\frac{d\varphi}{dr} \sim \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{(r - r_{\text{H}})(r - r_{\text{C}})}. \quad (33)$$

Отметим, что за исключением случая $a = M$, $J = J_{\text{H}} > 0$ бесконечное число оборотов массивная частица совершает за конечное собственное время!

Ранее нами было показано [4], что геодезические частиц с отрицательной энергией в эргосфере начинаются и заканчиваются на поверхности r_{H} . Докажем здесь, что также *геодезические частиц с нулевой энергией в эргосфере начинаются и заканчиваются на поверхности r_{H}* . Для этого определим эффективный потенциал формулой

$$V_{\text{eff}} = -\frac{R}{2\rho^4}. \quad (34)$$

В соответствии с уравнением (4) имеем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{\text{eff}} = 0, \quad \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}. \quad (35)$$

Необходимое условие существования орбит с постоянным значением r (сферических орбит) записывается как

$$V_{\text{eff}} = 0, \quad \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0. \quad (36)$$

Для доказательства сделанного утверждения достаточно доказать (см. работу [4]), что

$$E = 0, \quad r > r_{\text{H}}, \quad V_{\text{eff}}(r) = 0 \quad \implies \quad V'_{\text{eff}}(r) > 0. \quad (37)$$

Дифференцируя соотношение (27), получаем

$$E = 0 \quad \implies \quad R'(r) = -2 \left[(r - M) \left(\frac{J^2}{\sin^2 \theta} + m^2 \rho^2 + \Theta \right) + m^2 r \Delta \right], \quad (38)$$

откуда, очевидно, следует, что условие (37) выполнено. Это доказывает наше утверждение и, в частности, показывает отсутствие сферических орбит для частиц с нулевой энергией.

Отметим, что из (37), как показано в работе [4], следует конечность собственного времени движения частиц с нулевой энергией в эргосфере (или аффинного параметра λ для фотонов).

Как видно из рис. 1, имеются траектории фотонов с положительной энергией (а также, как можно убедиться с помощью аналогичных рисунков, и с отрицательной энергией), которые визуальнo мало отличаются от траектории фотона с нулевой энергией. Рассмотрим далее вопрос, по каким простым свойствам движения частиц в эргосфере можно различить частицы с отрицательными, нулевыми и положительными энергиями.

5. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ ЧАСТИЦ В ЭРГОСФЕРЕ

Найдем ограничения для угловой скорости частиц в эргосфере из условия $ds^2 \geq 0$. Имеем

$$g_{00} dt^2 + 2g_{0\varphi} dt d\varphi + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 \geq 0, \quad (39)$$

и угловая скорость $\Omega = d\varphi/dt$ любых частиц удовлетворяет ограничениям [15]

$$\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2, \quad \Omega_{1,2} = \frac{g_{0\varphi} \mp \sqrt{g_{0\varphi}^2 - g_{00}g_{\varphi\varphi}}}{-g_{\varphi\varphi}}. \quad (40)$$

На границе эргосферы $g_{00} = 0$ и $\Omega_1 = 0$. Внутри эргосферы $g_{00} < 0$, $\Omega_{1,2} > 0$ и все частицы движутся по направлению вращения черной дыры [1]–[3]. При приближении к горизонту событий

$$\lim_{r \rightarrow r_H} \Omega_1(r) = \lim_{r \rightarrow r_H} \Omega_2(r) = \omega_{\text{Bh}} = \frac{a}{2Mr_H}. \quad (41)$$

Величину ω_{Bh} называют угловой скоростью вращения черной дыры.

Подставив компоненты метрики (1) в (40), получим предельные значения угловых скоростей для вращающейся черной дыры Керра:

$$\Omega_{1,2} = \frac{2Mr a \sin \theta \mp \rho^2 \sqrt{\Delta}}{\Sigma^2 \sin \theta} = \omega \mp \frac{\rho^2 \sqrt{\Delta}}{\Sigma^2 \sin \theta}. \quad (42)$$

Из уравнений геодезических для угловой скорости свободно движущихся частиц имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2Mr a E + S J / \sin^2 \theta}{\Sigma^2 E - 2Mr a J} = \omega + \frac{\Delta \rho^4 J}{\Sigma^2 (\Sigma^2 E - 2Mr a J) \sin^2 \theta}. \quad (43)$$

Из ранее найденного ограничения (16) для частиц с отрицательной энергией получаем оценку

$$\frac{J}{EM} \geq \frac{\sin \theta}{-S(r)} \left(2ra \sin \theta + \frac{1}{M} \sqrt{\Delta \left[\rho^4 - \left(\frac{m^2}{E^2} \rho^2 + \frac{\Theta}{M^2 E^2} \right) S(r) \right]} \right), \quad (44)$$

а для частиц с положительной энергией в эргосфере – оценку

$$\frac{J}{EM} \leq \frac{\sin \theta}{-S(r)} \left(2ra \sin \theta - \frac{1}{M} \sqrt{\Delta \left[\rho^4 - \left(\frac{m^2}{E^2} \rho^2 + \frac{\Theta}{M^2 E^2} \right) S(r) \right]} \right). \quad (45)$$

Подставляя граничные значения выражений (44), (45) при $m = 0$ и $\Theta = 0$ в (43), получаем выражения для Ω_1 и Ω_2 (см. формулы (42)). Учтя, что угловая скорость $d\varphi/dt$ согласно (43) растет с ростом J/EM на каждом из промежутков непрерывности $(-\infty, \Sigma^2/2M^2ra)$ и $(\Sigma^2/2M^2ra, +\infty)$, получим разбиение области возможных угловых скоростей в эргосфере на две подобласти: нижнюю для частиц с отрицательной энергией и верхнюю для частиц с положительной энергией (см. рис. 2).

Перейдя в равенстве (43) к пределу $|J/EM| \rightarrow \infty$, получим выражение (28). Поэтому граница областей для частиц с положительной и отрицательной энергией – это линия, соответствующая угловой скорости частиц с нулевой энергией. В случае вращения в экваториальной плоскости данная линия является прямой. Таким

Рис. 2. Области возможных значений угловых скоростей частиц в эргосфере для $\theta = \pi/2$ и при $a/M = 0.5$ (а), $a/M = 1/\sqrt{2}$ (б), $a/M = 0.95$ (в), $a/M = 1$ (г). Светло-серая область отвечает угловым скоростям частиц с положительной энергией, темно-серая – скоростям частиц с отрицательной энергией.

образом, значение угловой скорости частицы в эргосфере при заданном значении радиальной координаты однозначно указывает на знак энергии частицы и на величину отношения J/EM . Частицы с нулевой энергией – это частицы, которые движутся в эргосфере с угловой скоростью, определяющейся выражением (28). Они отделяют по значению угловой скорости вращения при заданном r частицы в эргосфере с отрицательной энергией от частиц с положительной энергией. *Частицы с отрицательной энергией – это частицы, которые вращаются в эргосфере с угловой скоростью, меньшей чем скорость* (28)!

Из формул (42) легко получить, что

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial \Omega_2}{\partial r} \right|_{r=2M} = \frac{1 - 2A^2}{(2 + A^2)^2},$$

поэтому касательная к графику функции $\Omega_2(r)$ в точке с $r = 2M$ (на границе эргосферы) горизонтальна при $A = 1/\sqrt{2}$, что видно на рис. 2б. Штриховая линия на рис. 2в, 2г соответствует круговым экваториальным орбитам массивных частиц, а ее предельная точка на границе области возможных угловых скоростей – круговой фотонной орбите. Круговые экваториальные орбиты в эргосфере возможны только

для частиц с положительной энергией и только при $A \geq 1/\sqrt{2}$. Как известно [2], [3], [16], наименьшее возможное значение радиуса круговой экваториальной орбиты при заданном A соответствует круговой орбите фотонов с $J > 0$ и равно

$$r_+ = 2M \left[1 + \cos \left(\frac{2}{3} \arccos \frac{-a}{M} \right) \right].$$

6. ЭНЕРГИЯ СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ В СИСТЕМЕ ЦЕНТРА МАСС

Энергию $E_{\text{с.м.}}$ в системе центра масс двух сталкивающихся частиц с массами покоя m_1 и m_2 найдем, возведя в квадрат выражение

$$(E_{\text{с.м.}}, 0, 0, 0) = p_{(1)}^i + p_{(2)}^i, \quad (46)$$

где $p_{(n)}^i$ – 4-импульсы частиц ($n = 1, 2$). Поскольку $p_{(n)}^i p_{(n)i} = m_n^2$, мы имеем

$$E_{\text{с.м.}}^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_{(1)}^i p_{(2)i}. \quad (47)$$

Для свободно падающих частиц с энергиями E_1, E_2 (относительно энергии на бесконечности) и моментами импульса J_1, J_2 из уравнений геодезических получим

$$E_{\text{с.м.}}^2 = m_1^2 + m_2^2 - \frac{2}{\rho^2} \sigma_{1\theta} \sigma_{2\theta} \sqrt{\Theta_1 \Theta_2} + \\ + \frac{2}{\Delta \rho^2} \left[E_1 E_2 \Sigma^2 - 2Mra(E_1 J_2 + E_2 J_1) - J_1 J_2 \frac{S}{\sin^2 \theta} - \sigma_{1r} \sigma_{2r} \sqrt{R_1 R_2} \right]. \quad (48)$$

Если частицы движутся по радиальной координате сонаправленно ($\sigma_{1r} \sigma_{2r} = 1$), то в пределе $r \rightarrow r_{\text{н}}$, раскрывая в последнем слагаемом в (48) неопределенность вида $0/0$, получим для столкновений на горизонте

$$E_{\text{с.м.}}^2 = m_1^2 + m_2^2 - \frac{2}{\rho^2} \sigma_{1\theta} \sigma_{2\theta} \sqrt{\Theta_{1\text{н}} \Theta_{2\text{н}}} + \left(m_1^2 + \frac{\Theta_{1\text{н}}}{\rho_{\text{н}}^2} \right) \frac{J_{2\text{н}} - J_2}{J_{1\text{н}} - J_1} + \\ + \left(m_2^2 + \frac{\Theta_{2\text{н}}}{\rho_{\text{н}}^2} \right) \frac{J_{1\text{н}} - J_1}{J_{2\text{н}} - J_2} + \frac{\rho_{\text{н}}^2}{4M^2 r_{\text{н}}^2 \sin^2 \theta} \frac{(J_{1\text{н}} J_2 - J_{2\text{н}} J_1)^2}{(J_{1\text{н}} - J_1)(J_{2\text{н}} - J_2)}. \quad (49)$$

Если одна из частиц имеет проекцию момента импульса $J = J_{\text{н}}$ (критическая частица), а у второй $J \neq J_{\text{н}}$, то энергия столкновения на горизонте расходится. Для экстремально вращающихся черных дыр это было обнаружено в работе [17]. Для неэкстремальных черных дыр в окрестности горизонта значение $J = J_{\text{н}}$ недопустимо, однако при многократных столкновениях, вообще говоря, возможно [18], [19], что J достигает значений, сколь угодно близких к $J_{\text{н}}$, при $r \rightarrow r_{\text{н}}$. Можно получить сколь угодно большую энергию столкновений, если в результате многократных столкновений или воздействия внешних полей частица приобретает большую по абсолютной величине, но отрицательную проекцию момента импульса [9], [10], и это возможно при фиксированном значении энергии частиц в соответствии с неравенством (16).

Энергия встречных столкновений ($\sigma_{1r} \sigma_{2r} = -1$) на горизонте расходится,

$$E_{\text{с.м.}}^2 \sim \frac{4a^2}{\Delta \rho^2} (J_{1\text{н}} - J_1)(J_{2\text{н}} - J_2) \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow r_{\text{н}}, \quad (50)$$

Рис. 3. Энергия столкновения частицы с $J = 0$ и $E = m$ со второй частицей с $J = -16.487mM$ и энергией $E_2 = m$ (кривая 1), $E_2 = 0$ (кривая 2), $E_2 = -m$ (кривая 3).

если $J_i \neq J_{iH}$. Этот вариант достижения сверхвысокой энергии столкновения возможен для частиц, движущихся по геодезическим белой дыры [20], [21].

Формулы (46)–(50) справедливы для любых сталкивающихся частиц, как с положительной, так и с отрицательной энергией. При любых значениях энергии частиц энергия в системе центра масс всегда удовлетворяет неравенству $E_{c.m.} \geq m_1 + m_2$, поскольку сталкивающиеся частицы в системе центра масс движутся навстречу друг другу с некоторыми скоростями. Три указанных выше способа достижения неограниченно большой энергии столкновения также могут реализоваться и для частиц с отрицательной (нулевой) энергией.

Расчеты энергии столкновения двух частиц одинаковых масс m , одна из которых падает из бесконечности на черную дыру с $a = 0.95M$, а другая имеет положительную, нулевую или отрицательную энергию, представлены на рис. 3. При выбранном значении проекции момента импульса $J \approx -16.487mM$ радиальная составляющая скорости частицы с отрицательной энергией равна нулю в черной дыре с $a = 0.95M$ в точке с $r = 1.8M$. Поэтому энергия столкновения здесь максимальна. Остальные частицы падают с ненулевой радиальной скоростью в интервале $r \in (M, 1.8M)$, и энергия столкновения меньше.

Список литературы

- [1] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация*, Мир, М., 1977.
- [2] С. Чандрасекар, *Математическая теория черных дыр*, Мир, М., 1986.
- [3] И. Д. Новиков, В. П. Фролов, *Физика черных дыр*, Наука, М., 1986.
- [4] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, V. D. Vertogradov, “Geodesics with negative energy in the ergosphere of rotating black holes”, *Modern Phys. Lett. A*, **29**:20 (2014), 1450110, 9 pp., arXiv: 1304.7360.
- [5] R. P. Kerr, “Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics”, *Phys. Rev. Lett.*, **11**:5 (1963), 237–238.

- [6] R. H. Boyer, R. W. Lindquist, “Maximal analytic extension of the Kerr metric”, *J. Math. Phys.*, **8**:2 (1967), 265–281.
- [7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, М., 1988.
- [8] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, “Particles with negative energies in black holes”, *Internat. J. Modern Phys. D*, **20**:5 (2011), 675–684.
- [9] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, “On the energy of particle collisions in the ergosphere of the rotating black holes”, *Europhys. Lett.*, **101**:2 (2013), 20004, arXiv: 1301.0698.
- [10] А. А. Гриб, Ю. В. Павлов, “Энергия столкновений частиц в эргосфере вращающихся черных дыр”, *ТМФ*, **176**:1 (2013), 60–68.
- [11] O. B. Zaslavskii, “Acceleration of particles as a universal property of ergosphere”, *Modern Phys. Lett. A*, **28**:11 (2013), 1350037, 8 pp.
- [12] K. S. Thorne, “Disk-accretion onto a black hole. II. Evolution of the hole”, *Astrophys. J.*, **191**:2 (1974), 507–519.
- [13] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, “On particles collisions near rotating black holes”, *Grav. Cosmol.*, **17**:1 (2011), 42–46.
- [14] J. M. Bardeen, B. Carter, S. W. Hawking, “The four laws of black hole mechanics”, *Commun. Math. Phys.*, **31**:2 (1973), 161–170.
- [15] А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. Тюкольски, *Сборник задач по теории относительности и гравитации*, Мир, М., 1979.
- [16] J. M. Bardeen, W. H. Press, S. A. Teukolsky, “Rotating black holes: locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation”, *Astrophys. J.*, **178**:2 (1972), 347–369.
- [17] M. Bañados, J. Silk, S. M. West, “Kerr black holes as particle accelerators to arbitrarily high energy”, *Phys. Rev. Lett.*, **103**:11 (2009), 111102, 4 pp.
- [18] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, “On particles collisions in the vicinity of rotating black holes”, *Письма в ЖЭТФ*, **92**:3 (2010), 147–151.
- [19] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, “On particle collisions in the gravitational field of the Kerr black hole”, *Astropart. Phys.*, **34**:7 (2011), 581–586.
- [20] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, Are black holes totally black? *Grav. Cosmol.*, **21**:1 (2015), 13–18.
- [21] А. А. Гриб, Ю. В. Павлов, “Физика высоких энергий в окрестности вращающихся черных дыр”, *ТМФ*, **185**:1 (2015), 77–85.