Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Борк, А. И. Онищенко, Формфакторы в $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга–Миллса, мягкие теоремы и интегрируемость, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 3, 391–402

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9126>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:49:58

© 2017 г.

Л. В. Борк^{*†}, А. И. Онищенко^{‡§}

ФОРМФАКТОРЫ В $\mathcal{N} = 4$ МАКСИМАЛЬНО СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА, МЯГКИЕ ТЕОРЕМЫ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Обсуждается универсальное мягкое поведение формфакторов в $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга–Миллса в предельном случае, когда импульс одной из частиц стремится к нулю. Приводятся детали связи древесных формфакторов в данной теории и собственных функций $gl(4|4)$ интегрируемой спиновой цепочки.

Ключевые слова: $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса, амплитуды, формфакторы, интегрируемость, мягкие теоремы.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9126>

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние 10–15 лет большое внимание уделялось изучению амплитуд рассеяния (S -матрицы) в планарном пределе в $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга–Миллса [1]. Ожидается, что эта модель квантовой теории поля интегрируема в том смысле, что можно получить замкнутые выражения для всех амплитуд рассеяния (элементов S -матрицы теории) при любом значении константы связи. Результаты, полученные к текущему моменту, соответствуют этим ожиданиям, и считается, что $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса будет первым нетривиальным примером точно решаемой интегрируемой модели квантовой теории поля в размерности пространства-времени $d > 2$. Успехи в данном направлении

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-02-00494) и Министерства науки и образования РФ (контракт № 02.А03.21.0003 от 27.08.2013).

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: borkleonid@gmail.com

[†]Центр фундаментальных и прикладных исследований, Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н. Л. Духова, Москва, Россия

[‡]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия. E-mail: onish@bk.ru

[§]Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

связаны со сведением задачи о нахождении амплитуд или аномальных размерностей в теории к исследованию интегрируемых систем, таких как $\mathfrak{gl}(4|4)$ или $PSU(2, 2|4)$ квантовые спиновые цепочки. Эти системы могут быть решены точно с помощью методов анзаца Бете, Q -уравнения Бакстера, уравнения Хироты или их эквивалентов.

Помимо амплитуд рассеяния, которые могут быть схематично записаны как

$$\langle 0 | S | p_1^{h_1} \dots p_n^{h_n} \rangle,$$

где p_i и h_i – импульс и спиральность i -й частицы соответственно, можно рассматривать так называемые формфакторы, которые могут быть записаны в виде

$$\langle 0 | \mathcal{O} S | p_1^{h_1} \dots p_n^{h_n} \rangle.$$

Здесь S обозначает оператор S -матрицы теории, $\mathcal{O}$ – любой локальный оператор в теории, $|p_1^{h_1} \dots p_n^{h_n}\rangle$ соответствует n -частичному вектору состояния, $|0\rangle$ – вакуумное состояние теории. Формфакторы могут быть интерпретированы как амплитуды вероятности рождения частиц внешним классическим полем. Взаимодействие с внешним полем тогда описывается в лагранжиане теории локальным оператором $\mathcal{O}$.

Важным вопросом является то, какие свойства амплитуд переносятся на формфакторы. Например, можно ли свести задачу о вычислении формфакторов в $\mathcal{N} = 4$ теории Янга–Миллса к исследованию интегрируемой системы, как это было сделано для амплитуд рассеяния [2]–[5]?

2. АМПЛИТУДЫ И ФОРМФАКТОРЫ В $\mathcal{N} = 4$ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

$\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса является калибровочной теорией с наибольшей возможной суперсимметрией в четырех пространственно-временных измерениях [6], [7]. Физическими состояниями теории являются два глюона $|g^+\rangle$ и $|g^-\rangle$ с положительной (+1) и отрицательной (−1) спиральностями, четыре вейлевских фермиона $|\Gamma_A\rangle$ с отрицательной спиральностью $-1/2$, четыре вейлевских фермиона $\bar{\Gamma}^A$ с положительной спиральностью и шесть действительных скалярных частиц ϕ_{AB} (антисимметричных по $SU(4)_{\mathbb{R}}$ -индексам A, B). Все поля теории находятся в присоединенном представлении калибровочной группы $SU(N_c)$. Для описания амплитуд рассеяния в явно суперсимметричном виде удобно для каждой i -й частицы ввести четыре грасмановы переменные η_i^A , преобразующиеся по фундаментальному представлению $SU(4)_{\mathbb{R}}$ ($A = 1, 2, 3, 4$). Это позволяет объединить все операторы рождения-уничтожения, соответствующие упомянутым выше физическим состояниям $\mathcal{N} = 4$ теории Янга–Миллса, в один супероператор [8]:

$$\Omega_i = g_i^+ + \eta_i^A \Gamma_{i,A} - \frac{1}{2!} \eta_i^A \eta_i^B \phi_{i,AB} - \frac{1}{3!} \eta_i^A \eta_i^B \eta_i^C \epsilon_{ABCD} \bar{\Gamma}_i^D + \frac{1}{4!} \eta_i^A \eta_i^B \eta_i^C \eta_i^D \epsilon_{ABCD} g_i^-. \quad (1)$$

Многочастичные состояния тогда даются действием супероператора на вакуум:

$$|\Omega_{1,\dots,n}\rangle = \Omega_1 \Omega_2 \dots \Omega_n |0\rangle. \quad (2)$$

Упорядоченные по цвету амплитуды переходов между такими состояниями (элементы S -матрицы), которые обычно называются суперамплитудами рассеяния, могут

быть тогда формально записаны как

$$A_n(\{\lambda_1, \tilde{\lambda}_1, \eta_1\} \dots \{\lambda_n, \tilde{\lambda}_n, \eta_n\}) = \left\langle 0 \left| S \prod_{i=1}^n \Omega_i \right| 0 \right\rangle, \quad (3)$$

где мы использовали формализм спиральных спиноров, чтобы представить импульсы частиц p_i как произведение двух вейлевских спиноров $p_{i,\mu} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu = \lambda_{i,\alpha} \tilde{\lambda}_{i,\dot{\alpha}}$, преобразующихся по двум различным спинорным представлениям группы Лоренца $L_+^\uparrow = SO(3,1) = SO(4,C)_{\downarrow\mathbb{R}} \approx (SL(2,C) \otimes SL(2,C))_{\downarrow\mathbb{R}}$. Коэффициенты разложения суперамплитуды в ряд по грассмановым переменным η_i^A являются обычными амплитудами рассеяния. Например, амплитуда Парке–Тейлора $\langle g_1^- g_2^- g_3^+ \dots g_n^+ \rangle$ дается следующим коэффициентом:

$$A_n(\{\lambda_1, \tilde{\lambda}_1, \eta_1\} \dots \{\lambda_n, \tilde{\lambda}_n, \eta_n\}) = (\eta^1 \eta^2 \eta^3 \eta^4)_1 (\eta^1 \eta^2 \eta^3 \eta^4)_2 \langle g_1^- g_2^- g_3^+ \dots g_n^+ \rangle + \dots$$

Инвариантность суперамплитуды относительно преобразований суперсимметрии означает, что

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} A_n = q_\alpha^A A_n = \bar{q}_{A\dot{\alpha}} A_n = 0, \quad (4)$$

где для генераторов $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии в данном случае выбрано представление в виде [9]

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} = \sum_i^n \lambda_{i,\alpha} \tilde{\lambda}_{i,\dot{\alpha}}, \quad q_\alpha^A = \sum_i^n \lambda_{i,\alpha} \eta_i^A, \quad \bar{q}_{A\dot{\alpha}} = \sum_i^n \tilde{\lambda}_{i,\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \eta_i^A}. \quad (5)$$

Вследствие этих ограничений суперамплитуда может быть представлена как

$$A_n(\{\lambda_1, \tilde{\lambda}_1, \eta_1\} \dots \{\lambda_n, \tilde{\lambda}_n, \eta_n\}) = \delta^4(p_{\alpha\dot{\alpha}}) \delta^8(q_\alpha^A) \mathcal{P}_n(\{\lambda_1, \tilde{\lambda}_1, \eta_1\} \dots \{\lambda_n, \tilde{\lambda}_n, \eta_n\}), \quad (6)$$

где $\mathcal{P}_n$ – полином по грассмановым переменным η . Сама суперамплитуда является полиномом по η порядка¹⁾ $4n - 8$, и $\delta^8(q_\alpha^A)$ является полиномом η восьмой степени. Следовательно, полином $\mathcal{P}_n$ может быть записан в виде

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(0)} + \mathcal{P}_n^{(4)} + \dots + \mathcal{P}_n^{(4n-16)}, \quad (7)$$

где $\mathcal{P}_n^{(4m)}$ – однородные $SU(4)_{\mathbb{R}}$ -инвариантные полиномы степени $4m$, описывающие так называемые N^m MHV амплитуды²⁾, суммарная спиральность частиц в которых равна³⁾ $\lambda_\Sigma = n - 4 - 2m$. Например, все древесные MHV амплитуды даются выражением, аналогичным амплитуде Парке–Тейлора [11]:

$$A_n^{\text{MHV}} = \delta^4(p_{\alpha\dot{\alpha}}) \delta^8(q_\alpha^A) \mathcal{P}_n^{(0)}(\{\lambda_1, \tilde{\lambda}_1\} \dots \{\lambda_n, \tilde{\lambda}_n\}), \quad (8)$$

где

$$\mathcal{P}_n^{(0)} = \frac{1}{\langle 12 \rangle \dots \langle n1 \rangle},$$

¹⁾ Суперамплитуды с суммарной спиральностью частиц n и $n - 2$ равны нулю.

²⁾ MHV – maximal helicity violating. Подробное разъяснение происхождения термина можно найти в обзоре [10].

³⁾ Суперамплитуда A_n имеет суммарную спиральность $\lambda_\Sigma = n$, каждой грассмановой переменной η присваивается спиральность $\lambda = +1/2$.

$\langle ij \rangle$ – лоренц-инвариантное произведение i -го и j -го спиральных спиноров. С использованием аналогичных переменных могут быть записаны и формфакторы в $\mathcal{N} = 4$ теории Янга–Миллса [12]–[31]. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением древесных формфакторов операторов из супермультиплета тензора энергии-импульса. Рассмотрение формфакторов в явно суперсимметричном виде в общем случае представляется достаточно сложной задачей. К счастью, для формфакторов операторов из супермультиплета тензора энергии-импульса существуют различные явно суперсимметрично инвариантные формулировки [14], [15]. Мы будем пользоваться так называемой кирально-укороченной версией, в которой формфактор может быть схематично записан как

$$Z_n(\{\lambda_1, \tilde{\lambda}_1, \eta_1\} \dots \{\lambda_n, \tilde{\lambda}_n, \eta_n\}, \{q, \gamma_\alpha^a\}) = \langle 0 | \mathcal{O}(q, \gamma) S \prod_{i=1}^n \Omega_i | 0 \rangle, \quad (9)$$

где $\mathcal{O}(q, \gamma)$ – вставка операторов из кирально-укороченной версии супермультиплета тензора энергии-импульса, который параметризован грассмановыми переменными γ_α^a (например, коэффициент при нулевой степени в разложении в ряд по γ соответствует оператору $\text{Tr}(\phi^2)$) [14], [15]:

$$\begin{aligned} Z_n(\{\lambda_1, \tilde{\lambda}_1, \eta_1\} \dots \{\lambda_n, \tilde{\lambda}_n, \eta_n\}, \{q, \gamma_\alpha^a\}) &= \\ &= \delta^4 \left(\sum_{i=1}^n \lambda_\alpha^i \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}^i - q_{\alpha\dot{\alpha}} \right) \delta^4(q_\alpha^{+a} + \gamma_\alpha^{+a}) \delta^4(q_\alpha^{-a'}) \times \\ &\quad \times \mathcal{X}_n(\{\lambda_1, \tilde{\lambda}_1, \eta_1\} \dots \{\lambda_n, \tilde{\lambda}_n, \eta_n\}), \\ \mathcal{X}_n &= \mathcal{X}_n^{(0)} + \mathcal{X}_n^{(4)} + \dots + \mathcal{X}_n^{(4n-8)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь q является импульсом оператора $q^2 \neq 0$, индексы a, a' и знаки “+” и “–” перед ними соответствуют двум $SU(2)$ -подгруппам и $U(1)$ -зарядам $+1$ и -1 в $U(1) \times SU(2) \times SU(2) \subset SU(4)_{\mathbb{R}}$. Величины $\mathcal{X}_n^{(4m)}$ являются однородными по η и $(U(1) \times SU(2) \times SU(2))$ -инвариантами, аналогичными $\mathcal{P}_n^{(4m)}$ полиномам для амплитуд. Как и в случае с амплитудами, они описывают $N^m\text{MHV}$ формфакторы.

Для формфакторов операторов из супермультиплета тензора энергии-импульса оказывается возможным записать рекурсивные соотношения Бритто–Качазо–Фенга–Виттена (БКФВ) [32], [33] с поведением при больших z , аналогичным поведению амплитуд [17]. Схематично рекурсия БКФВ для формфакторов может быть представлена в виде

$$Z_n = \sum_i \int d^4\eta_* Z_{i+1} \times A_{n-i+1} + \sum_j \int d^4\eta_* A_{j+1} \times Z_{n-j+1}.$$

Мы видим, что амплитуды также дают вклад в рекурсивные соотношения БКФВ для формфакторов. В случае MHV_n формфакторов решение рекурсии БКФВ принимает простой вид, аналогичный формуле Парке–Тейлора для амплитуд:

$$Z_n^{\text{MHV}} = \frac{\delta^4(p_{\alpha\dot{\alpha}} - q_{\alpha\dot{\alpha}}) \delta^4(q_\alpha^{+a} + \gamma_\alpha^{+a}) \delta^4(q_\alpha^{-a'})}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n1 \rangle}. \quad (11)$$

3. МЯГКИЕ ТЕОРЕМЫ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Мягкие теоремы [34]–[49] – это набор утверждений об универсальном факторизационном поведении амплитуд в калибровочных теориях или теориях гравитации в предельном случае, когда импульс одной из частиц стремится к нулю. Мягкие теоремы в случае упорядоченных по цвету глюонных амплитуд в теории Янга–Миллса в размерности $d = 4$ могут быть записаны аналогично случаю гравитационных амплитуд [37] как [45], [46]

$$A_{n+1}^{h_s, h_1, \dots, h_n}(\epsilon p_s, p_1, \dots, p_n) = \left(\frac{\hat{S}_1}{\epsilon} + \hat{S}_2 \right) A_n^{h_1, \dots, h_n}(p_1, \dots, p_n) + O(\epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (12)$$

Здесь p_i , h_i – импульс и спиральность i -го глюона, а операторы $\hat{S}_1$ и $\hat{S}_2$ записываются в виде

$$\hat{S}_1 = \frac{(p_n \epsilon_s^{h_s})}{\sqrt{2}(p_n p_s)} + \frac{(p_1 \epsilon_s^{h_s})}{\sqrt{2}(p_n p_s)}, \quad \hat{S}_2 = \frac{J_n^{\mu\nu} \epsilon_{s,\mu}^{h_s} p_{n,\nu}}{\sqrt{2}(p_n p_s)} + \frac{J_1^{\mu\nu} \epsilon_{s,\mu}^{h_s} p_{1,\nu}}{\sqrt{2}(p_1 p_s)}, \quad (13)$$

где $\epsilon_{i,\mu}^{h_i}$ – вектор поляризации i -й частицы, $J_i^{\mu\nu}$ – генератор лоренцевых вращений, действующий на i -е глюонное поле. В представлении спиральных спиноров операторы $\hat{S}_1$ и $\hat{S}_2$ могут быть компактно записаны как

$$\hat{S}_1 = \frac{\langle 1n \rangle}{\langle ns \rangle \langle s1 \rangle}, \quad \hat{S}_2 = \frac{\tilde{\lambda}_s^\alpha}{\langle s1 \rangle} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_1^\alpha} + \frac{\tilde{\lambda}_s^\alpha}{\langle sn \rangle} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_n^\alpha}. \quad (14)$$

Используя рекурсию БКФВ, можно показать, что мягкие теоремы выполняются также и для формфакторов операторов из супермультиплета тензора энергии-импульса [29]:

$$\begin{aligned} Z_{n+1}(\{\epsilon \lambda_s, \tilde{\lambda}_s, \eta_s\}, \{\lambda_1, \tilde{\lambda}_1, \eta_1\}, \dots, \{\lambda_n, \tilde{\lambda}_n, \eta_n\}; q, \gamma) = \\ = \left(\frac{\hat{S}_1}{\epsilon^2} + \frac{\hat{S}_2}{\epsilon} \right) Z_n(\{\lambda_1, \tilde{\lambda}_1, \eta_1\}, \dots, \{\lambda_n, \tilde{\lambda}_n, \eta_n\}; q, \gamma) + \text{reg.}, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad (15) \\ \hat{S}_1 = \frac{\langle 1n \rangle}{\langle ns \rangle \langle s1 \rangle}, \quad \hat{S}_2 = \frac{\tilde{\lambda}_s^\alpha}{\langle s1 \rangle} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_1^\alpha} + \frac{\tilde{\lambda}_s^\alpha}{\langle sn \rangle} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_n^\alpha} + \frac{\eta_{\Lambda,s}}{\langle s1 \rangle} \frac{\partial}{\partial \eta_{\Lambda,1}} + \frac{\eta_{\Lambda,s}}{\langle sn \rangle} \frac{\partial}{\partial \eta_{\Lambda,n}}, \end{aligned}$$

где Λ – мультииндекс для $SU(2) \times SU(2)' \times U(1)$.

Поведение формфакторов в мягком пределе может быть также использовано при написании итерационной процедуры, известной как обратный мягкий предел (ОМП). Эта процедура была впервые предложена при описании амплитуд рассеяния в работе [50] и получила дальнейшее развитие в работах [51]–[53]. Более того, с точки зрения представления амплитуд в виде интегралов по грассманианам [50], [54], [55] процедура ОМП [56], [57] представляет собой естественный способ получения янгиан-инвариантов [9], [58], так как древесные амплитуды рассеяния в суперсимметричной $\mathcal{N} = 4$ теории Янга–Миллса инвариантны относительно преобразований симметрии, связанных с янгианом. В случае формфакторов операторов из супермультиплета тензора энергии-импульса ОМП запишется в виде

$$Z_n(1, \dots, n|q, \gamma) = \sum_{i; R, L} \left(\prod_L S_L \right) \left(\prod_R S_R \right) Z_2|_{\text{subst.}}, \quad (16)$$

где мягкие факторы $\mathcal{S}_{L,R}$ принимают значения обратных мягких операторов $\mathcal{S}_+$ или $\mathcal{S}_-$ [29]:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_+(i-1, i, i+1) &= \frac{\langle i-1i+1 \rangle}{\langle i-1i \rangle \langle ii+1 \rangle}, \\ \mathcal{S}_-(i-1, i, i+1) &= \frac{\delta^4(\eta_{i-1}[ii+1] + \text{perm.})}{[ii-1][i+1i][i-1i+1]^3},\end{aligned}\quad (17)$$

и нижний индекс subst. означает применение набора последовательных подстановок, как в работах [29], [52].

Существует связь между описанной выше итерационной процедурой ОМП и квантовым методом обратной задачи (КМОЗ), применяемым для получения янгиан-инвариантов, связанных с древесными амплитудами рассеяния в $\mathcal{N} = 4$ теории Янга–Миллса [2], [3]. В рамках КМОЗ объектом рассмотрения является матрица монодромии вспомогательной спиновой цепочки, построенная из локальных операторов Лакса. Янгиан-инварианты и, как следствие, амплитуды рассеяния находятся в форме собственных функций матрицы монодромии. В работах [4], [5] была предложена систематическая классификация янгиан-инвариантов, получаемых в рамках КМОЗ. Итак, инвариантность относительно преобразований симметрии, связанных с янгианом, может быть компактно записана в виде системы уравнений на собственные значения подходящей матрицы монодромии $M(u)$ [2]–[4]:

$$M_{ab}(u)|\Psi\rangle = C_{ab}|\Psi\rangle, \quad (18)$$

где u – спектральный параметр, C_{ab} – собственные значения матрицы монодромии, а собственные векторы матрицы монодромии $|\Psi\rangle$ являются элементами гильбертова пространства $V = V_1 \otimes \dots \otimes V_n$, где V_i – пространство конкретного представления алгебры $\mathfrak{gl}(N|M)$. Для описания древесных амплитуд рассеяния необходимо рассмотреть частный случай некомпактных представлений $N|M = 4|4$, построенных с помощью набора суперосцилляторов Йордана–Швингера $\bar{\mathbf{w}}_a, \mathbf{w}_b$, $a, b = 1, \dots, N+M$. Последние удобно записать с использованием супертвисторных переменных $\mathcal{W}_a = (\mu_\alpha, \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \eta^A)$:

$$J_{ab} = \bar{\mathbf{w}}_a \mathbf{w}_b, \quad \bar{\mathbf{w}}_a = \mathcal{W}_a, \quad \mathbf{w}_a = \partial_{\mathcal{W}_a}, \quad [\mathbf{w}_a, \bar{\mathbf{w}}_b] = \delta_{ab}. \quad (19)$$

Вакуумное состояние для гильбертова пространства V , используемого для построения янгиан-инвариантов $|\Psi\rangle_{n,k}$, соответствующих $N^k\text{MHV}$ n -точечным древесным амплитудам $A_{n,k}$, дается выражением

$$|0\rangle = \prod_{i=1}^k \delta^{N|M}(\mathcal{W}^i). \quad (20)$$

Матрица монодромии вспомогательной спиновой цепочки записывается в виде

$$M(u) = \mathcal{L}_1(u, v_1) \dots \mathcal{L}_k(u, v_k) \mathcal{L}_{k+1}(u, v_{k+1}) \dots \mathcal{L}_n(u, v_n), \quad (21)$$

где u – снова спектральный параметр, v_i – неоднородности спиновой цепочки, а операторы Лакса $\mathcal{L}_i(u, v)$ даются выражениями

$$\mathcal{L}(u, v) = u - v + \sum_{a,b} e_{ab} J_{ba}, \quad (22)$$

матрица e_{ab} действует во вспомогательном пространстве и имеет вид $(e_{ab})_{cd} = \delta_{ac}\delta_{bd}$. Решение уравнения на собственные значения⁴⁾ для матрицы монодромии (18) приводит к выражениям для янгиан-инвариантов, отвечающим перестановкам σ с минимальным разложением⁵⁾ $\sigma = (i_P, j_P) \dots (i_1, j_1)$ [4]:

$$|\Psi\rangle = \mathcal{R}_{i_1, j_1}(\bar{u}_1) \dots \mathcal{R}_{i_P, j_P}(\bar{u}_P)|0\rangle, \quad (23)$$

где [2] (см. также [3])

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ij}(u) &= (-\bar{\mathbf{w}}^j \cdot \mathbf{w}^i)^u = -\frac{\Gamma(u+1)}{2\pi i} \int_C \frac{d\alpha}{(-\alpha)^{1+u}} e^{\alpha \bar{\mathbf{w}}^j \cdot \mathbf{w}^i}, \\ \bar{u}_p &= y_{\tau_p(j_p)} - y_{\tau_p(i_p)}, \quad y_{\sigma(i)} + \mathfrak{s}_{\sigma(i)} = y_i, \\ \tau_p &= \tau_{p-1} \circ (i_p, j_p) = (i_1, j_1) \dots (i_p, j_p), \end{aligned} \quad (24)$$

$\mathfrak{s}_i$ – значение спина для представления в узле i , C – контур Ханкеля, идущий против часовой стрелки вокруг разреза от нуля до бесконечности, а определение переменных y_i через неоднородности спиновой цепочки можно найти в работе [4]. Перестановка σ , отвечающая древесной амплитуде $A_{n,k}$, является перестановкой n элементов, а k – число элементов i , таких что $\sigma(i) < i$. Оказывается, что обратные мягкие операции $\mathcal{S}_+$ и $\mathcal{S}_-$, сохраняющие или увеличивающие число k , можно переписать в терминах матричных операторов $\mathcal{R}$ с нулевыми значениями спектрального параметра $R = \mathcal{R}(0)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_+(i - 1i + 1)A_{n,k}(\dots, \widehat{(i-1)}^+, \widehat{(i+1)}^+, \dots) &= \\ = R_{ii+1}R_{ii-1}A_{n,k}(\dots, i-1, i+1, \dots), \\ \mathcal{S}_-(i - 1i + 1)A_{n,k}(\dots, \widehat{(i-1)}^-, \widehat{(i+1)}^-, \dots) &= \\ = R_{i+1i}R_{i-1i}A_{n,k}(\dots, i-1, i+1, \dots)\delta^{4|4}(\mathcal{W}_i). \end{aligned} \quad (25)$$

КМОЗ рассеяния может быть применен и в случае формфакторов [29], [30]. Единственным новым элементом конструкции является вакуумное состояние спиновой цепочки, соответствующее минимальному формфактору. Последнее в случае формфакторов операторов из супермультиплета тензора энергии-импульса дается выражением [29], [30]

$$|\mathcal{Z}_2(1, 2)\rangle = \delta^{4|4}(\mathcal{W}_1)\delta^{4|4}(\mathcal{W}_2) \equiv \delta^{\mathcal{Z}}_{12}, \quad \mathcal{W}_i = \begin{pmatrix} \underline{\mu}_i \\ \underline{\lambda}_i \\ \underline{\eta}_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_1 &= \mu_1, & \tilde{\lambda}_1 &= \tilde{\lambda}_1 - \frac{\langle 2|q}{\langle 2|1}, & \underline{\eta}_1^- &= \eta_1^- - \frac{\langle 2|\gamma^-}{\langle 2|1}, & \underline{\eta}_1^+ &= \eta_1^+, \\ \underline{\mu}_2 &= \mu_2, & \tilde{\lambda}_2 &= \tilde{\lambda}_2 - \frac{\langle 1|q}{\langle 1|2}, & \underline{\eta}_2^- &= \eta_2^- - \frac{\langle 1|\gamma^-}{\langle 1|2}, & \underline{\eta}_2^+ &= \eta_2^+. \end{aligned} \quad (27)$$

⁴⁾Необходимо заметить, что данное уравнение отличается от обычных уравнений Бете, диагонализующих только след матрицы монодромии.

⁵⁾Разложение является минимальным в том смысле, что не существует другого разложения σ с меньшим числом попарных перестановок.

Заметим, что в случае формфакторов с $q^2 \neq 0$ вакуумное состояние, соответствующее минимальному формфактору $|\mathcal{Z}_2(1, 2)\rangle$, нарушает янг-инвариантность $\mathfrak{gl}(4|4)$ спиновой цепочки и состояния, построенные с использованием этого вакуума, не будут собственными функциями матрицы монодромии. Тем не менее вакуумное состояние $|\mathcal{Z}_2(1, 2)\rangle$ вместе с состояниями, построенными с его использованием, являются собственными векторами трансфер-матрицы рассматриваемой спиновой цепочки [30], что не удивительно в силу мультипликативной перенормируемости соответствующих формфакторов.

При изучении предела $q^2 = 0$ удобно использовать представление импульсных твисторов для отношения формфакторов Z_n/Z_n^{MHV} . В этом случае импульсные твисторные переменные определены на периодическом контуре [14], [20]:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_i^{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} Z_i^M \\ \chi_{+a/-a', i} \end{pmatrix}, \quad \chi_{+a, i} = \theta_{+a, i} \lambda_i, \quad \chi_{-a', i} = \theta_{-a', i} \lambda_i, \\ Z_i^M &= \begin{pmatrix} \lambda_i^\alpha \\ \mu_i^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \mu_i^{\dot{\alpha}} = x_i^{\alpha\dot{\alpha}} \lambda_{\alpha i}, \end{aligned} \quad (28)$$

где x, θ – дуальные переменные по отношению к переменным λ и η [9].

В заключение мы приведем явные выражения для формфактора Z_4^{NMHV} в терминах обратных мягких операций, действующих на минимальный формфактор⁶⁾ Z_2 :

$$\begin{aligned} Z_4^{\text{NMHV}} &= B_1 + B_6 + B_3 + B_4 = \\ &= Z_4^{\text{MHV}}(R_{142}^{(2)} + \tilde{R}_{133}^{(1)} + R_{132}^{(1)} + \tilde{R}_{122}^{(1)}), \\ B_1(1, 2, 3, 4) &= \mathcal{S}_-(2, 3, 4) Z_3^{\text{MHV}}(1, \hat{2}^-, \hat{4}^-) = \\ &= \mathcal{S}_-(2, 3, 4) [\mathcal{S}_+(\hat{2}^-, 1, \hat{4}^-) Z_2((\hat{2}^+)^-, (\hat{4}^+)^-)], \\ B_3(1, 2, 3, 4) &= \mathcal{S}_-(2, 1, 4) Z_3^{\text{MHV}}(3, \hat{2}^-, \hat{4}^-) = \\ &= \mathcal{S}_-(2, 1, 4) [\mathcal{S}_+(\hat{2}^-, 3, \hat{4}^-) Z_2((\hat{2}^+)^-, (\hat{4}^+)^-)], \\ B_4(1, 2, 3, 4) &= \mathcal{S}_+(1, 4, 3) Z_3^{\text{NMHV}}(3, \hat{1}^+, \hat{2}^+) = \\ &= \mathcal{S}_+(1, 4, 3) [\mathcal{S}_-(\hat{1}^+, 2, \hat{3}^+) Z_2((\hat{1}^-)^+, (\hat{3}^-)^+)], \\ B_6(1, 2, 3, 4) &= \mathcal{S}_+(1, 2, 3) Z_3^{\text{NMHV}}(4, \hat{1}^+, \hat{3}^+) = \\ &= \mathcal{S}_+(1, 2, 3) [\mathcal{S}_-(\hat{1}^+, 4, \hat{3}^+) Z_2((\hat{1}^-)^+, (\hat{3}^-)^+)], \end{aligned} \quad (29)$$

где $p_{i_1 \dots i_n} = p_{i_1} + \dots + p_{i_n}$, $q = \sum_{i=1}^n p_i$ и

$$\begin{aligned} R_{rst}^{(1)} &= \\ &= \frac{\langle s+1s \rangle \langle t+1t \rangle \delta^4 \left(\sum_{i=r+1}^t \eta_i \langle i | p_{s+1 \dots t p_{s+1 \dots r+1}} | r \rangle - \sum_{i=r}^{s+1} \eta_i \langle i | p_{s+1 \dots t p_{t \dots r+1}} | r \rangle \right)}{p_{s+1 \dots t}^2 \langle r | p_{r \dots s+1 p_{t \dots s+1}} | t+1 \rangle \langle r | p_{r \dots s+1 p_{t \dots s+1}} | t \rangle \langle r | p_{t \dots r p_{t \dots s+1}} | s+1 \rangle \langle r | p_{t \dots r p_{t \dots s+1}} | s \rangle}, \end{aligned}$$

⁶⁾ Детали используемых обозначений могут быть найдены в работе [29].

$$\begin{aligned}
 R_{rst}^{(2)} &= \\
 &= \frac{\langle s+1s \rangle \langle t+1t \rangle \hat{\delta}^4 \left(\sum_{i=t}^{r+1} \eta_i \langle i | p_{s\dots t+1} p_{r+1\dots s} | r \rangle + \sum_{i=r}^{s+1} \eta_i \langle i | p_{s\dots t+1} p_{t\dots r+1} | r \rangle \right)}{p_{s\dots t+1}^2 \langle r | p_{r\dots s} p_{s\dots t+1} | t+1 \rangle \langle r | p_{r\dots s} p_{s\dots t-1} | t \rangle \langle r | p_{t\dots r+1} p_{s\dots t+1} | s+1 \rangle \langle r | p_{t\dots r+1} p_{s\dots t+1} | s \rangle}, \\
 \tilde{R}_{rtt}^{(1)} &= \\
 &= \frac{\langle tt+1 \rangle \hat{\delta}^4 \left(\sum_{i=t}^{r+1} \eta_i \langle i | p_{1\dots n} p_{r\dots t+1} | r \rangle - \sum_{i=r}^{t+1} \eta_i \langle i | p_{1\dots n} p_{t\dots r+1} | r \rangle \right)}{q^4 \langle r | p_{r\dots t+1} p_{1\dots n} | t \rangle \langle r | p_{t\dots r} q | t+1 \rangle \langle r | p_{t\dots r+1} p_{1\dots n} | r \rangle}.
 \end{aligned}$$

В пределе $q^2 = 0$ вклады B_6 и B_4 обращаются в нуль и результат для отношения формфакторов Z_4/Z_4^{MHV} может быть записан в виде суммы двух янгиан-инвариантов, записанных в терминах импульсных твисторов:

$$\begin{aligned}
 Z_4/Z_4^{\text{MHV}} &= [1, 2, 3, 4, 5] + [1, 2, 3, 0, -1], \\
 [a, b, c, d, e] &= \frac{\hat{\delta}^4(\langle a, b, c, d \rangle \chi_e + \text{cycl.})}{\langle a, b, c, d \rangle \langle b, c, d, e \rangle \langle c, d, e, a \rangle \langle d, e, a, b \rangle \langle e, a, b, c \rangle},
 \end{aligned} \tag{30}$$

где $\langle a, b, c, d \rangle$ – свертка четырех твисторов с номерами a, b, c, d и тензора ϵ : $\langle i, j, k, l \rangle = \epsilon_{M_1 M_2 M_3 M_4} Z_i^{M_1} Z_j^{M_2} Z_k^{M_3} Z_l^{M_4}$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы использовали пример формфакторов операторов из супермультиплета тензора энергии-импульса, чтобы показать, что конструкции, первоначально использовавшиеся для описания амплитуд рассеяния, также могут быть использованы и в случае формфакторов. Нами показано, что мягкие теоремы могут быть обобщены и на случай формфакторов. Мы использовали рекурсивную процедуру, связанную с обратным мягким пределом, чтобы связать формфакторы с собственными функциями трансфер-матрицы, интегрируемой $\mathfrak{gl}(4|4)$ спиновой цепочки. Показано, что в пределе $q^2 \rightarrow 0$ данные собственные функции также являются собственными функциями матрицы монодромии $\mathfrak{gl}(4|4)$ спиновой цепочки.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Д. И. Казакову за интересные и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] R. Britto, “Loop amplitudes in gauge theories: modern analytic approaches”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:45 (2011), 454006, 28 pp., arXiv:1012.4493; Z. Bern, Y.-t. Huang, “Basics of generalized unitarity”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:45 (2011), 454003, 32 pp., arXiv:1103.1869; L. J. Dixon, *A brief introduction to modern amplitude methods*, arXiv:1310.5353; H. Elvang, Y.-t. Huang, *Scattering amplitudes*, arXiv:1308.1697; J. M. Henn, J. C. Plefka, *Scattering Amplitudes in Gauge Theories*, Lecture Notes in Physics, **883**, Springer, Berlin, 2014; N. Beisert, C. Ahn, L. F. Alday et al., “Review of AdS/CFT integrability: an overview”, *Lett. Math. Phys.*, **99**:1 (2012), 3–32, arXiv:1012.3982.
- [2] D. Chicherin, S. Derkachov, R. Kirschner, “Yang–Baxter operators and scattering amplitudes in $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory”, *Nucl. Phys. B*, **881** (2014), 467–501, arXiv:1309.5748.
- [3] R. Frassek, N. Kanning, Y. Ko, M. Staudacher, “Bethe ansatz for Yangian invariants: towards super Yang–Mills scattering amplitudes”, *Nucl. Phys. B*, **883** (2014), 373–424, arXiv:1312.1693.

- [4] N. Kanning, T. Lukowski, M. Staudacher, “A shortcut to general tree-level scattering amplitudes in $\mathcal{N} = 4$ SYM via integrability”, *Fortsch. Phys.*, **62**:7 (2014), 556–572, arXiv: 1403.3382.
- [5] J. Broedel, M. de Leeuw, M. Rosso, “A dictionary between R-operators, on-shell graphs and Yangian algebras”, *JHEP*, **06** (2014), 170, 47 pp., arXiv: 1403.3670.
- [6] F. Gliozzi, J. Scherk, D. I. Olive, “Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model”, *Nucl. Phys. B*, **122**:2 (1977), 253–290.
- [7] L. Brink, J. H. Schwarz, J. Scherk, “Supersymmetric Yang–Mills theories”, *Nucl. Phys. B*, **121**:1 (1977), 77–92.
- [8] V. P. Nair, “A current algebra for some gauge theory amplitudes”, *Phys. Lett. B*, **214**:2 (1988), 215–218.
- [9] J. M. Drummond, J. Henn, G. P. Korchemsky, E. Sokatchev, “Dual superconformal symmetry of scattering amplitudes in $\mathcal{N} = 4$ super–Yang–Mills theory”, *Nucl. Phys. B*, **828**:1–2 (2010), 317–374, arXiv: 0807.1095.
- [10] H. Elvang, Y.-t. Huang, *Scattering amplitudes*, arXiv: 1308.1697.
- [11] S. J. Parke, T. R. Taylor, “An amplitude for n gluon scattering”, *Phys. Rev. Lett.*, **56**:23 (1986), 2459–2460.
- [12] A. Brandhuber, B. Spence, G. Travaglini, G. Yang, “Form factors in $\mathcal{N} = 4$ super Yang–Mills and periodic Wilson loops”, *JHEP*, **01** (2011), 134, 22 pp., arXiv: 1011.1899.
- [13] L. V. Bork, D. I. Kazakov, G. S. Vartanov, “On form factors in $\mathcal{N} = 4$ SYM”, *JHEP*, **02** (2011), 063, 34 pp., arXiv: 1011.2440.
- [14] A. Brandhuber, Ö. Gürdoğan, R. Mooney, G. Travaglini, G. Yang, “Harmony of super form factors”, *JHEP*, **10** (2011), 046, 37 pp., arXiv: 1107.5067.
- [15] L. V. Bork, D. I. Kazakov, G. S. Vartanov, “On MHV form factors in superspace for $\mathcal{N} = 4$ SYM theory”, *JHEP*, **10** (2011), 133, 33 pp., arXiv: 1107.5551.
- [16] L. V. Bork, “On NMHV form factors in $\mathcal{N} = 4$ SYM theory from generalized unitarity”, *JHEP*, **01** (2013), 049, 37 pp., arXiv: 1203.2596.
- [17] B. Penante, B. Spence, G. Travaglini, C. Wen, *On super form factors of half-BPS operators in $\mathcal{N} = 4$ SYM*, arXiv: 1402.1300.
- [18] A. Brandhuber, G. Travaglini, G. Yang, “Analytic two-loop form factors in $\mathcal{N} = 4$ SYM”, *JHEP*, **05** (2012), 082, 32 pp., arXiv: 1201.4170.
- [19] A. Brandhuber, B. Penante, G. Travaglini, C. Wen, “The last of the simple remainders”, *JHEP*, **08** (2014), 100, 32 pp., arXiv: 1406.1443.
- [20] L. V. Bork, “On form factors in $\mathcal{N} = 4$ SYM theory and polytopes”, *JHEP*, **12** (2014), 111, 40 pp., arXiv: 1407.5568.
- [21] J. M. Henn, S. Moch, S. G. Naculich, “Form factors and scattering amplitudes in $\mathcal{N} = 4$ SYM in dimensional and massive regularizations”, *JHEP*, **12** (2011), 024, 29 pp., arXiv: 1109.5057.
- [22] T. Gehrmann, J. M. Henn, T. Huber, “The three-loop form factor in $\mathcal{N} = 4$ super Yang–Mills”, *JHEP*, **03** (2012), 101, arXiv: 1112.4524.
- [23] R. H. Boels, B. A. Kniehl, O. V. Tarasov, G. Yang, “Color-kinematic duality for form factors”, *JHEP*, **02** (2013), 063, 35 pp., arXiv: 1211.7028.
- [24] J. Maldacena, A. Zhiboedov, “Form factors at strong coupling via a Y -system”, *JHEP*, **11** (2010), 104, 41 pp., arXiv: 1009.1139.
- [25] Z. Gao, G. Yang, “ Y -system for form factors at strong coupling in AdS_5 and with multi-operator insertions in AdS_3 ”, *JHEP*, **06** (2013), 105, 49 pp., arXiv: 1303.2668.
- [26] M. Wilhelm, “Amplitudes, form factors and the dilatation operator in $\mathcal{N} = 4$ SYM theory”, *JHEP*, **02** (2015), 149, 38 pp., arXiv: 1410.6309.
- [27] D. Nandan, C. Sieg, M. Wilhelm, G. Yang, “Cutting through form factors and cross sections of non-protected operators in $\mathcal{N} = 4$ SYM”, *JHEP*, **06** (2015), 156, 68 pp., arXiv: 1410.8485.

- [28] F. Loebbert, D. Nandan, C. Sieg, M. Wilhelm, G. Yang, “On-shell methods for the two-loop dilatation operator and finite remainders”, *JHEP*, **10** (2015), 012, 23 pp., arXiv: 1504.06323.
- [29] L. V. Bork, A. I. Onishchenko, “On soft theorems and form factors in $\mathcal{N} = 4$ SYM theory”, *JHEP*, **12** (2015), 030, 48 pp., arXiv: 1506.07551.
- [30] R. Frassek, D. Meidinger, D. Nandan, M. Wilhelm, “On-shell diagrams, Graßmannians and integrability for form factors”, *JHEP*, **01** (2016), 182, 46 pp., arXiv: 1506.08192.
- [31] R. Boels, B. A. Kniehl, G. Yang, “Master integrals for the four-loop Sudakov form factor”, *Nucl. Phys. B*, **902** (2016), 387–414, arXiv: 1508.03717.
- [32] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng, “New recursion relations for tree amplitudes of gluons”, *Nucl. Phys. B*, **715**:1–2 (2005), 499–522, arXiv: hep-th/0412308.
- [33] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng, E. Witten, “Direct proof of tree-level recursion relation in Yang–Mills theory”, *Phys. Rev. Lett.*, **94**:18 (2005), 181602, 4 pp., arXiv: hep-th/0501052.
- [34] S. Weinberg, “Infrared photons and gravitons”, *Phys. Rev. B*, **140**:2B (1965), B516–B524.
- [35] A. Strominger, “On BMS invariance of gravitational scattering”, *JHEP*, **07** (2014), 152, 20 pp., arXiv: 1312.2229.
- [36] T. He, V. Lysov, P. Mitra, A. Strominger, “BMS supertranslations and Weinberg’s soft graviton theorem”, *JHEP*, **05** (2015), 151, 16 pp., arXiv: 1401.7026.
- [37] F. Cachazo, A. Strominger, *Evidence for a new soft graviton theorem*, arXiv: 1404.4091.
- [38] A. Strominger, A. Zhiboedov, “Gravitational memory, BMS supertranslations and soft theorems”, *JHEP*, **01** (2016), 086, 14 pp., arXiv: 1411.5745.
- [39] S. Pasterski, A. Strominger, A. Zhiboedov, *New gravitational memories*, arXiv: 1502.06120.
- [40] A. Strominger, “Asymptotic symmetries of Yang–Mills theory”, *JHEP*, **07** (2014), 151, 17 pp., arXiv: 1308.0589.
- [41] T. He, P. Mitra, A. Strominger, “2D Kac–Moody symmetry of 4D Yang–Mills theory”, *JHEP*, **10** (2016), 137, 19 pp., arXiv: 1503.02663.
- [42] T. T. Dumitrescu, T. He, P. Mitra, A. Strominger, *Infinite-dimensional fermionic symmetry in supersymmetric gauge theories*, arXiv: 1511.07429.
- [43] Y. Geyer, A. E. Lipstein, L. Mason, “Ambitwistor strings at null infinity and (subleading) soft limits”, *Class. Quantum Grav.*, **32**:5 (2015), 055003, 28 pp., arXiv: 1406.1462.
- [44] A. E. Lipstein, “Soft theorems from conformal field theory”, *JHEP*, **06** (2015), 166, 26 pp., arXiv: 1504.01364.
- [45] E. Laenen, G. Stavenga, C. D. White, “Path integral approach to eikonal and next-to-eikonal exponentiation”, *JHEP*, **03** (2009), 054, 45 pp., arXiv: 0811.2067; E. Laenen, L. Magnea, G. Stavenga, C. D. White, “Next-to-eikonal corrections to soft gluon radiation: a diagrammatic approach”, *JHEP*, **01** (2011), 141, 67 pp., arXiv: 1010.1860.
- [46] E. Casali, “Soft sub-leading divergences in Yang–Mills amplitudes”, *JHEP*, **08** (2014), 077, 4 pp., arXiv: 1404.5551.
- [47] Z. Bern, S. Davies, J. Nohle, “On loop corrections to subleading soft behaviour of gluons and gravitons”, *Phys. Rev. D*, **90**:8 (2014), 085015, 10 pp., arXiv: 1405.1015.
- [48] F. Cachazo, E. Ye Yuan, *Are soft theorems renormalised?*, arXiv: 1405.3413.
- [49] A. Brandhuber, E. Hughes, B. Spence, G. Travaglini, “One-loop soft theorems via dual superconformal symmetry”, *JHEP*, **03** (2016), 084, 44 pp., arXiv: 1511.06716.
- [50] N. Arkani-Hamed, F. Cachazo, C. Cheung, J. Kaplan, “A duality for the S matrix”, *JHEP*, **03** (2010), 020, 69 pp., arXiv: 0907.5418.
- [51] M. Bullimore, “Inverse soft factors and grassmannian residues”, *JHEP*, **01** (2011), 055, 30 pp., arXiv: 1008.3110.
- [52] D. Nandan, C. Wen, “Generating all tree amplitudes in $\mathcal{N} = 4$ SYM by inverse soft limit”, *JHEP*, **08** (2012), 040, 29 pp., arXiv: 1204.4841.
- [53] C. Boucher-Veronneau, A. J. Larkoski, “Constructing amplitudes from their soft limits”, *JHEP*, **09** (2011), 130, 22 pp., arXiv: 1108.5385.

- [54] N. Arkani-Hamed, J. L. Bourjaily, F. Cachazo, A. B. Goncharov, A. Postnikov, J. Trnka, *Scattering amplitudes and the positive Grassmannian*, [arXiv:1212.5605](#).
- [55] L. J. Mason, D. Skinner, “Dual superconformal invariance, momentum twistors and Grassmannians”, *JHEP*, **11** (2009), 045, 39 pp., [arXiv:0909.0250](#).
- [56] N. Arkani-Hamed, J. L. Bourjaily, F. Cachazo, S. Caron-Huot, J. Trnka, “The all-loop integrand for scattering amplitudes in planar $\mathcal{N} = 4$ SYM”, *JHEP*, **01** (2011), 041, 46 pp., [arXiv:1008.2958](#).
- [57] N. Arkani-Hamed, J. L. Bourjaily, F. Cachazo, J. Trnka, “Unification of residues and Grassmannian dualities”, *JHEP*, **01** (2011), 049, 45 pp., [arXiv:0912.4912](#).
- [58] J. M. Drummond, J. M. Henn, J. Plefka, “Yangian symmetry of scattering amplitudes in $\mathcal{N} = 4$ super Yang–Mills theory”, *JHEP*, **05** (2009), 046, 23 pp., [arXiv:0902.2987](#).