Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Антонов, М. В. Компаниец, Н. М. Лебедев, Критическое поведение $O(n)$ - ϕ^4 -модели с антисимметричным тензорным параметром порядка: трехпетлевое приближение, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 2, 239–253

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:20:34

© 2017 г. Н. В. Антонов*, М. В. Компаниец*, Н. М. Лебедев*

КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ $O(n)$ - ϕ^4 -МОДЕЛИ С АНТИСИММЕТРИЧНЫМ ТЕНЗОРНЫМ ПАРАМЕТРОМ ПОРЯДКА: ТРЕХПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассматривается критическое поведение $O(n)$ -симметричной модели типа ϕ^4 с антисимметричным тензорным параметром порядка. Согласно исследованию, проведенному ранее в однопетлевом приближении квантовой теоретико-полевой ренормгруппы, в модели присутствует ИК-притягивающая неподвижная точка и тем самым осуществляется ИК-скейлинг с универсальными показателями. С использованием более изощренного анализа, основанного на трехпетлевых вычислениях ренормгрупповых функций и борелевском конформном суммировании, показано, что ИК-поведение в действительности управляется другой неподвижной точкой уравнений ренормгруппы и, таким образом, модель принадлежит другому классу универсальности, нежели это можно предполагать на основе простейшего однопетлевого приближения. Достоверность полученных результатов остается тем не менее предметом обсуждения.

Ключевые слова: критическое поведение, тензорный параметр порядка, ренормализационная группа.

DOI: 10.4213/tmf9130

1. ВВЕДЕНИЕ

Многочисленные физические системы проявляют интересное сингулярное поведение в окрестности своих критических точек (точек фазового перехода второго рода). Их термодинамические и корреляционные функции являются степенными с универсальными критическими размерностями: в соответствии с общепринятыми взглядами последние зависят только от нескольких глобальных характеристик

Работа поддержана Санкт-Петербургским государственным университетом (исследовательский грант № 11.38.185.2014). Н. М. Лебедев получал поддержку РФФИ (грант № 16-32-00086 мол_а), а также поддержку фонда Дмитрия Зимина “Династия”.

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: n.antonov@spbu.ru, mkompan@gmail.com

системы, таких как симметрия или размерность пространства. Тем самым можно говорить о типах критического поведения (классах универсальности) безотносительно к конкретной природе физической системы, претерпевающей фазовый переход второго рода.

Предварительный анализ критического поведения обычно осуществляется в рамках феноменологической теории Ландау (теории среднего поля), где свободная энергия рассматриваемой системы записывается в простейшем виде, который диктуется соображениями симметрии [1]. Такое приближение предсказывает тип фазового перехода (первого или второго рода), но дает значения критических индексов только приближенно. Более точное описание можно получить в рамках флуктуационной теории [2], в которой соображения теории Ландау применяются к эффективному гамильтониану системы. Последний обычно оказывается эквивалентным некоторой модели ренормируемой евклидовой квантовой теории поля. В свою очередь последовательное количественное описание ее критического поведения дается теоретико-полевой ренормализационной группой (РГ) (см. монографии [3]–[5] и цитированную в них литературу). В РГ-подходе возможный тип фазового перехода определяется наличием и характером неподвижных точек соответствующей теоретико-полевой модели. Наличие инфракрасно (ИК) притягивающей неподвижной точки обычно предполагает наличие перехода второго рода и тем самым критического скейлинга. В таком случае универсальные характеристики критического поведения (прежде всего критические размерности) обычно рассчитываются как разложения по параметру $\varepsilon = d_c - d$, отклонению размерности пространства d от ее верхнего критического значения; для типичных моделей $d_c = 4$.

Наиболее изученные фазовые переходы (жидкость–пар, бинарные смеси, ферро- и антиферромагнетики) описываются $O(n)$ -симметричными моделями со взаимодействием типа ϕ^4 и n -компонентным параметром порядка. В этом случае предсказания теории Ландау согласуются с результатами РГ-анализа: в моделях имеется единственная ИК-притягивающая точка, а различные дополнительные пересуммирование рядов нужны лишь для уточнения значений критических размерностей [3]–[5].

Однако во многих случаях описание с помощью подобных сравнительно простых моделей оказывается неадекватным, и приходится рассматривать более сложные симметрии или более сложные типы параметров порядка с матричной или тензорной природой. К таким случаям относятся системы со сложной кристаллографической структурой, со случайно распределенными примесями, жидкие кристаллы и многие другие структурно-неупорядоченные системы (см., например, работы [6]–[13] и ссылки в них).

Как правило, соответствующие теоретико-полевые модели включают несколько различных типов взаимодействий и, соответственно, несколько констант связи (“зарядов”). Их уравнения РГ могут иметь несколько неподвижных точек с различным характером притяжения, но могут также не иметь ни одной нетривиальной точки в физической области параметров. Это, в свою очередь, может привести к довольно сложной картине соответствующих потоков РГ (решений уравнений РГ для инвариантных констант связи). Даже при наличии ИК-притягивающей неподвижной точки потоки РГ могут покинуть физическую область значений параметров, определяемую условиями устойчивости системы. Такая ситуация обычно трактуется как фазовый переход первого рода. Далее потоки РГ могут уйти на бесконечность; эта ситуация выходит за рамки применимости теории возмущений. В итоге предсказания теории Ландау могут быть существенно пересмотрены.

В работе [14] теоретико-полевая РГ применялась к $O(n)$ -симметричной модели типа ϕ^4 с вещественным антисимметричным тензорным параметром порядка. Такая модель может использоваться для описания переходов между нематической, холестерической и голубой фазами жидких кристаллов [15], [16], перехода в диссимметричную фазу в ферроэластиках [17]–[19] и, в своей комплексной модификации, для описания перехода в сверхпроводящее состояние в системах фермионов с высшими спинами или дополнительными степенями свободы [13], [20], [21]. Однако с более общей точки зрения это, вероятно, одна из самых простых моделей с несколькими константами связи, описывающая тем не менее многие черты более сложных и реалистичных задач, перечисленных выше.

При $n = 2$ и $n = 3$ данная модель сводится к хорошо изученным однозарядным скалярной и $O(3)$ -векторной ϕ^4 -моделям соответственно. При $n \geq 4$ это двухзарядная модель, для которой прямолинейное применение теории Ландау предсказывает переход второго рода. Однако РГ-анализ, выполненный в статье [14] в рамках однопетлевого приближения (первый порядок ε -разложения), показал, что только при $n = 4$ в модели имеется ИК-устойчивая точка (и три неустойчивых). При $n > 4$ ИК-притягивающие точки в модели отсутствуют, а потоки РГ уходят либо на бесконечность, либо в нефизическую область. Последняя ситуация обычно трактуется так, что флуктуации параметра порядка приводят к изменению типа перехода (со второго на первый). На более формальном языке теории поля всё это означает, что учет однопетлевых поправок к “древесному” (беспетлевому) приближению может качественно изменить ИК-поведение модели. Однако тогда естественно ожидать, что старшие порядки будут тоже весьма существенны. В связи с этим напомним, что ряды теории возмущений в теории поля обычно имеют нулевой радиус сходимости, а параметр разложения при реальных значениях размерности пространства отнюдь не мал. Это видно из явного вида асимптотик высших порядков [3], [22]–[24], которые также показывают, что эти ряды суммируемы по Борелю и являются асимптотическими для соответствующих борелевских сумм.

Таким образом, для достоверного определения типа перехода и надежного вычисления критических размерностей при реальных значениях $d = 3$ или $d = 2$, во-первых, необходимо знать как можно большее число членов рядов теории возмущений для “существенных” величин и, во-вторых, требуется некоторое пересуммирование полученных конечных отрезков рядов. Последнее осуществляется с помощью достаточно хорошо разработанных методов [3], [6], [25]–[29], которые тем не менее содержат значительный произвол в выборе вспомогательных “подгоночных” функций и параметров. Данный произвол частично фиксируется требованием соответствия асимптотическим оценкам и стремлением уменьшить влияние старших членов ряда теории возмущений [25].

На наш взгляд, рассматривавшаяся в работе [14] модель идеально подходит для обсуждения таких вопросов. В настоящей работе эта модель применяется для наиболее интересного случая $n = 4$ на основе трехпетлевого РГ-приближения (третий порядок ε -разложения).

План статьи таков. В разделе 2 мы приводим формулировку модели и явные выражения для пропагатора и вершинных множителей. В разделе 3 обсуждается ультрафиолетовая (УФ) ренормировка модели, приводятся соответствующие уравнения РГ, выражения для РГ-функций (β -функций и аномальной размерности) и критического показателя Фишера η . Мы опускаем весьма громоздкие вычисления

и в разделе 4 приводим явные трехпетлевые выражения для РГ-функций, координат трех нетривиальных неподвижных точек и соответствующих им собственных чисел матриц устойчивости (до порядка ε^3 включительно) и показателей η (до порядка ε^4). В разделе 5 мы исследуем асимптотику высоких порядков рядов теории возмущений для β -функций и ε -разложений для остальных вышеупомянутых величин. При этом мы следуем в основном работам [20], [21], где рассматривался комплексный случай, с необходимыми модификациями. Такой “инстантонный анализ” показывает, что ряды являются асимптотическими и допускают суммирование по Борелю.

В разделе 6 кратко обсуждается процедура суммирования с помощью преобразования конформ-бореля и приведены окончательные выражения для координат точек, показателей их устойчивости и показателя Фишера. Эти результаты обсуждаются в разделе 7. Оказывается, что при реальном значении $\varepsilon = 1$ результаты как прямого суммирования трех членов ε -разложения, так и суммирования по Борелю отличаются от результатов первого порядка, но при этом отличаются и друг от друга: в первом случае все нетривиальные точки седловые, а во втором ИК-притягивающая точка присутствует, но это не та точка, которая была ИК-притягивающей в первом порядке. Таким образом, согласно результатам борелевского суммирования трехпетлевого приближения, в модели происходит фазовый переход второго рода, но он принадлежит другому классу универсальности, нежели можно ожидать, рассматривая первый порядок ε -разложения. Кратко обсуждается достоверность такого заключения и возможные направления дальнейшего исследования.

2. МОДЕЛЬ

В настоящей работе рассматривается модель вещественного антисимметричного тензорного поля $\phi = \phi_{ik}(\mathbf{x})$ второго ранга ($\phi_{ik} = -\phi_{ki}$, $i, k = 1, \dots, n$) в d -мерном евклидовом векторном пространстве. Функционал действия имеет вид суммы

$$S(\phi) = S_0(\phi) + V(\phi) \quad (1)$$

квадратичной (свободной) части действия

$$S_0(\phi) = \frac{1}{2} \text{tr}(\phi(-\partial^2 + \tau_0)\phi) \quad (2)$$

и взаимодействия, включающего две независимые части,

$$V(\phi) = V_1(\phi) + V_2(\phi) = -\frac{g_{10}}{4!}(\text{tr}(\phi^2))^2 - \frac{g_{20}}{4!} \text{tr}(\phi^4). \quad (3)$$

Здесь и далее подразумевается интегрирование по d -мерному пространству и суммирование по повторяющимся индексам; ∂^2 обозначает оператор Лапласа, τ_0 – отклонение температуры (или ее аналога) от критического значения, а g_{10} , g_{20} – константы взаимодействия.

Действие (1)–(3) является инвариантным относительно преобразования $\phi \rightarrow \mathcal{O}\phi\mathcal{O}^\dagger$, где $\mathcal{O} \in O(n)$ – ортогональные матрицы. Функции Грина модели задаются соотношением

$$G_k(x_1, \dots, x_k) = C^{-1} \int D\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_k) e^{S(\phi)}, \quad (4)$$

в котором

$$C = \int D\phi e^{S(\phi)}.$$

Свободный пропагатор, определяемый свободным действием (2), в импульсном представлении имеет вид

$$\Delta_{ab;cd} = \frac{J_{ab;cd}}{p^2 + \tau_0}, \quad (5)$$

где тензор $J_{ab;cd}$, играющий роль единичной операции на множестве антисимметричных тензоров в том смысле, что $J_{ik;lm}\phi_{lm} = \phi_{ik}$ и $J_{ik;lm}J_{lm;ef} = J_{ik;ef}$, задается следующим образом:

$$J_{ab;cd} = \frac{1}{2}(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}). \quad (6)$$

Взаимодействие (3) приводит к следующей структуре вершинных множителей: $(-g_{10})V_{ab;cd;ef;mn}^{(1)}$ и $(-g_{20})V_{ab;cd;ef;mn}^{(2)}$. Здесь тензоры

$$V_{ab;cd;ef;mn}^{(1)} = \frac{1}{3}(J_{ab;cd}J_{ef;mn} + J_{ab;ef}J_{cd;mn} + J_{ab;mn}J_{cd;ef}), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} V_{ab;cd;ef;mn}^{(2)} = \frac{1}{6} & (J_{ab;ij}J_{cd;jk}J_{ef;kp}J_{mn;pi} + J_{ab;ij}J_{cd;jk}J_{mn;kp}J_{ef;pi} + \\ & + J_{ab;ij}J_{ef;jk}J_{mn;kp}J_{cd;pi} + J_{ab;ij}J_{ef;jk}J_{cd;kp}J_{mn;pi} + \\ & + J_{ab;ij}J_{mn;jk}J_{ef;kp}J_{cd;pi} + J_{ab;ij}J_{mn;jk}J_{cd;kp}J_{ef;pi}) \end{aligned} \quad (8)$$

определены так, чтобы выполнялись условия

$$V_{ab;cd;ef;mn}^{(1)}\phi_{ab}\phi_{cd}\phi_{ef}\phi_{mn} = (\text{tr}(\phi^2))^2, \quad V_{ab;cd;ef;mn}^{(2)}\phi_{ab}\phi_{cd}\phi_{ef}\phi_{mn} = \text{tr}(\phi^4).$$

Также для обеспечения устойчивости модели необходимо, чтобы взаимодействие (3) было отрицательно определенным на любой конфигурации поля ϕ . Данное требование приводит к ограничениям на значения, которые могут принимать константы взаимодействия:

$$\text{четные } n : \quad 2g_{10} + g_{20} > 0, \quad ng_{10} + g_{20} > 0, \quad (9)$$

$$\text{нечетные } n : \quad 2g_{10} + g_{20} > 0, \quad (n-1)g_{10} + g_{20} > 0. \quad (10)$$

3. УФ-ПЕРЕНОРМИРОВКА

В исследуемой модели поверхностные УФ-расходимости, требующие устранения, присутствуют только в двух- и четырехточечных 1-неприводимых функциях Грина. В настоящей работе используется размерная регуляризация, в рамках которой УФ-расходимости имеют вид полюсов по $\varepsilon = 4 - d$ (отклонению размерности пространства от значения $d = 4$, при котором модель является логарифмической [14]). Перенормированное действие, соответствующее модели (1)–(3), имеет вид

$$S_R(\phi) = \frac{1}{2} \text{tr}(\phi(-Z_1\partial^2 + Z_2\tau)\phi) - \frac{g_1\mu^\varepsilon}{4!} Z_3(\text{tr}(\phi^2))^2 - \frac{g_2\mu^\varepsilon}{4!} Z_4 \text{tr}(\phi^4). \quad (11)$$

Параметры g_1 , g_2 и τ являются ренормированными аналогами затравочных параметров, μ – ренормировочная масса. Действие (11) сохраняет свой вид и после мультипликативной перенормировки поля и параметров теории

$$\phi \rightarrow \phi Z_\phi, \quad \tau_0 \rightarrow \tau Z_\tau, \quad g_{01} \rightarrow g_1 \mu^\varepsilon Z_{g_1}, \quad g_{02} \rightarrow g_2 \mu^\varepsilon Z_{g_2}. \quad (12)$$

Эта эквивалентность может быть установлена на основе соотношений

$$Z_1 = Z_\phi^2, \quad Z_2 = Z_\tau Z_\phi^2, \quad Z_3 = Z_{g_1} Z_\phi^4, \quad Z_4 = Z_{g_2} Z_\phi^4. \quad (13)$$

Константы Z_i вычисляются из требования сокращения расходимостей непосредственно в функциях Грина. В настоящей работе для вычисления констант ренормировки используется схема минимальных вычитаний (МВ), в рамках которой все они имеют вид

$$Z_i = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} A_{ip}(g_{1,2}) \varepsilon^{-p}, \quad (14)$$

где коэффициенты A_{ik} зависят, помимо безразмерных ренормированных зарядов, от параметра n , который определяет число компонент тензорного поля. Уравнение РГ для ренормированной k -точечной функции Грина W_k^R , соответствующей модели (11), имеет вид

$$(\mathcal{D}_\mu + \beta_1 \partial_{g_1} + \beta_2 \partial_{g_2} - \gamma_\tau \mathcal{D}_\tau - k\gamma_\phi) W_k^R = 0, \quad (15)$$

где РГ-функции определяются соотношениями

$$\gamma_i \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_i = -(\mathcal{D}_{g_1} + \mathcal{D}_{g_2}) A_{i1}(g_{1,2}), \quad (16)$$

$$\beta_i \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu g_i = g_i[-\varepsilon - \gamma_{g_i}], \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

Здесь $\mathcal{D}_x \equiv x \partial_x$ для любой переменной x , а $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ есть оператор $\mathcal{D}_\mu$ при фиксированных затравочных параметрах. Возможные асимптотические режимы модели определяются асимптотическим поведением системы дифференциальных уравнений для инвариантного заряда:

$$\mathcal{D}_s \bar{g}_i(s, g) = \beta_i(\bar{g}), \quad \bar{g}_i(1, g) = g_i. \quad (18)$$

Здесь $s = p/\mu$ – безразмерный импульс, $\bar{g}_i(s, g)$ – инвариантные переменные, соответствующие константам взаимодействия. ИК- (при $s \rightarrow 0$) и УФ- (при $s \rightarrow \infty$) поведение функций Грина определяется набором неподвижных точек системы (18), координаты которых ищутся из условия одновременного обращения в нуль всех β -функций:

$$\beta_i(g_*) = 0. \quad (19)$$

Тип неподвижной точки определяется с помощью матрицы ω с элементами

$$\omega_{ik} = \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_k} \right|_{g=g_*}. \quad (20)$$

Неподвижная точка ИК-притягивающая, если матрица ω является положительной в этой точке, т.е. положительна вещественная часть всех ее собственных чисел. Существование ИК-притягивающей неподвижной точки предполагает скейлинговое поведение для всех функций Грина, описываемое критическими индексами, в частности индексом

$$\eta = 2\gamma_\phi(g_{1*}, g_{2*}). \quad (21)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ТРЕХПЕТЛЕВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Трехпетлевой расчет РГ-функций был выполнен на основе формул (14), (16), (17), а также известных значений расходимостей диаграмм скалярной модели ϕ^4 , которые в настоящий момент известны с шестипетлевой точностью. В рамках подхода квантово-полевой РГ четырехпетлевые ответы были получены в работах [30], [31], полный аналитический расчет критических индексов был проведен с использованием методов, развитых в статьях [32]–[34]. Аномальная размерность γ_ϕ , индекс η а также β -функция с пятипетлевой точностью были вычислены в работах [35]–[38]. Наконец, недавно были опубликованы полностью аналитические выражения для γ_ϕ и η с шестипетлевой точностью [39]. Непосредственно использовавшиеся при вычислениях значения расходимостей диаграмм в схеме МВ были взяты из монографии [4]. Вычисление сверток тензорных частей пропагатора и вершин на диаграммах было произведено с помощью программы FORM [40]. При выполнении расчетов была сделана замена $g_{1,2} \rightarrow g_{1,2}/8\pi^2$.

Для всех РГ-функций получены полностью аналитические ответы, однако в силу их громоздкости и того факта, что после применения процедуры пересуммирования значения критических индексов могут быть найдены лишь численно, здесь мы тоже приводим лишь численные значения коэффициентов разложения:

$$\begin{aligned} \beta_1 = & -\varepsilon g_1 + (0.083333n^2 - 0.083333n + 1.333333)g_1^2 + (0.333333n - 0.166666)g_1g_2 + \\ & + 0.25g_2^2 + (-0.125n^2 + 0.125n - 1.166666)g_1^3 + (-0.611111n + 0.305555)g_1^2g_2 + \\ & + (-0.017361n^2 + 0.017361n - 0.569444)g_1g_2^2 + (-0.041666n + 0.020833)g_2^3 + \\ & + (0.004774n^4 - 0.009548n^3 + 0.438509n^2 - 0.433734n + 3.182143)g_1^4 + \\ & + (0.045717n^3 - 0.068576n^2 + 2.616816n - 1.296978)g_1^3g_2 + \\ & + (0.000108n^4 - 0.000217n^3 + 0.291803n^2 - 0.291694n + 2.951300)g_1^2g_2^2 + \\ & + (0.004340n^3 - 0.006510n^2 + 0.549735n - 0.273782)g_1g_2^3 + \\ & + (0.011154n^2 - 0.010926n + 0.128877)g_2^4 + O(g^5), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = & -\varepsilon g_2 + 2g_1g_2 + (0.166666n - 0.083333)g_2^2 + \\ & + (-0.069444n^2 + 0.069444n - 2.277777)g_1^2g_2 + (-0.611111n + 0.305555)g_1g_2^2 + \\ & + (-0.010416n^2 + 0.010416n - 0.208333)g_2^3 + \\ & + (-0.003761n^4 + 0.007523n^3 + 0.342763n^2 - 0.346524n + 7.540658)g_1^3g_2 + \\ & + (-0.010127n^3 + 0.015190n^2 + 3.439114n - 1.722088)g_1^2g_2^2 + \\ & + (0.172105n^2 - 0.172105n + 2.055763)g_1g_2^3 + \\ & + (0.000940n^3 - 0.001524n^2 + 0.136028n - 0.068178)g_2^4 + O(g^5), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\phi = & (0.003472n^2 - 0.003472n + 0.013888)g_1^2 + (0.013888n - 0.006944)g_1g_2 + \\ & + (0.000868n^2 - 0.000868n + 0.003472)g_2^2 + \\ & + (-0.000072n^4 + 0.000144n^3 - 0.001519n^2 + 0.001446n - 0.004629)g_1^3 + \\ & + (-0.000434n^3 + 0.000651n^2 - 0.007161n + 0.003472)g_1^2g_2 + \\ & + (-0.001519n^2 + 0.001519n - 0.002821)g_1g_2^2 + \\ & + (-0.000036n^3 + 0.000054n^2 - 0.000596n + 0.000289)g_2^3 + O(g^5). \end{aligned} \quad (24)$$

По известным разложениям РГ-функций мы вычислили координаты трех нетривиальных критических точек, обнаруженных в работе [14], и соответствующие им критические индексы в форме ε -разложения. В приведенных ниже выражениях сделана подстановка $n = 4$, поскольку в [14] установлено, что нетривиальные неподвижные точки с вещественными координатами могут существовать только в этом случае.

Точка **A**:

$$\begin{aligned} g_1 &= 0.428571\varepsilon + 0.209912\varepsilon^2 - 0.100507\varepsilon^3, & g_2 &= 0, \\ \omega_1 &= \varepsilon - 0.489795\varepsilon^2 + 0.948828\varepsilon^3, & \omega_2 &= -0.142858\varepsilon - 0.151603\varepsilon^2 + 0.117489\varepsilon^3, \\ \eta &= 0.020408\varepsilon^2 + 0.014889\varepsilon^3 - 0.012173\varepsilon^4. \end{aligned}$$

Точка **B**:

$$\begin{aligned} g_1 &= 0.705882\varepsilon + 0.81824\varepsilon^2 - 0.31063\varepsilon^3, & g_2 &= -0.705882\varepsilon - 1.69022\varepsilon^2 + 0.205302\varepsilon^3, \\ \omega_1 &= \varepsilon - 0.541524\varepsilon^2 + 1.019736\varepsilon^3, & \omega_2 &= 0.058823\varepsilon - 0.106556\varepsilon^2 - 0.195425\varepsilon^3, \\ \eta &= 0.020761\varepsilon^2 + 0.017294\varepsilon^3 - 0.010513\varepsilon^4. \end{aligned}$$

Точка **C**:

$$\begin{aligned} g_1 &= 0.818182\varepsilon + 0.466567\varepsilon^2 - 0.258762\varepsilon^3, & g_2 &= -1.09091\varepsilon - 0.622092\varepsilon^2 + 0.345008\varepsilon^3, \\ \omega_1 &= \varepsilon - 0.570248\varepsilon^2 + 1.28289\varepsilon^3, & \omega_2 &= -0.090909\varepsilon + 0.311793\varepsilon^2 - 0.230148\varepsilon^3, \\ \eta &= 0.020661\varepsilon^2 + 0.018398\varepsilon^3 - 0.015186\varepsilon^4. \end{aligned}$$

5. АСИМПТОТИКА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

Ряды теории возмущений по константе связи для функций Грина и, как следствие, ряды для РГ-функций и ряды по ε для критических индексов могут не являться сходящимися [22]–[24]. В частности, именно такая ситуация реализуется для $O(n)$ -симметричной векторной теории, асимптотические свойства рядов в которой достаточно хорошо изучены [28], [31]. В этом случае численные значения критических индексов нельзя получить путем прямого суммирования членов ряда при конкретном значении параметра ε . Вместо этого для придания смысла подобным выражениям должна быть использована процедура пересуммирования асимптотического ряда [26].

Чтобы однозначно ответить на вопрос о поведении рядов теории возмущений для изучаемой модели, необходимо исследовать асимптотическое поведение их коэффициентов в разложениях по паре зарядов $g_{1,2}$. При проведении данного анализа мы следуем работам [20], [21], в которых рассматривалась модель, аналогичная нашей, но с комплексным параметром порядка. Заметим, что в действительности нас интересует поведение разложения не по каждому заряду в отдельности, а лишь по числу петель. Таким образом, мы можем сделать переобозначение $g_i \rightarrow zg_i$ и исследовать поведение рядов по степеням параметра z .

По определению ренормированные функции Грина рассматриваемой модели могут быть записаны в следующем виде:

$$G_k(z, x_1, \dots, x_k) = C^{-1} \int D\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_k) e^{S_R}, \quad C = \int D\phi e^{S_R}, \quad (25)$$

где S_R – действие (11). В разложениях такой функции Грина по параметру z можно представить N -й коэффициент в интегральном виде с помощью формулы Коши:

$$G_k^N(x_1, \dots, x_k) = \oint_{\gamma} dz \frac{G_k(z, x_1, \dots, x_k)}{(-z)^{N+1}}, \quad (26)$$

где γ – контур вокруг нуля. После подстановки (26) в (25) получаем для N -го коэффициента разложения выражение

$$G_k^N(x_1, \dots, x_k) = C^{-1} \int D\phi dz \phi(x_1) \dots \phi(x_k) e^{S - (N+1) \ln(-z)}, \quad (27)$$

асимптотика которого может быть найдена с помощью метода перевала [21]–[24]. Для того чтобы воспользоваться методом перевала, делается растяжение полей $\phi \rightarrow \sqrt{N}\phi$ и зарядов $g \rightarrow g/N^{\mu}$, после чего в показателе экспоненты собирается функционал $N(S - \ln(-z))$. Точка стационарности данного функционала и определяет искомую асимптотику.

Соответствующие уравнения стационарности имеют вид

$$-\partial^2 \phi_{\text{st}} - \frac{z_{\text{st}} g_1}{3!} \phi_{\text{st}} \text{tr}(\phi_{\text{st}}^2) - \frac{z_{\text{st}} g_2}{3!} \phi_{\text{st}} \phi_{\text{st}} \phi_{\text{st}} = 0, \quad (28)$$

$$\int d\mathbf{x} \left\{ \frac{z_{\text{st}} g_1}{4!} (\text{tr}(\phi_{\text{st}}^2))^2 + \frac{z_{\text{st}} g_2}{4!} \text{tr}(\phi_{\text{st}}^4) \right\} = -1. \quad (29)$$

Наличие контрчленов Z_i в действии приводит лишь к поправкам порядка $1/N$ в решении уравнений стационарности, поэтому их можно не учитывать при поиске главного члена асимптотики [24].

Без ограничения общности мы можем считать, что с помощью преобразований $O \in O(n)$ поля ϕ приведены к блочно-диагональному виду с $p = n/2$ блоками:

$$\phi = \begin{pmatrix} s_1 \sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 \sigma & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & s_p \sigma \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Тогда уравнение (28) сводится к системе из p дифференциальных уравнений на функции $s_i(\mathbf{x})$:

$$-\partial^2 s_i(\mathbf{x}) + \frac{z g_1}{3} s_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^p s_j^2(\mathbf{x}) + \frac{z g_2}{6} s_i^3(\mathbf{x}) = 0. \quad (31)$$

При $d = 4$ решение данной системы можно искать в виде

$$s_i(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_i y}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 + y^2}, \quad (32)$$

где $\mathbf{x}_0$ и y – произвольные параметры. Подстановка (32) в (31) приводит к системе алгебраических уравнений на коэффициенты α_i :

$$8\alpha_i + \frac{zg_1}{3}\alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j^2 + \frac{zg_2}{6}\alpha_i^3 = 0. \quad (33)$$

Нетривиальными решениями данной системы являются такие наборы коэффициентов $\{\alpha_i\}$, в которых k коэффициентов равны друг другу и задаются выражением

$$\alpha_k^2 = -\frac{48}{2kzg_1 + zg_2}, \quad (34)$$

а остальные $p - k$ коэффициентов равны нулю; здесь $k = 1, \dots, p$. Таким образом, решениями уравнения (28) являются инстантоны вида (30), содержащие $k = 1, \dots, p$ ненулевых блоков. Подставив полученное решение ϕ_{st} в уравнение (29), найдем явное выражение для точки стационарности:

$$z_k^{st} = -\frac{4k}{2kg_1 + g_2}. \quad (35)$$

По известным инстантону и стационарному значению параметра разложения может быть определена асимптотика коэффициентов разложения функций Грина и, как следствие, β -функций рассматриваемой модели [21], [41]:

$$\beta_i^{(N)}(g_1, g_2) = C_i \cdot N! N^{b_k} (-a(g_1, g_2))^N (1 + O(1/N)), \quad (36)$$

где $b_i = (i^2 - 2i + 22)/4$, C_i – некоторые константы. Особенностью данной модели является тот факт, что $a_k(g_1, g_2) = -1/z_k^{st}$ меняется с изменением $g_{1,2}$ и k . Поэтому главный вклад в асимптотику (36) при каждом конкретном значении g_1, g_2 дается величиной $a(g_1, g_2) = \max_k |a_k(g_1, g_2)|$. Остальные вклады дают лишь экспоненциально малую поправку и должны быть отброшены.

Зная асимптотику коэффициентов β -функции и определения (19)–(21), можно показать, что интересующая нас асимптотика коэффициентов ε -разложений координат неподвижных точек и соответствующих им критических индексов ведет себя следующим образом:

$$g_{1,2*}^{(N)} = \text{Const} \cdot N! N^{b_k+1} (-a(g_{1*}^{(1)}, g_{2*}^{(1)}))^N (1 + O(1/N)), \quad (37)$$

$$\omega_{1,2}^{(N)} = \text{Const} \cdot N! N^{b_k+1} (-a(g_{1*}^{(1)}, g_{2*}^{(1)}))^N (1 + O(1/N)), \quad (38)$$

$$\eta^{(N)} = \text{Const} \cdot N! N^{b_k} (-a(g_{1*}^{(1)}, g_{2*}^{(1)}))^N (1 + O(1/N)), \quad (39)$$

где $g_{1,2*}^{(1)}$ – однопетлевые значения координат неподвижных точек.

Полученные результаты показывают, что ряды ε -разложений являются асимптотическими, поэтому для получения численного значения критических индексов в настоящей работе мы использовали пересуммирование методом преобразования конформ-бореля, содержание которого описано в следующем разделе.

6. ПЕРЕСУММИРОВАНИЕ МЕТОДОМ КОНФОРМ-БОРЕЛЯ

Рассмотрим некую функцию $f(z)$, заданную в виде степенного ряда по переменной z с известными коэффициентами:

$$f(z) = \sum_{N \geq 0} f_N z^N. \quad (40)$$

Преобразование Бореля–Лероя сопоставляет ей функцию $F(z)$, которая называется борелевским образом функции $f(z)$ и определяется как [3]

$$F(t) = \sum_{N \geq 0} F_N t^N = \sum_{N \geq 0} \frac{f_N}{\Gamma(N + b_0 + 1)} t^N, \quad (41)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, а b_0 – произвольный параметр. Обратное преобразование определяется как

$$f^{\text{res}}(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{b_0} F(zt). \quad (42)$$

Если ряд функции $f(z)$ является равномерно сходящимся, функция $f^{\text{res}}(z)$ совпадает с исходной функцией $f(z)$. Однако здесь нас интересует ситуация, когда ряд (40) является асимптотическим и его коэффициенты при $N \rightarrow \infty$ ведут себя, как $f_N \sim N! N^{b_k} (-a)^N (1 + O(1/N))$. В таком случае ряд (41) сходится в круге радиуса $1/a$, так как его коэффициенты $F_N \sim (-a)^N N^{b_k - b_0} (1 + O(1/N))$ при $N \rightarrow \infty$. Это означает, что функция $F(z)$ является аналитической в этом круге и, как следствие, допускает аналитическое продолжение, необходимое для придания смысла выражению (42).

Для построения искомого продолжения можно совершить конформное отображение плоскости, которое переведет область интегрирования в (42) внутрь области аналитичности функции $F(z)$. Функцию, осуществляющую подобное отображение, выберем в виде

$$u(t) = \frac{\sqrt{1+at} - 1}{\sqrt{1+at} + 1} \quad \Longleftrightarrow \quad t(u) = \frac{4u}{a(u-1)^2}.$$

При таком выборе ряд (41) можно переразложить по переменной u ,

$$F(t) = \sum_{N \geq 0} F_N t^N = \sum_{N \geq 0} \tilde{F}_N u(t)^N,$$

в силу того факта, что $u(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$. После осуществления описанной процедуры обратное преобразование (42) приобретает смысл и может быть записано в виде

$$f^{\text{res}}(z) = \sum_{N \geq 0} \tilde{F}_N \int_0^\infty dt e^{-t} t^{b_0} u(zt)^N. \quad (43)$$

Для ускорения сходимости получившегося ряда произвольный параметр пересуммирования b_0 принято фиксировать условием $b_0 = b_k + 3/2$ [31], [29].

Используя формулу (43) и зная параметры асимптотики ε -разложений (37)–(39), можно получить пересуммированные значения координат неподвижных точек и соответствующих им критических индексов.

7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В табл. 1, 2 приведены в сравнении значения координат и критических индексов для неподвижных точек с обеими нетривиальными координатами, полученные методом прямого суммирования ϵ -разложений и суммированием методом конформ-бореля. Видно, что обе неподвижные точки лежат в физической области параметров и до, и после применения процедуры пересуммирования, однако численные значения критических индексов, полученные различными методами, ведут к различному качественному поведению модели, которое тем не менее в обоих случаях отличается от поведения, предсказанного в статье [14] на основе однопетлевого анализа.

В частности, точка **В**, которая была ИК-притягивающей при расчетах с одной петлей, после учета трехпетлевых поправок превращается в седловую точку, так как ее индекс ω_2 является отрицательными и до, и после пересуммирования. Таким образом, данная точка больше не может отвечать за скейлинговое поведение функций Грина.

Таблица 1. Сравнение критических индексов в размерности $d = 3$ для неподвижной точки **В**, полученных путем прямого суммирования ϵ -разложений и суммирования методом конформ-бореля

Индекс	Прямое суммирование	Конформ-борель
g_1	1.213	0.952
g_2	-2.190	-1.335
ω_1	1.478	0.721
ω_2	-0.243	-0.008
η	0.027	0.003

Таблица 2. Сравнение критических индексов в размерности $d = 3$ для неподвижной точки **С**, полученных путем прямого суммирования ϵ -разложений и суммирования методом конформ-бореля

Индекс	Прямое суммирование	Конформ-борель
g_1	1.025	0.896
g_2	-1.367	-1.194
ω_1	1.712	0.724
ω_2	-0.009	0.035
η	0.023	0.003

Непосредственный учет трехпетлевых поправок оставляет седловой и точку **С**, и это означает, что в исследуемой модели теперь невозможен фазовый переход второго рода. Отсутствие ИК-притягивающей неподвижной точки предполагает, что для любого потока РГ существуют только два варианта развития событий: он либо уйдет на бесконечность, не покидая физической области, либо пересечет границу области устойчивости модели. Первая ситуация означает, что к системе, находящейся в подобном режиме, неприменима теория возмущений. Вторая ситуация трактуется как фазовый переход первого рода.

Однако индекс ω_2 , соответствующий точке **C**, численно оказывается достаточно малым, что приводит к смене его знака после учета асимптотического характера ε -разложений и применения процедуры пересуммирования. Следствием этого является смена характера данной неподвижной точки: она перестает быть седловой и становится ИК-притягивающей.

Учет трехпетлевых поправок и асимптотического характера рядов теории возмущений оставляет возможность фазового перехода второго рода в исследуемой модели, но приводит к смене ролей нетривиальных неподвижных точек по сравнению с однопетлевыми результатами.

Также мы обнаружили, что поведение модели оказалось чувствительно по отношению к методу расчета численных значений критических индексов. Как следствие, полученные качественные результаты относительно ее критического поведения могут не являться окончательными и, возможно, изменятся после учета поправок, полученных с большим количеством петель.

Итак, результаты трехпетлевого вычисления после суммирования полученного расходящегося ряда с помощью техники конформ-бореля указывают на необычное и красивое явление: неподвижные точки РГ с ростом параметра ε как бы обмениваются свойствами устойчивости: точка **B** теряет ИК-устойчивость и передает свои ИК-полномочия точке **C**. Эти результаты представляются нам неожиданными, интересными и красивыми, но нельзя не признать, что их достоверность далеко не очевидна и основана на использовании конечного третьего порядка теории возмущений, конкретной схеме ренормировки и выбранной процедуре суммирования. Для оценки достоверности результатов следовало бы вычислить все РГ-функции в следующем порядке РГ-теории возмущений, выполнить их суммирование и исследовать зависимость от процедуры суммирования. Эта задача в значительной степени остается открытой для будущего исследования.

Когда эта статья была направлена в ТМФ, мы с сожалением узнали о скоропостижной кончине Дмитрия Васильевича Ширкова. Мы хотели бы посвятить нашу работу его памяти. Вклад Дмитрия Васильевича и его учеников в развитие квантовой теории поля и, в особенности, метода ренормализационной группы невозможно переоценить. Книги Николая Николаевича Боголюбова и Дмитрия Васильевича Ширкова для нескольких поколений физиков-теоретиков стали “пропуском” в эту сложную, но бесконечно увлекательную область человеческого познания.

Благодарности. Авторы благодарны Л. Ц. Аджемяну, Г. А. Калагову, П. В. Прудникову, В. П. Романову и А. И. Соколову за полезные обсуждения, а также организаторам V Международной конференции “Модели квантовой теории поля” (MQFT–2015) за возможность представить результаты данного исследования.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика. Часть 1*, Наука, М., 1976.
- [2] А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, М., 1982.
- [3] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, International Series of Monographs on Physics, **77**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1989.
- [4] А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.

- [5] H. Kleinert, V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4 -Theories*, World Sci., Singapore, 2001.
- [6] В. В. Прудников, П. В. Прудников, А. Н. Вакилов, *Теоретико-полевые и численные методы описания критических явлений в структурно неупорядоченных системах*, Изд-во Омского ГУ, Омск, 2012.
- [7] R. K. P. Zia, D. J. Wallace, "Critical behaviour of the continuous n -component Potts model", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **8**:9 (1975), 1495–1507; R. G. Priest, T. C. Lubensky, "Critical properties of two tensor models with application to the percolation problem", *Phys. Rev. B*, **13**:9 (1976), 4159–4171; Erratum, **14**:11, 5125.
- [8] А. Л. Корженевский, Б. Н. Шалаев, "Влияние флуктуаций на свойства фазового перехода нематический жидкий кристалл–изотропная жидкость", *ЖЭТФ*, **76**:6 (1979), 2166–2177.
- [9] P. W. Anderson, W. F. Brinkman, "Anisotropic superfluidity in ^3He : a possible interpretation of its stability as a spin-fluctuation effect", *Phys. Rev. Lett.*, **30**:22 (1973), 1108–1111; W. F. Brinkman, J. Serene, P. W. Anderson, "Spin-fluctuation stabilization of anisotropic superfluid states", *Phys. Rev. A*, **10**:6 (1974), 2386–2394.
- [10] А. И. Соколов, "О диаграмме состояний сверхтекучего He^3 ", *ЖЭТФ*, **78**:5 (1980), 1985–1997; "Термодинамические потенциалы сверхтекучих фаз гелия-3 в области сильных критических флуктуаций", *ЖЭТФ*, **84**:4 (1983), 1373–1377.
- [11] J. A. Sauls, J. W. Serene, *Phys. Rev. D*, **17**:6 (1978), 1524–1528.
- [12] А. И. Соколов, "Фазовые переходы в сверхтекучей нейтронной жидкости", *ЖЭТФ*, **79**:4 (1980), 1137–1140.
- [13] М. В. Комарова, М. Ю. Налимов, Ю. Хонконен, "Температурные функции Грина в ферми-системах: сверхпроводящий фазовый переход", *ТМФ*, **176**:1 (2013), 89–97.
- [14] N. V. Antonov, M. V. Kompaniets, N. M. Lebedev, "Critical behaviour of the $O(n)$ - ϕ^4 model with an antisymmetric tensor order parameter", *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:40 (2013), 405002, 11 pp.
- [15] С. А. Бразовский, С. Г. Дмитриев, "Фазовые переходы в холестерических жидких кристаллах", *ЖЭТФ*, **69**:3 (1975), 979–989; С. А. Бразовский, В. М. Филев, "Критические явления в холестерических жидких кристаллах", *ЖЭТФ*, **17**:3 (1978), 1140–1150; H. Grebel, R. M. Hornreich, S. Shtrikman, "Landau theory of cholesteric blue phases", *Phys. Rev. A*, **28**:2 (1983), 1114–1138; "Landau theory of cholesteric blue phases: the role of higher harmonics", *Phys. Rev. A*, **30**:6 (1984), 3264–3278; R. M. Hornreich, S. Shtrikman, "Some open questions in cholesteric blue phases", *Z. Phys. B*, **68**:2 (1987), 369–373.
- [16] В. А. Беляков, В. Е. Дмитренко, "Голубая фаза жидких кристаллов", *УФН*, **146**:3 (1985), 369–415.
- [17] Ю. А. Изюмов, В. Н. Сыромятников, *Фазовые переходы и симметрия кристаллов*, Наука, М., 1984.
- [18] M. T. Dove, S. A. T. Redfern, "Lattice simulation studies of the ferroelastic phase transitions in $(\text{Na},\text{K})\text{AlSi}_3\text{O}_8$ and $(\text{Sr},\text{Ca})\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_8$ feldspar solid solutions", *Am. Mineral.*, **82**:1–2 (1997), 8–15; G. W. Watson, S. C. Parker, "Dynamical instabilities in α -quartz and α -berlinite: a mechanism for amorphization", *Phys. Rev. B*, **52**:18 (1995), 13306–13309.
- [19] С. В. Горяйнов, Н. Н. Овсяк, "Скручивание тетраэдров α -кварца при давлениях вблизи перехода в аморфное состояние", *Письма в ЖЭТФ*, **69**:6 (1999), 431–435; "Механизм возникновения мягкой моды при сегнетоэластическом фазовом переходе", *Письма в ЖЭТФ*, **73**:8 (2001), 456–459.
- [20] G. A. Kalagov, M. V. Kompaniets, M. Yu. Nalimov, *Renormalization-group investigation of a superconducting $U(r)$ -phase transition using five loops calculations*, arXiv: 1505.07360.
- [21] Г. А. Калагов, М. Ю. Налимов, М. В. Компаниец, "Ренормгрупповое исследование сверхпроводящего фазового перехода: асимптотика высоких порядков разложений и результаты трехпетлевых расчетов", *ТМФ*, **181**:2 (2014), 374–386.

- [22] С. М. Bender, Т. Wu, “Anharmonic oscillator”, *Phys. Rev.*, **184**:5 (1969), 1231–1260.
- [23] А. Г. Басуев, А. Н. Васильев, “Способ суммирования ряда теории возмущений в скалярных теориях”, *ТМФ*, **18**:2 (1974), 181–189.
- [24] Л. Н. Липатов, “Расходимость ряда теории возмущений и квазиклассика”, *ЖЭТФ*, **72**:2 (1977), 411–427.
- [25] Д. И. Казаков, О. В. Тарасов, Д. В. Ширков, “Аналитическое продолжение результатов теории возмущений модели $g\varphi^4$ в область $g \gtrsim 1$ ”, *ТМФ*, **38**:1 (1979), 15–25.
- [26] D. I. Kazakov, D. V. Shirkov, “Asymptotic series of quantum field theory and their summation”, *Fortsch. Phys.*, **28**:8–9 (1980), 465–499.
- [27] Д. В. Ширков, “Асимптотические ряды в квантово-полевых асимптотиках”, *ТМФ*, **40**:3 (1979), 340–347.
- [28] E. Brézin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, “Perturbation theory at large order. I. The ϕ^{2N} interaction”, *Phys. Rev. D*, **15**:6 (1977), 1544–1557.
- [29] J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, “Critical exponents from field theory”, *Phys. Rev. B*, **21**:9 (1980), 3976–3998.
- [30] E. Brezin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, B. G. Nickel, “Higher order contributions to critical exponents”, *Phys. Lett. A*, **44**:3 (1973), 227–228.
- [31] А. А. Владимиров, Д. И. Казаков, О. В. Тарасов, “О вычислении критических индексов методами квантовой теории поля”, *ЖЭТФ*, **77**:3 (1979), 1035–1045.
- [32] А. А. Владимиров, “Об инвариантной регуляризации”, *ТМФ*, **35**:3 (1978), 392–397.
- [33] А. А. Владимиров, “Методы вычисления многопетлевых диаграмм и ренормгрупповой анализ теории φ^4 ”, *ТМФ*, **36**:2 (1978), 271–278.
- [34] А. А. Владимиров, “Метод вычисления ренормгрупповых функций в схеме размерной ренормировки”, *ТМФ*, **43**:2 (1980), 210–217.
- [35] K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev, F. V. Tkachev, “Five-loop calculations in the $g\phi^4$ model and the critical index η ”, *Phys. Lett. B*, **99**:2 (1981), 147–150; Erratum, **101**:6, 457–458.
- [36] K. G. Chetyrkin, S. G. Gorishny, S. A. Larin, F. V. Tkachov, “Five-loop renormalization group calculations in the $g\phi^4$ theory”, *Phys. Lett. B*, **132**:4–6 (1983), 351–354; С. Г. Горинский, С. А. Ларин, Ф. В. Ткачев, К. Г. Четыркин, *Аналитическое вычисление пятипетлевых приближений ренормгрупповых функций модели $g\phi^4(4)$ в MS -схеме: по-диаграммный анализ*, Препринт ИЯИ АН СССР П-0453, ИЯИ, М., 1986.
- [37] D. I. Kazakov, “The method of uniqueness, a new powerful technique for multiloop calculations”, *Phys. Lett. B*, **133**:6 (1983), 406–410; Д. И. Казаков, “Вычисление фейнмановских интегралов методом “уникальностей””, *ТМФ*, **58**:3 (1984), 343–353.
- [38] H. Kleinert, J. Neu, V. Shulte-Frohlinde, K. G. Chetyrkin, S. A. Larin, “Five-loop renormalization group functions of $O(n)$ -symmetric ϕ^4 theory and ϵ -expansions of critical exponents up to ϵ^5 ”, *Phys. Lett. B*, **272**:1–2 (1991), 39–44; Erratum **319**:4 (1993), 545.
- [39] D. V. Batkovich, K. G. Chetyrkin, M. V. Kompaniets, “Six loop analytical calculation of the field anomalous dimension and the critical exponent η in $O(n)$ -symmetric ϕ^4 model”, *Nucl. Phys. B*, **906** (2016), 147–167, arXiv: 1601.01960.
- [40] J. A. M. Vermaseren, *New features of FORM*, arXiv: math-ph/0010025; J. Kuipers, T. Ueda, J. A. M. Vermaseren, J. Vollinga, “FORM version 4.0”, *Comp. Phys. Commun.*, **184**:5 (2013), 1453–1467.
- [41] М. В. Комарова, М. Ю. Налимов, “Асимптотика старших порядков теории возмущений: константы ренормировки $O(n)$ -симметричной теории ϕ^4 в $(4 - \epsilon)$ -разложении”, *ТМФ*, **126**:3 (2001), 409–426.