Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Немков, О модулярных преобразованиях в теории
Лиувилля, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 2, 198–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:27:43

© 2016 г.

Н. А. Немков^{*†}

О МОДУЛЯРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ В ТЕОРИИ ЛИУВИЛЛЯ

Модулярное ядро невырожденных конформных блоков в теории Лиувилля изучается как решение разностных уравнений, происходящих из тождества пентагона. Предлагается подход к решению этих уравнений, основанный на непертурбативном разложении, которое позволяет вычислять модулярное ядро итерационно. Также найдены точные решения для специальных значений центрального заряда $c = 1 + 6(b - b^{-1})^2$, $b \in \mathbb{N}$. Для $c = 1$ полученный результат воспроизводит формулу, полученную ранее из аналитических свойств решений уравнения Пенлеве, однако предложенное решение имеет значительно упрощенный вид.

Ключевые слова: конформная теория поля, теория Лиувилля, алгебра Вирасоро.

DOI: 10.4213/tmf9137

1. ВВЕДЕНИЕ

Конформные блоки являются основными специальными функциями конформных теорий поля (КТП) [1]. КТП возникают в многочисленных областях современной теоретической и математической физики и в течение долгого времени находятся под пристальным вниманием исследователей. В последнее время всплеск интереса вызван замечательными соотношениями Алдая–Гайотто–Тачикавы [2], связывающими двумерные КТП с суперсимметричными калибровочными теориями в старших размерностях. С этой точки зрения конформные блоки двумерных КТП являются статистическими суммами калибровочных теорий.

Многие важные свойства конформных блоков стали уже понятными, но многие еще предстоит открыть. Настоящая статья посвящена одному конкретному аспекту их поведения. На пространстве конформных блоков естественным образом действует модулярная алгебра [3]. На стороне калибровочных теорий модулярные

Работа частично поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1500.2014.2) и РФФИ (гранты № 13-02-00457 и 14-02-31372-мол_а).

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия

[†]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия. E-mail: nnemkov@gmail.com

преобразования соответствуют преобразованиям дуальности. В определенных случаях, называемых вырожденными, пространство конформных блоков конечномерно и модулярная алгебра состоит просто из матриц конечного размера. Эти матрицы известны в явном виде или, вообще говоря, могут быть вычислены. Однако в общем случае пространство конформных блоков бесконечномерно и обобщения этих конечномерных матриц исследованы неполно.

Модулярное ядро в теории Лиувилля для произвольных значений параметров было найдено в работах [4], [5]. Остаются сомнения в том, что эти результаты применимы к случаю единичного центрального заряда. Этот специальный случай был исследован в статье [6]. Формально результаты упомянутых работ дают ответ на поставленный вопрос. Однако явные формулы весьма сложны и могут скрывать некоторые важные свойства и/или допускать значительное упрощение. В настоящей статье мы выберем другой подход к этой задаче, который, как мы надеемся, поможет прояснить ситуацию.

Мы выводим разностные уравнения для модулярного ядра. С помощью специального анзаца эти уравнения могут решаться итерационно, давая явное разложение модулярного ядра. Разложение осуществляется в терминах “непертурбативных” параметров, контролирующих предел больших промежуточных размерностей. В случае единичного центрального заряда (а также для $c = 1 + 6(b - b^{-1})^2$, $b \in \mathbb{N}$) мы находим точное решение, которое оказывается значительно упрощенной версией выражения, предложенного в работе [6].

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

В литературе нет единообразия обозначений, поэтому мы сначала фиксируем их. Центральный заряд конформной теории обозначается как c ; он параметризован следующим образом:

$$c = 1 - 6Q^2, \quad Q = b - b^{-1}. \quad (1)$$

В наиболее полной форме мы будем записывать конформный блок как

$$B_a \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} (x)$$

или представлять графически как

$$B_a \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} (x) = \begin{array}{c} a_2, x \quad \quad \quad a_3, 1 \\ | \quad \quad \quad | \\ a_1, 0 \quad \quad a \quad \quad a_4, \infty \end{array}, \quad (2)$$

где a и a_i , $i = 1, 2, 3, 4$, суть внутренний и внешние лиувиллевские импульсы. Они параметризуют конформные размерности Δ , Δ_i :

$$\Delta = a(Q - a), \quad \Delta_i = a_i(Q - a_i). \quad (3)$$

Параметр x интерпретируется как положение поля с импульсом a_2 , если остальные поля размещены в точках $0, 1, \infty$. Модулярное ядро обозначается как

$$\mathcal{F}_{aa'} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Зачастую мы будем опускать зависимость от внешних размерностей и писать просто $B_a(x)$ и $\mathcal{F}_{aa'}$ для конформного блока и модулярного ядра.

3. МОДУЛЯРНАЯ АЛГЕБРА

Конформные блоки возникают естественным образом при разложении корреляционных функций в КТП [1]. Это разложение может быть выполнено различными способами, определяя тем самым различные конформные блоки. Требование эквивалентности разложений задает соотношения между различными типами конформных блоков [3].

Наряду с конформным блоком (2), который часто называют s -канальным, мы используем t -канальный конформный блок, графически представляющийся как

$$B_a^t \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} (x) = \begin{array}{c} a_2, x \quad a_3, 1 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad a \\ \quad \quad | \\ a_1, 0 \quad a_4, \infty \end{array} .$$

Предполагается, что s - и t -канальные конформные блоки связаны линейным интегральным преобразованием

$$B_a^s \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} (x) = \int da' \mathcal{F}_{aa'} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} B_{a'}^t \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} (x) \quad (5)$$

или, в терминах графов (здесь и далее мы опускаем координаты),

$$\begin{array}{c} a_2 \quad a_3 \\ | \quad | \\ a_1 \quad a \quad a_4 \end{array} = \int da' \mathcal{F}_{aa'} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{array} \begin{array}{c} a_2 \quad a_3 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad a' \\ \quad \quad | \\ a_1 \quad a_4 \end{array} .$$

Это преобразование называется модулярным преобразованием, а $\mathcal{F}_{aa'}$ называется модулярным ядром.

Существует специальный случай, когда одно из полей в конформном блоке вырождено. Вырождение поля соответствует специальному значению его размерности/импульса. В настоящей статье мы используем только вырожденные поля с импульсом $a_{\text{deg}} = -b/2$. Можно показать, что в этом случае промежуточные импульсы a, a' не могут быть произвольными, а принимают только два возможных значения $a = a_1 \pm b/2$ и $a' = a_3 \pm b/2$. Таким образом, пространство конформных блоков с фиксированными внешними размерностями оказывается двумерным, а соответствующее модулярное ядро – матрицей размера 2×2 . В специальном базисе конформных блоков эта модулярная матрица есть [4]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{a_1+s_1b/2, a_3+s_2b/2} \begin{bmatrix} -b/2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} &\equiv \mathcal{F}_{s_1, s_2} \begin{bmatrix} -b/2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} = \\ &= s_1 \frac{\sin \pi b(a_4 + s_1 a_3 - s_2 a_1 - (1 + s_1 - s_2)b/2)}{\sin \pi b(2a_3 - b)}; \end{aligned} \quad (6)$$

здесь и далее s_1 и s_2 принимают значения ± 1 . Эти матрицы связаны с матрицами $F_{aa'}$ в стандартном базисе¹⁾ следующим образом:

$$\mathcal{F}_{aa'} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} = \frac{N_a \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix}}{N_{a'} \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}} F_{aa'} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} N_a \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} &= V(a_4; a_3, a) V(a; a_2, a_1), \\ V(a_1; a_2, a_3) &= \frac{\Gamma_b(a_1 + a_2 + a_3 + b - 2Q) \Gamma_b(a_1 - a_2 - a_3 + b)}{\Gamma_b(2a_1 + b - 2Q) \Gamma_b(-2a_2 + b) \Gamma_b(-2a_3 + b)} \times \\ &\times \Gamma_b(-a_1 + a_2 - a_3 + b) \Gamma_b(-a_1 - a_2 + a_3 + b). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\Gamma_b(x)$ связана с двойной гамма-функцией, $\Gamma_b(x) = \Gamma_2(x|b, b^{-1})$, и удовлетворяет соотношению

$$\frac{\Gamma_b(x+b)}{\Gamma_b(x)} = \frac{\sqrt{2\pi} b^{bx-1/2}}{\Gamma(bx)}. \quad (9)$$

Модулярное ядро $\mathcal{F}_{aa'}$ должно подчиняться определенным условиям согласованности. В следующем разделе мы используем эти условия и явные выражения для модулярной матрицы в вырожденном случае (6), чтобы вывести набор разностных уравнений для модулярного ядра с произвольными значениями внешних импульсов.

4. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОДУЛЯРНОГО ЯДРА

Рассмотрим два пути, ведущих из верхнего левого состояния (s -канальный конформный блок с вырожденной вставкой на линии a_1) к нижнему правому состоянию (t -канальный конформный блок с вырожденным полем на линии a_2):

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} a_2 \quad a_3 \\ | \quad | \\ \cdots \quad | \\ a_{s_1} \quad a_1 \quad a \quad a_4 \end{array} = \int da' \mathcal{F}_{aa'} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} a_2 \quad a_3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \\ \cdots \quad | \\ a_{s_1} \quad a_1 \quad a \quad a_4 \end{array} \\ & \quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel \\ & \sum_{s_2} \mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(a_i, a) \quad \quad \quad \sum_{s, s_2} \mathcal{O}_B^{s; s_1, s_2}(a_i, a') e^{s(b/2)\partial_{a'}} \\ & \begin{array}{c} a_2 \quad a_3 \\ | \quad | \\ \cdots \quad | \\ a_{s_2} \quad a \quad a_4 \end{array} = \int da' \mathcal{F}_{aa'} \begin{bmatrix} a_{s_2} & a_3 \\ a_{s_1} & a_4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} a_2 \quad a_3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \cdots \quad | \\ a_{s_1} \quad a_{s_2} \quad a' \quad a_4 \end{array} \end{aligned}$$

¹⁾Под стандартным имеется в виду базис, в котором разложение конформного блока таково:

$$B_\Delta(x) = x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} \left(1 + \frac{(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta - \Delta_3 + \Delta_4)}{2\Delta} x + \dots \right).$$

Поясним эту диаграмму. Пунктирные линии обозначают вставки вырожденного поля с импульсом $-b/2$. Импульс линии, к которой прикреплено вырожденное поле, сдвигается на величину $\pm b/2$, что и отражают обозначения $a_{s_1} \equiv a_1 + s_1 b/2$ и $a_{s_2} \equiv a_2 + s_2 b/2$, в правой части которых $s_1, s_2 = \pm 1$. Горизонтальные равенства в верхней и нижней строках следуют просто из определения модулярного преобразования. Вертикальное равенство в первом столбце также соответствует модулярному преобразованию, примененному к подграфу с внешними линиями размерностей $\{a_{s_1}, -b/2, a_2, a\}$. Коэффициенты $\mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(a_i, a)$ имеют вид

$$\mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(a_i, a) = \mathcal{F}_{-s_1, s_2} \begin{bmatrix} -b/2 & a_2 \\ a_{s_1} & a \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Наконец, вертикальное равенство во втором столбце получается применением модулярного преобразования дважды. Первое действие перемещает вырожденное поле на внутреннюю линию и задается матрицей

$$\mathcal{F}_{-s_1, s} \begin{bmatrix} -b/2 & a' \\ a_{s_1} & a_4 \end{bmatrix}.$$

Второе действие перемещает вырожденное поле дальше, на линию a_2 , и задается матрицей

$$\mathcal{F}_{-s, s_2}^{-1} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ -b/2 & a'_s \end{bmatrix} = \mathcal{F}_{-s, s_2} \begin{bmatrix} -b/2 & a_2 \\ a_{s'} & a_3 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Таким образом, коэффициенты $\mathcal{O}_B^{s; s_1, s_2}$ суть

$$\mathcal{O}_B^{s; s_1, s_2} = \mathcal{F}_{-s_1, s} \begin{bmatrix} -b/2 & a' \\ a_{s_1} & a_4 \end{bmatrix} \mathcal{F}_{-s, s_2} \begin{bmatrix} -b/2 & a_2 \\ a_{s'} & a_3 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

В процессе переноса вырожденного поля через внутреннюю размерность соответствующий импульс a' сдвигается на $\pm b/2$, $a'_s = a' + sb/2$, $s = \pm 1$, что и объясняет появление операторов сдвига $e^{s(b/2)\partial_{a'}}$.

Таким образом, эквивалентность двух путей дает уравнение

$$\begin{aligned} \sum_{s_2} \mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(a_i, a) \int da' \mathcal{F}_{aa'} \begin{bmatrix} a_{s_2} & a_3 \\ a_{s_1} & a_4 \end{bmatrix} B_{a'}^{5\text{-point}}(x) = \\ = \int da' \mathcal{F}_{aa'} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} \sum_{s, s_2} \mathcal{O}_B^{s; s_1, s_2}(a_i, a') e^{s(b/2)\partial_{a'}} B_{a'}^{5\text{-point}}(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $B_{a'}^{5\text{-point}}(x)$ обозначает четырехточечный конформный блок с вырожденной вставкой на линии a_2 , являющийся финальным состоянием обоих путей на диаграмме.

Можно сделать замену переменных во втором интеграле в (13), чтобы перенести действие операторов сдвига с конформного блока на модулярное ядро:

$$\begin{aligned} \sum_{s, s_2} \mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(a_i, a) \int da' \mathcal{F}_{aa'} \begin{bmatrix} a_{s_2} & a_3 \\ a_{s_1} & a_4 \end{bmatrix} B_{a'}^{5\text{-point}}(x) = \\ = \int da' \left(e^{-s(b/2)\partial_{a'}} \left(\mathcal{F}_{aa'} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} \sum_{s, s_2} \mathcal{O}_B^{s; s_1, s_2}(a_i, a') \right) \right) B_{a'}^{5\text{-point}}(x). \end{aligned} \quad (14)$$

Введем операторы

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{O}}_A^{s_1, s_2}(a_i, a) &= \mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(a_i, a)e^{(b/2)(s_1\partial_{a_1} + s_2\partial_{a_2})}, \\ \hat{\mathcal{O}}_B^{s_1, s_2}(a_i, a') &= \sum_s e^{-s(b/2)\partial_{a'}} \mathcal{O}_B^{s; s_1, s_2}(a_i, a').\end{aligned}\quad (15)$$

Тогда уравнение (14) запишется в виде

$$\begin{aligned}\int da' \sum_{s_2} \left(\hat{\mathcal{O}}_A^{s_1, s_2}(a_i, a) \mathcal{F}_{aa'} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} \right) B_{a'}^{5\text{-point}}(x) = \\ = \int da' \sum_{s_2} \left(\hat{\mathcal{O}}_B^{s_1, s_2}(a_i, a) \mathcal{F}_{aa'} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} \right) B_{a'}^{5\text{-point}}(x).\end{aligned}\quad (16)$$

Как левая, так и правая часть этого уравнения являются линейными комбинациями конформных блоков. Два конформных блока всегда линейно независимы, кроме случая когда все их размерности (как внешние, так и внутренние) попарно (между блоками) совпадают. Таким образом, в формуле (16) можно опустить интегрирование по a_2 и суммирование, получая уравнения

$$\hat{\mathcal{O}}_A^{s_1, s_2}(a_i, a) \mathcal{F}_{aa'} = \hat{\mathcal{O}}_B^{s_1, s_2}(a_i, a') \mathcal{F}_{aa'}.\quad (17)$$

В оставшейся части статьи мы изучаем различные следствия и ищем решения уравнений (17). Следует подчеркнуть, что эти уравнения не являются новыми. Они представляют собой частные случаи (когда некоторые размерности вырождены) тождества пентагона, необходимого для самосогласованности модулярной алгебры. В статье [4] аналогичные уравнения были отправной точкой для исследования модулярного ядра. Их решение было получено путем установления связи с квантовыми группами и идентификации модулярного ядра как коэффициентов Рака–Вигнера некоторого бесконечномерного представления группы $\mathcal{U}_q(sl_2)$. Другой подход, который был предложен в статье [6], основан на соответствии между модулярным ядром и связывающим коэффициентом уравнения Пенлеве VI. В настоящей работе мы используем более непосредственный подход к решению уравнений (17), надеясь, что он принесет дополнительную ясность в исследуемый вопрос.

Сделаем еще одно замечание относительно уравнений (17). Они происходят из тождества пентагона, которое не сохраняется при произвольной перенормировке модулярных ядер. Нетривиальным и важным для наших целей фактом является то, что матрицы (6) могут быть использованы в тождестве пентагона. В этом можно убедиться непосредственно, подставив выражения (7), (8) в тождество пентагона и проверив, что все нормировочные множители сокращаются.

5. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнения (17) содержат операторы сдвига как по внешним, так и по внутреннему импульсам. Это затрудняет их непосредственное решение. Вместо этого можно устранить разностные операторы по внешним импульсам ценой получения разностных операторов второго порядка по внутренним импульсам.

Применим оператор $\widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, -s_2}(a_i, a)$ к обеим частям уравнения (17). В левой части получим

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, -s_2}(a_i, a) \widehat{\mathcal{O}}_A^{s_1, s_2}(a_i, a) \mathcal{F}_{aa'} &= \\ &= \mathcal{O}_A^{-s_1, -s_2}(a_i, a) e^{(b/2)(-s_1 \partial_{a_1} - s_2 \partial_{a_2})} \mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(a_i, a) e^{(b/2)(s_1 \partial_{a_1} + s_2 \partial_{a_2})} \mathcal{F}_{aa'} = \\ &= \mathcal{O}_A^{-s_1, -s_2}(a_i, a) (e^{(b/2)(-s_1 \partial_{a_1} - s_2 \partial_{a_2})} \mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(a_i, a)) \mathcal{F}_{aa'}. \end{aligned} \quad (18)$$

В правой части получим

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, -s_2}(a_i, a) \widehat{\mathcal{O}}_B^{s_1, s_2}(a_i, a') \mathcal{F}_{aa'} &= \\ &= \mathcal{O}_A^{-s_1, -s_2}(a_i, a) e^{(b/2)(-s_1 \partial_{a_1} - s_2 \partial_{a_2})} \sum_s e^{-s(b/2) \partial'_a} \mathcal{O}_B^{s; s_1, s_2}(a_i, a') \mathcal{F}_{aa'} = \\ &= \sum_s e^{-s(b/2) \partial'_a} (e^{(b/2)(-s_1 \partial_{a_1} - s_2 \partial_{a_2})} \mathcal{O}_B^{s; s_1, s_2}(a_i, a')) \widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, -s_2} \mathcal{F}_{aa'} = \\ &= \sum_s e^{-s(b/2) \partial'_a} (e^{(b/2)(-s_1 \partial_{a_1} - s_2 \partial_{a_2})} \mathcal{O}_B^{s; s_1, s_2}(a_i, a')) \widehat{\mathcal{O}}_B^{-s_1, -s_2} \mathcal{F}_{aa'}. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь в левой части уравнения (17) нет операторов сдвига, действующих на $\mathcal{F}_{aa'}$. В правой части последовательно действуют два оператора, каждый из которых сдвигает внутреннюю размерность модулярного ядра $\mathcal{F}_{aa'}$ на $\pm b/2$. Следовательно, правая часть может быть представлена в виде суммы трех членов, которые содержат модулярное ядро $\mathcal{F}_{aa'}$ с импульсом a' , сдвинутым на $-b$, 0 или на b . Поэтому уравнение

$$\widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, -s_2}(a_i, a) \widehat{\mathcal{O}}_A^{s_1, s_2}(a_i, a) \mathcal{F}_{aa'} = \widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, -s_2}(a_i, a) \widehat{\mathcal{O}}_B^{s_1, s_2}(a_i, a') \mathcal{F}_{aa'} \quad (20)$$

можно преобразовать в линейное разностное уравнение второго порядка относительно операторов сдвига по a' . На самом деле таких уравнений четыре, по числу возможных выборов знаков в s_1 и s_2 . Однако все эти уравнения оказываются эквивалентными единственному уравнению, которое мы запишем в следующем виде:

$$(C_+(a, a') e^{b \partial_{a'}} + C_0(a, a') + C_-(a, a') e^{-b \partial_{a'}}) \mathcal{F}_{aa'} = 0. \quad (21)$$

Функции $C_i(a, a')$ можно вычислить, но ответ в общем случае довольно громоздкий. Явные выражения для функций $C_i(a, a')$ приведены в приложении A.1.

Аналог уравнения (21) был предложен в работе [7], где он получен из других предпосылок: в рамках подхода матричных моделей с использованием формализма чек-операторов. При этом было показано, что аналог уравнения (21) для торического модулярного ядра согласуется с результатом, полученным в статье [8]. Мы полагаем, что язык матричных моделей является эквивалентным нашему. Таким образом, согласованность выводов статей [4] и [7] неудивительна: как уравнение второго порядка, использованное в [7], так и набор уравнений первого порядка, использованный в [4], следуют из тождества пентагона.

6. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

6.1. Модель Ашкина–Теллера. Когда центральный заряд теории $c = 1$, а все внешние размерности $\Delta_i = 1/16$, конформный блок, называемый конформным блоком Ашкина–Теллера, известен в замкнутой форме [9]. Это позволяет вычислить

соответствующее модулярное ядро в явном виде. Оказывается, что в этом случае модулярное ядро есть просто ядро преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}_{aa'} \left[\begin{array}{cc} 1/16 & 1/16 \\ 1/16 & 1/16 \end{array} \right] \Big|_{c=1} = e^{-2\pi i aa'}. \quad (22)$$

Мы можем проверить справедливость уравнения (21) в этом частном случае. Если $c = 1$ и $\Delta_i = 1/16$, то функции $C_i(a, a')$, явный вид которых задан выражениями (A.1), сводятся к

$$C_+(a, a') = 1, \quad C_0(a, a') = -2 \cos 2\pi a, \quad C_-(a, a') = 1, \quad (23)$$

в результате уравнение (21) принимает следующий вид ($b = 1$ при $c = 1$):

$$(e^{\partial_{a'}} - 2 \cos 2\pi a + e^{-\partial_{a'}}) \mathcal{F}_{aa'} = 0. \quad (24)$$

Таким образом, ядро Фурье (22) действительно дает решение этого уравнения.

6.2. Пертурбативный предел. В статьях [10], [11] исследован предел больших промежуточных размерностей $a, a' \rightarrow \infty$ в нескольких первых порядках степенного разложения по параметрам $1/a, 1/a'$ и обнаружено, что при надлежащей нормировке асимптотическая форма модулярного ядра снова является ядром преобразования Фурье, в то время как несколько первых пертурбативных поправок отсутствуют:

$$\mathcal{F}_{aa'} \left[\begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{array} \right] = e^{-2\pi i aa' + O(a^{-6})}. \quad (25)$$

Подчеркнем, что эта формула справедлива для любых значений внешних импульсов a_i и центрального заряда c . В последующих работах [12], [7] было показано, что формула (25) верна в любом порядке теории возмущений. Однако понятно, что преобразование Фурье не может быть полным ответом, поскольку точные результаты работ [4]–[6] с необходимостью подразумевают более сложную формулу и, следовательно, существование непертурбативных поправок. Основной целью настоящей статьи является исследование этих непертурбативных поправок.

Очень важным для наших последующих рассуждений является тот факт, что функции $C_i(a, a')$ зависят от внутренних размерностей a, a' только через параметры $u = e^{2\pi i ba}$, $u' = e^{2\pi i ba'}$, т.е. $C_i(a, a') = C_i(u, u')$ (для краткости мы используем одинаковые обозначения для функций от u, u' и функций от a, a'). Это является спецификой выбранной нормировки.

В пространстве параметров КТП существует область, в которой при $a, a' \rightarrow \infty$ параметры $u, u' \rightarrow 0$ и являются экспоненциально малыми. В пределе $u' = 0$ функции $C_i(u, u')$ сводятся к

$$C_+(u, 0) = 1, \quad C_0(u, 0) = -(u + u^{-1} e^{-2\pi i b^2}) \equiv -2 \cos 2\pi b, \quad C_-(u, 0) = e^{-2\pi i b^2},$$

а уравнение (21), умноженное на $e^{i\pi b^2}$, принимает вид

$$\left(e^{i\pi b^2} e^{b\partial_{a'}} - 2 \left(a - \frac{b}{2} \right) \cos 2\pi b + e^{-i\pi b^2} e^{-b\partial_{a'}} \right) \mathcal{F}_{aa'} = 0 \quad (26)$$

и также имеет решение в виде ядра Фурье $\mathcal{F}_{aa'} = e^{-2\pi i aa'}$.

7. НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ ПОПРАВКИ

7.1. Случай общего центрального заряда. В предыдущем разделе мы видели, что пертурбативная фурье-подобная форма модулярного преобразования может быть восстановлена в пределе $a, a' \rightarrow \infty$, а малыми параметрами, входящими в уравнения, являются величины $u = e^{2\pi i b a}$, $u' = e^{2\pi i b a'}$. В настоящем разделе нашей целью является исследование разложения модулярного ядра по степеням переменных u, u' . На самом деле для решения уравнения (21) методом итераций достаточно работать с разложением по одной из переменных, например по u' . Каждый член разложения по u' будет точной функцией переменной u .

Итак, запишем разложение

$$\mathcal{F}_{aa'} = e^{-2\pi i a a'} \sum_j \phi^j(a, a') (u')^j = e^{-2\pi i a a'} (\phi^0(a, a') + u' \phi^1(a, a') + \dots), \quad (27)$$

где выделение фурье-множителя сделано для удобства. Здесь $\phi^j(a, a')$ – пока не зафиксированные функции, удовлетворяющие двум требованиям:

- они не растут слишком быстро при $a, a' \rightarrow \infty$, так что $(u')^j \phi^j(a, a')$ действительно являются малыми поправками в этом режиме;
- они не содержат нетривиальной зависимости от u' , так что две различные поправки на самом деле имеют разный порядок по u' .

Оба требования можно выполнить, если выбрать функции $\phi^j(a, a')$ полиномиальными по a' . Явная форма модулярного ядра при $c = 1$ также указывает на полиномиальную форму поправок. Вопрос о том, существуют ли решения, не описываемые таким анзацем, представляется важным. Однако мы не будем обсуждать его в настоящей статье, ограничившись полиномиальной подстановкой.

Введем обозначение для разностного оператора из уравнения (21),

$$\hat{C}(u, u') = C_+(u, u') e^{b \partial_{a'}} + C_0(u, u') + C_-(u, u') e^{-b \partial_{a'}}, \quad (28)$$

и для его разложения по u' ,

$$\hat{C}(u, u') = \sum_j (u')^j \hat{C}^j(u) = \hat{C}^0(u) + u' \hat{C}^1(u) + \dots \quad (29)$$

Тогда в нулевом порядке уравнение (21) дает

$$\begin{aligned} \hat{C}^0(u, u') \phi^0(a, a') &= \\ &= (u^{-1} e^{i\pi b^2} e^{b \partial_{a'}} - (u^{-1} e^{i\pi b^2} + u e^{-i\pi b^2}) + u e^{-i\pi b^2} e^{-b \partial_{a'}}) \phi^0(a, a') = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно нашему анзацу функция $\phi^0(a, a')$ является полиномом по переменной a' . Нетрудно проверить, что разностный оператор $\hat{C}^0$ понижает степень полинома, на который он действует. Это свойство делает $\hat{C}^0$ схожим с обыкновенным дифференциальным оператором и приводит к тому, что любое полиномиальное решение уравнения (30) постоянно по a' . Иными словами, $\phi^0(a, a')$ зависит лишь от a , $\phi^0(a, a') = \phi^0(a)$. В свою очередь зависимость от a определяется из аналога уравнения (21), содержащего операторы сдвига по a .

Поправка первого порядка подчиняется уравнению

$$\hat{C}^0(u) u' \phi^1(a, a') = -u' \hat{C}^1(u) \phi^0(a). \quad (31)$$

В то время как явный вид оператора $\widehat{C}^0$ относительно простой, это уже не так для $\widehat{C}^1$. Однако вид оператора $\widehat{C}^1$ для нас в настоящий момент не является принципиальным, и мы не станем его выписывать. Вместо этого немного модифицируем уравнение (31) и запишем его как

$$(u')^{-1}\widehat{C}^0(u)u'\phi^1(a, a') = -\widehat{C}^1(u)\phi^0(a). \quad (32)$$

Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} (u')^{-1}\widehat{C}^0u' &= (u')^{-1}(u^{-1}e^{i\pi b^2}e^{b\partial_{a'}} - (u^{-1}e^{i\pi b^2} + ue^{-i\pi b^2}) + ue^{-i\pi b^2}e^{-b\partial_{a'}})u' = \\ &= ue^{2i\pi b^2}e^{b\partial_{a'}} - (u^{-1}e^{i\pi b^2} + ue^{-2i\pi b^2}) + u^{-1}e^{-i\pi b^2}e^{-b\partial_{a'}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Отметим, что этот сопряженный оператор $(u')^{-1}\widehat{C}^0u'$ больше не уничтожает постоянную по a' функцию и не понижает степень полинома.

Правая часть уравнения (32) не зависит от a' , следовательно, от a' не зависит и левая часть. Любая полиномиальная функция $\phi^1(a, a')$ сохраняет свою степень после действия оператора $(u')^{-1}\widehat{C}^0u'$. Единственной оставшейся возможностью является постоянная по a' функция $\phi^1(a, a') = \phi^1(a)$, которая однозначно определяется из уравнения (17):

$$\phi^1(a) = -\frac{\widehat{C}^1\phi^0(a)}{(u - u^{-1})(e^{i\pi b^2} - e^{-i\pi b^2})}. \quad (34)$$

Приведенные рассуждения легко обобщаются на старшие поправки. Любая функция $\phi^n(a, a')$ в действительности зависит лишь от a и может быть вычислена, если известны предыдущие $\phi^k(a)$ с $k < n$. Более того, поскольку функции $\phi^n(a)$ не зависят от a' , действие на них разностных операторов $\widehat{C}^k$ сводится к алгебраическим операциям. Поясним это по-другому. Полиномиальный анзац вместе с разложением по u' оказывается настолько ограничительным, что разностные уравнения (21) для модулярного ядра сводятся к следующим алгебраическим уравнениям на коэффициенты разложения:

$$\mathcal{F}_{aa'} = e^{-2\pi i aa'} \sum_n \phi^n(a)(u')^n, \quad \sum_n \phi^n(a)C_n(u, u')(u')^n = 0, \quad (35)$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned} C_n(u, u') &= (u')^{-n}e^{2\pi i aa'}\widehat{C}(u, u')(u')^ne^{-2\pi i aa'} \circ 1 = \\ &= e^{2\pi i b^2 n}u^{-1}C_+(u, u') + C_0(u, u') + e^{-2\pi i b^2 n}uC_-(u, u'). \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, мы сформулировали явный и простой способ вычисления непертурбативных поправок к модулярному ядру в общем случае. К сожалению, сравнить это разложение с результатами статей [4], [5] затруднительно, поскольку неясно, как выполнить соответствующее разложение формул из этих статей. К счастью, в случае $s = 1$, который будет обсуждаться в следующем пункте, явное сравнение с независимым результатом работы [6] оказывается возможным.

7.2. Случай единичного центрального заряда. Случай единичного центрального заряда, соответствующий $b = 1$ в наших обозначениях (1), требует отдельного рассмотрения. Как легко видеть, первая поправка (34) к модулярному ядру сингулярна в пределе $b \rightarrow 1$. Это происходит потому, что в точке $b = 1$ параметры $u = e^{2\pi i b a}$, $u' = e^{2\pi i b a'}$ становятся периодическими функциями переменных a , a' с единичным периодом²⁾. Таким образом, они не меняются под действием операторов сдвига в уравнении (21). Следовательно, при $b = 1$ оператор $(u')^{-n} \hat{C}^0 (u')^n = \hat{C}^0$ вырождается в оператор, подобный дифференциальному, т. е. понижает степень полинома. Это требует пересмотра уравнения (32), которое теперь можно записать как

$$\hat{C}^0(u) \phi^1(a, a') = -\hat{C}^1(u) \phi^0(a). \quad (37)$$

Не зависящая от a' функция $\phi^1(a, a')$ более не является решением, поскольку постоянная по a' функция не уничтожается оператором $\hat{C}^0$. Вместо этого нужно взять линейный по a' полином $\phi^1(a, a') = \phi^{10}(a) + a' \phi^{11}(a)$. Функцию $\phi^{11}(a)$ можно найти из уравнения (37):

$$\phi^{11}(a) = \frac{\hat{C}^1(u) \phi^0(a)}{u - u^{-1}}, \quad (38)$$

в то время как функция $\phi^{01}(a)$ не фиксируется уравнениями (21), (37).

Уравнение для поправки второго порядка записывается как

$$\hat{C}^0(u) \phi^2(a, a') = -\hat{C}^1(u) \phi^1(a, a') - \hat{C}^2(u) \phi^0(a, a'), \quad (39)$$

и теперь в правой части стоит линейная по a' функция, так что функция $\phi^2(a, a')$ должна быть квадратичной,

$$\phi^2(a, a') = \phi^{20}(a) + a' \phi^{21}(a) + (a')^2 \phi^{22}(a). \quad (40)$$

Функции $\phi^{21}(a)$, $\phi^{22}(a)$ можно найти из уравнения (39) в отличие от функции $\phi^{20}(a)$.

Таким образом, получаем следующую форму модулярного ядра для случая $b = 1$:

$$\mathcal{F}_{aa'} = e^{-2\pi i a a'} \sum_n \phi^n(a, a') (u')^n, \quad \phi^n(a, a') = \sum_{k=0}^n (a')^k \phi^{nk}(a), \quad (41)$$

где каждая из функций $\phi^{nk}(a)$ для $n \geq 1$, $k \geq 1$ может быть вычислена рекуррентным образом, если известны $\phi^{n'k'}(a)$ с номерами $n' < n$, $k' < k$. Функции $\phi^{n0}(a)$ остаются незафиксированными для любого n по простой причине: при $b = 1$ они входят в поправки, которые периодичны по a' и, следовательно, незаметны с точки зрения уравнения (21).

Следует сделать еще одно важное замечание. Несмотря на то что модулярное ядро при $c = 1$ содержит полиномы произвольной степени по a' , его логарифм является “линейной” функцией переменной a' (в дальнейшем мы часто называем такие функции просто линейными):

$$\ln \mathcal{F}_{aa'} = A(a, a') + a' B(a, a'). \quad (42)$$

²⁾В дальнейшем мы иногда будем говорить просто “периодические функции”, без явного указания периода.

Здесь $A(a, a')$ и $B(a, a')$ суть некоторые функции, периодические по a' с единичным периодом. Представление (42) не является следствием наших предыдущих выкладок. Тем не менее его можно проверить явно в нескольких порядках разложения по u' . В следующем разделе мы дадим простое объяснение этому наблюдению.

8. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ МОДУЛЯРНОГО ЯДРА ПРИ $c = 1$

8.1. Зависимость от внутренних размерностей из уравнения второго порядка. Как мы видели в предыдущем разделе, логарифм модулярного ядра оказывается “линейной” (мы считаем периодические функции константами в этом контексте) функцией переменной a' . Модулярное ядро должно быть симметричной функцией по отношению к замене $a \leftrightarrow a'$, так что естественно предположить линейную зависимость также и от a . Более того, можно заметить, что в уравнения первого порядка (17) внешние и внутренние импульсы также входят весьма симметрично, поэтому предыдущие аргументы применимы и к зависимости от внешних импульсов.

Таким образом, предлагается следующий анзац для модулярного ядра при $c = 1$:

$$\mathcal{F}_{aa'} = \exp\left(-2\pi i a a' + aP + a'P' + \sum_{i=1}^4 a_i P_i + R\right), \quad (43)$$

где все функции P, P', P_i, R периодичны по внешним a_i и внутренним a, a' импульсам (с единичным периодом).

Существует простой способ прийти к подстановке (43). Можно заметить, что в случае $b = 1$ все коэффициенты в уравнении (17) являются периодическими функциями с единичным периодом. Таким образом, нам по существу нужно решить разностное уравнение с постоянными коэффициентами. Это естественным образом мотивирует анзац (43).

При подстановке (43) в уравнение (21) последнее сводится к квадратичному уравнению для функции $e^{P'}$,

$$u^{-1}C_+(u, u')e^{P'} + C_0(u, u') + uC_-(u, u')e^{-P'} = 0, \quad (44)$$

имеющему два решения

$$P' = \ln \frac{-C_0(u, u') \pm \sqrt{C_0^2(u, u') - 4C_+(u, u')C_-(u, u')}}{2C_+(u, u')} + \ln u. \quad (45)$$

С помощью явных выражений (A.1) можно показать, что только одна из ветвей квадратного корня действительно является периодической функцией от a (содержит вклад, сокращающий $\ln u$).

Функция P должна определяться из аналога уравнения (21) со сдвигowymi операторами по a вместо a' .

8.2. Зависимость от внешних размерностей из уравнений первого порядка. Функции P_i нельзя определить из уравнений второго порядка, содержащих операторы сдвига по внутренним импульсам. Однако их можно найти из уравнений

первого порядка (17), содержащих также сдвиги по внешним импульсам. Единственной трудностью в извлечении этих зависимостей является то, что в уравнения входят одновременные сдвиги по разным импульсам. Мы можем повторить процедуру, которая позволила вывести уравнение второго порядка (21).

Рассмотрим следующее выражение:

$$\widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, s_2}(a_i, a) \widehat{\mathcal{O}}_A^{s_1, s_2}(a_i, a) \mathcal{M}_{aa'} = \widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, s_2}(a_i, a) \widehat{\mathcal{O}}_B^{s_1, s_2}(a_i, a') \mathcal{M}_{aa'}. \quad (46)$$

Напомним что индексы s_1 и s_2 соответствуют сдвигам по внешним импульсам a_1 и a_2 соответственно. Следовательно, в левой части равенства (46) сдвиги по a_1 в модулярном ядре сокращаются, оставляя только сдвиги по a_2 . В правой части равенства можно переписать действие оператора A через действие оператора B так, что останутся только сдвиги по импульсу a' . По аналогии с уравнением (21) можно записать результат в виде

$$e^{\partial_{a_2}} \mathcal{F}_{aa'} = (E_+(u, u') e^{b\partial_{a'}} + E_0(u, u') + E_-(u, u') e^{-b\partial_{a'}}) \mathcal{F}_{aa'}. \quad (47)$$

Функции E_i приведены в приложении A.2.

Поскольку функция P' уже найдена, можно вычислить в явном виде правую часть формулы (47) и выразить P_2 через P' :

$$P'_2 = \ln(E_+(u, u') e^{P'} + E_0(u, u') + E_-(u, u') e^{-P'}). \quad (48)$$

Вычисление функций P_1 , P_3 , P_4 – прямолинейная процедура, проходящая через те же этапы, что и в случае функции P_2 . Функция R , однако, не может быть определена таким способом; она представляет собой необходимую неопределенность в решении разностного уравнения.

Таким образом, с помощью подстановки (43) нам удалось решить уравнения (17) для единичного центрального заряда. В следующем разделе мы представим формулу для модулярного ядра при $c = 1$, полученную в статье [6], сравним два имеющихся ответа и покажем их согласованность.

8.3. Другие точно решаемые случаи. Для любого $b \in \mathbb{N}$ величина сдвигов в разностных уравнениях (17) является целым кратным периода коэффициентов. Это позволяет получить для модулярного ядра точно такую же формулу, как и в случае $b = 1$, рассмотренном выше. Единственной разницей является то, что в настоящем случае нужно подставить $b = n \in \mathbb{N}$ вместо $b = 1$ в уравнения (A.1)–(A.3).

9. МОДУЛЯРНОЕ ЯДРО ПРИ $c = 1$ И ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ VI

9.1. Соотношение между связывающим коэффициентом и модулярным ядром. В работе [6] была предложена формула для модулярного ядра при $c = 1$. В настоящем разделе мы даем краткий обзор подхода и результатов, полученных в упомянутой статье.

Центральную роль играет связь между конформными блоками при $c = 1$ и тау-функцией уравнения Пенлеве VI. А именно, конформный блок $B_a \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix}; x$ является коэффициентом фурье-разложения тау-функции по одному из ее параметров:

$$\begin{aligned} \tau &= \chi_0(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} C \left[\begin{matrix} \theta_t & \theta_1 \\ \theta_0 & \theta_\infty \end{matrix}; \sigma_{0t} + n \right] s_{0t}^n B_{\sigma_{0t}+n} \left[\begin{matrix} \theta_t & \theta_1 \\ \theta_0 & \theta_\infty \end{matrix}; t \right] = \\ &= \chi_1(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} C \left[\begin{matrix} \theta_t & \theta_0 \\ \theta_1 & \theta_\infty \end{matrix}; \sigma_{1t} + n \right] s_{1t}^n B_{\sigma_{1t}+n} \left[\begin{matrix} \theta_t & \theta_0 \\ \theta_1 & \theta_\infty \end{matrix}; 1-t \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

Все использованные здесь обозначения будут введены ниже.

Заметим, что во второй строке вместо исходных s -канальных конформных блоков появились t -канальные конформные блоки. Поскольку стандартный конформный блок является рядом по степеням t , выражение в первой строке может быть использовано для нахождения асимптотики тау-функции вблизи точки $t = 0$, в то время как вторая строка дает разложение в точке $t = 1$. Связь между разложениями характеризуется величиной $\chi_{01} = \chi_0^{-1} \chi_1$, которая называется связывающим коэффициентом. Удобно использовать перенормированную версию величины χ_{01} :

$$\bar{\chi}_{01} = \chi_{01} \frac{C \left[\begin{matrix} \theta_t & \theta_0 \\ \theta_1 & \theta_\infty \end{matrix}; \sigma_{1t} \right]}{C \left[\begin{matrix} \theta_t & \theta_1 \\ \theta_0 & \theta_\infty \end{matrix}; \sigma_{0t} \right]}.$$

Перед тем как приступить к расшифровке уравнения (49), мы выпишем точное соотношение между связывающим коэффициентом и модулярным ядром при единичном центральном заряде:

$$\mathcal{F}_{aa'} \left[\begin{matrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{matrix} \right] = \bar{\chi}_{01}(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}) \mu(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}). \quad (50)$$

Величина χ_{01} является основным исследуемым объектом в работе [6], μ – некоторая достаточно простая тригонометрическая функция, а C – структурные константы, выраженные в терминах двойной гамма-функции Барнса. Точные определения всех этих величин и связь между параметрами в левой и правой частях уравнения (50) даны ниже.

9.2. Разностные уравнения для связывающего коэффициента. По определению связывающий коэффициент есть отношение двух разложений Фурье. Из уравнения (49) легко видеть, что χ_{01} удовлетворяет следующим разностным условиям:

$$\begin{aligned} \chi_{01}(\vec{\theta}, \sigma_{0t} + 1, \sigma_{1t}) &= s_{0t}^{-1} \chi_{01}(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}), \\ \chi_{01}(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t} + 1) &= s_{1t} \chi_{01}(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}). \end{aligned} \quad (51)$$

9.3. Формула для связывающего коэффициента. В работе [6] было найдено единственное при некоторых предположениях решение уравнения (51)

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{01}(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}) &= \prod_{k=1}^4 \frac{\widehat{G}(\omega_+ + \nu_k)}{\widehat{G}(\omega_+ + \lambda_k)} \times \\ &\times \prod_{\epsilon, \epsilon' = \pm 1} \frac{G(1 + \epsilon \sigma_{1t} + \epsilon' \theta_t - \epsilon \epsilon' \theta_1) G(1 + \epsilon \sigma_{1t} + \epsilon' \theta_0 - \epsilon \epsilon' \theta_\infty)}{G(1 + \epsilon \sigma_{0t} + \epsilon' \theta_t + \epsilon \epsilon' \theta_0) G(1 + \epsilon \sigma_{0t} + \epsilon' \theta_1 + \epsilon \epsilon' \theta_\infty)} \prod_{\epsilon = \pm 1} \frac{G(1 + 2\epsilon \sigma_{0t})}{G(1 + 2\epsilon \sigma_{1t})}, \end{aligned} \quad (52)$$

где $G(x)$ – двойная гамма-функция Барнса, удовлетворяющая уравнению

$$G(x+1) = G(x)\Gamma(x),$$

а через $\widehat{G}(x)$ обозначено отношение

$$\widehat{G}(x) = \frac{G(1+x)}{G(1-x)}.$$

В выражении (52) множитель в первой строке представляет собой наиболее важную часть результата. Множители во второй строке могут быть сокращены подходящей перенормировкой конформных блоков. Это замечание завершает эскиз определения связывающего коэффициента. Чтобы сделать определение точным, нужно разъяснить все вспомогательные обозначения.

9.4. Обозначения I. Параметры σ_{0t} , σ_{1t} и θ_0 , θ_t , θ_1 , θ_∞ обозначают величины, которые ранее мы называли внутренними и внешними импульсами, а параметр t отвечает параметру x в конформном блоке:

$$\{\theta_0, \theta_t, \theta_1, \theta_\infty\} \sim \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \quad \{\sigma_{0t}, \sigma_{1t}\} \sim \{a, a'\}, \quad t \sim x. \quad (53)$$

Структурные константы задаются уравнением

$$C \left[\begin{matrix} \theta_t & \theta_1 \\ \theta_0 & \theta_\infty \end{matrix}; \sigma \right] = \frac{\prod_{\varepsilon, \varepsilon'=\pm 1} G(1+\theta_t+\varepsilon\theta_0+\varepsilon'\sigma)G(1+\theta_1+\varepsilon\theta_\infty+\varepsilon'\sigma)}{\prod_{\varepsilon=\pm 1} G(1+2\varepsilon\sigma)}. \quad (54)$$

Остается объяснить, что означают величины s_{0t} , s_{1t} , входящие в уравнение (51), и как определены аргументы гамма-функций Барнса ω_+ , ν_k , λ_k в уравнении (52). Для этой цели удобно ввести еще несколько вспомогательных параметров.

9.5. Обозначения II. Введем величины

$$p_\mu = 2 \cos 2\pi\theta_\mu \quad \text{для} \quad \mu = 0, t, 1, \infty; \quad p_{\mu\nu} = 2 \cos 2\pi\sigma_{\mu\nu} \quad \text{для} \quad \mu\nu = 0t, 1t, 01.$$

Величина σ_{01} не является не зависящей от σ_{0t} , σ_{1t} , но связана с ними квадратичным соотношением вида $W = 0$, где

$$W = p_{0t}p_{1t}p_{01} + p_{0t}^2 + p_{1t}^2 + p_{01}^2 - \omega_{0t}p_{0t} - \omega_{1t}p_{1t} - \omega_{01}p_{01} + \omega_4 - 4, \quad (55)$$

а параметры ω_k заданы исключительно в терминах p_μ :

$$\begin{aligned} \omega_{0t} &= p_0p_t + p_1p_\infty, & \omega_{1t} &= p_1p_t + p_0p_\infty, & \omega_{01} &= p_0p_1 + p_t p_\infty, \\ \omega_4 &= \prod_\mu p_\mu + \sum_\mu p_\mu^2. \end{aligned} \quad (56)$$

Функции s_{0t} , s_{1t} определяются как

$$\begin{aligned} s_{0t}^\pm &= \frac{q_{01}e^{\pm 2\pi i\sigma_{0t}} - q_{1t}}{16 \prod_{\varepsilon=\pm 1} \sin(\theta_t \mp \sigma_{0t} + \varepsilon\theta_0) \sin(\theta_1 \mp \sigma_{0t} + \varepsilon\theta_\infty)}, \\ s_{1t}^\pm &= \frac{q_{01}e^{\mp 2\pi i\sigma_{1t}} - q_{0t}}{16 \prod_{\varepsilon=\pm 1} \sin(\theta_t \mp \sigma_{1t} + \varepsilon\theta_1) \sin(\theta_0 \mp \sigma_{1t} + \varepsilon\theta_\infty)}, \end{aligned} \quad (57)$$

где $q_{\mu\nu} = \partial W / \partial p_{\mu\nu}$ и

$$q_{01} = 2p_{01} + p_{0t}p_{1t} - \omega_{01}, \quad q_{0t} = 2p_{0t} + p_{01}p_{1t} - \omega_{0t}, \quad q_{1t} = 2p_{1t} + p_{0t}p_{01} - \omega_{1t}. \quad (58)$$

9.6. Обозначения III. Параметры ν_k и λ_k задаются как простые линейные выражения от величин $\vec{\theta}$ и σ_{0t}, σ_{1t} :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \sigma_{0t} + \theta_0 + \theta_t, & \lambda_1 &= \theta_0 + \theta_t + \theta_1 + \theta_\infty, \\ \nu_2 &= \sigma_{0t} + \theta_1 + \theta_\infty, & \lambda_2 &= \sigma_{0t} + \sigma_{1t} + \theta_0 + \theta_1, \\ \nu_3 &= \sigma_{1t} + \theta_0 + \theta_\infty, & \lambda_3 &= \sigma_{0t} + \sigma_{1t} + \theta_t + \theta_\infty, \\ \nu_4 &= \sigma_{1t} + \theta_t + \theta_1, & \lambda_4 &= 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Здесь следует отметить, что $\sum_k \nu_k = \sum_k \lambda_k$, и эта величина получила отдельное обозначение

$$\nu_\Sigma = \frac{1}{2} \sum_k \nu_k.$$

Параметр ω_+ зависит от ν , λ и определяется следующим образом. Рассмотрим уравнение

$$\prod_k (1 - ze^{2\pi i \nu_k}) = \prod_k (1 - ze^{2\pi i \lambda_k}). \quad (60)$$

Поскольку $\nu_\Sigma = \lambda_\Sigma$, оно является кубическим уравнением относительно z . У него есть одно тривиальное решение $z = 0$ и два нетривиальных $z_\pm$. Параметры $\omega_\pm$ определены равенством

$$z_\pm = e^{2\pi i \omega_\pm}. \quad (61)$$

Нетривиальные решения $z_\pm$ имеют вид

$$z_\pm = \frac{4 \sin 2\pi \sigma_{0t} \sin 2\pi \sigma_{1t} + 4 \sin 2\pi \theta_t \sin 2\pi \theta_\infty + 4 \sin 2\pi \theta_0 \sin 2\pi \theta_1 \pm q_{01}}{2 \sum_k (e^{2\pi i (\nu_\Sigma - \nu_k)} - e^{2\pi i (\nu_\Sigma - \lambda_k)})}.$$

Наконец, функция μ , появляющаяся в уравнении (50), есть

$$\mu(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}) = -\frac{4 \sin 2\pi \sigma_{0t} \sin 2\pi \sigma_{1t}}{q_{01}}. \quad (62)$$

Это завершает определение величин, входящих в формулы (52), (50), с точностью до неоднозначности, которую мы обсудим ниже.

Следует сделать несколько замечаний. Правая часть уравнения (52) является периодической функцией по переменной ω_+ , что позволяет использовать любую ветвь решения уравнения (61). Однако одна неопределенность остается. Мы ввели p_{01} как решение квадратного уравнения, так что существуют два возможных значения p_{01} . Если зафиксировать выбор p_{01} , то величины q_{01} и z_+ определяются единственным образом. Оба значения p_{01} дают связывающий коэффициент χ_{01} , являющийся решением уравнения (51), но лишь одно из них имеет отношение к модулярному ядру. А именно, нужно выбирать такое значение p_{01} , для которого в формуле (50) величина $s_{0t} \rightarrow 0$ при $\text{Im } \sigma_{1t} \rightarrow \infty$.

10. СРАВНЕНИЕ ФОРМУЛ ДЛЯ МОДУЛЯРНОГО ЯДРА ПРИ $c = 1$

10.1. Разложение в ряд выражения для модулярного ядра. Формула (50) для модулярного ядра при $c = 1$ поддается явному разложению по степеням “непертурбативных” параметров u, u' . Сравнивая два выражения для модулярного ядра, нужно принять во внимание возможное различие в нормировках:

$$\mathcal{F}_{aa'} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} \sim N_a \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} \mathcal{F}_{aa'} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} N_{a'}^{-1} \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Чтобы устранить эту неопределенность, можно рассмотреть диагональные элементы ($a = a'$) и положить $a_1 = a_3$, в результате нормировочные множители сократятся. Более того, для простоты и наглядности мы наложим дополнительные ограничения $a_1 = a_3 = a_4 = 1/4$ на внешние импульсы, оставив только a_2 свободным параметром.

Работать с логарифмическими производными модулярного ядра оказывается технически более удобно, чем непосредственно с ядром. В этих предположениях несколько первых членов разложения по u модулярного ядра при $c = 1$ из работы [6] имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_a \ln \mathcal{F}_{aa} \begin{bmatrix} a_2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} &= 4ia\pi + 2\pi [\cos 2\pi a_2 + 4ia(-1 + \sin 2\pi a_2) + 4a_2 \cos 2\pi a_2]u - \\ &- 4[\pi \cos 2\pi a_2 (1 - 4ia \cos 2\pi a_2 + \sin 2\pi a_2 + 4a_2 \sin 2\pi a_2)]u^2 + O(u^3). \end{aligned}$$

Разложение в ряд выражения для модулярного ядра при $c = 1$, предложенное в настоящей работе, может быть найдено как итерационно, согласно процедуре, описанной в разделе 7, так и напрямую из выражения (43) с функциями P и P_2 , заданными формулами (45), (48)³⁾. В результате получаем

$$\begin{aligned} \partial_a \ln \mathcal{F}_{aa} \begin{bmatrix} a_2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} &= 4ia\pi + [4(1 + 2ia\pi)(-1 + \sin 2\pi a_2) + 8\pi a_2 \cos 2\pi a_2]u + \\ &+ 4 \cos 2\pi a_2 [(1 + 4ia\pi) \cos 2\pi a_2 - 4\pi a_2 \sin 2\pi a_2]u^2 + O(u^3). \end{aligned}$$

Как можно видеть, эти разложения совпадают с точностью до функций, периодических по a и a_2 , которые не фиксируются в нашем подходе. Мы выполнили проверку подобных разложений в нескольких порядках и обнаружили полное согласие.

10.2. Подробнее о связывающем коэффициенте в уравнении Пенлеве. Обозначим первый множитель в уравнении (52) как $\mathcal{M}$ (напомним, что остаток может быть устранен перенормировкой),

$$\mathcal{M} = \prod_{k=1}^4 \frac{\widehat{G}(\omega_+ + \nu_k)}{\widehat{G}(\omega_+ + \lambda_k)}. \quad (64)$$

³⁾Следует также принять во внимание, что $P(a, a') = P'(a, a')$ при $a' = a$ и $a_1 = a_3$.

Имеет место формула отражения для гамма-функции Барнса,

$$\ln \widehat{G}(x) = \ln \frac{G(1+x)}{G(1-x)} = x \ln 2\pi - \pi \int_0^x dy y \operatorname{ctg} \pi y, \quad (65)$$

следовательно,

$$\partial_x \ln \widehat{G}(x) = \ln 2\pi - \pi x \operatorname{ctg} \pi x. \quad (66)$$

Используя уравнение (66), нетрудно увидеть, что логарифмическая производная выражения (64) содержит только элементарные функции. Можно показать явно, что эта производная “линейна” по a , a' , a_i с периодическими коэффициентами единичного периода, как и в уравнении (42). Наша формула (43) подразумевает, что “линейный” моном в этом выражении после интегрирования может быть записан исключительно в терминах элементарных функций. Действительно, еще одно представление функции $\mathcal{M}$ в духе уравнения (64) таково:

$$\mathcal{M} = \prod_{k=1}^4 \frac{(\sin \pi(\omega_+ + \nu_k))^{-\nu_k}}{(\sin \pi(\omega_+ + \lambda_k))^{-\lambda_k}} \cdot (\text{периодический множитель}). \quad (67)$$

Оставшийся периодический множитель, вероятно, нельзя упростить подобным образом. Вывод уравнения (67) приведен в приложении Б.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

В представленной статье мы провели количественный анализ модулярной алгебры невырожденных конформных блоков в теории Лиувилля. Мы приняли величины $u = e^{2\pi i b a}$ и $u' = e^{2\pi i b a'}$ как “непертурбативные” параметры, контролирующие разложение в пределе больших промежуточных импульсов a , a' , и показали, что в пределе нулевых u , u' модулярное ядро сводится к своей пертурбативной фурье-подобной форме.

В случае центрального заряда, не являющегося рациональным числом, мы предложили простые алгебраические уравнения (35), которые вместе с определенным анзацем позволяют находить непертурбативные поправки. Для единичного центрального заряда в качестве точного ответа предложена следующая формула:

$$\mathcal{F}_{aa'} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{bmatrix} = \exp \left(-2\pi i a a' + aP + a'P' + \sum_{i=1}^4 a_i P_i + R \right). \quad (68)$$

Здесь P , P' , P_i – громоздкие, но явные функции, которые выражаются через элементарные (для примера см. формулы (45) и (A.1), (A.2) для P'). Функция R периодична с единичным периодом как по внешним, так и по внутренним импульсам. В рамках нашего подхода эта функция остается незафиксированной.

При определенных предположениях мы сравнили формулу (68) с выражением, выведенным в статье [6], и получили полное согласие. Это кажется весьма нетривиальным, поскольку формула (52), на первый взгляд, обладает гораздо более сложной структурой. Тем не менее мы показали, что непериодическая часть этой формулы после надлежащей перенормировки может быть записана исключительно в терминах элементарных функций (см. соотношение (67)).

Формула (68) не только описывает случай $c = 1$, но и остается верной при любом центральном заряде, отвечающем произвольному $b \in \mathbb{N}$. Необходимо лишь использовать соответствующие значения b в формулах (A.1)–(A.3).

Мы не осветили много весьма важных и интересных вопросов. Первая группа вопросов касается более детального исследования формулы для модулярного ядра при $c = 1$. Было бы интересно сравнить формулы (43) и (52) подробнее, включая нормировочные множители и периодический остаток. Вторая группа вопросов связана с обобщением анализа на случай $b \notin \mathbb{N}$. С помощью уравнений (17) можно изучить различные разложения модулярного ядра, а не только разложения по u, u' . Отклонения от предела $b \rightarrow 0$ описываются дифференциальными уравнениями. В пределе $b \rightarrow 1$ поправки удовлетворяют точно решаемым разностным уравнениям с периодическими коэффициентами. Изучение всех этих случаев должно принести более полное понимание невырожденной модулярной алгебры. И, конечно, представляется важным получение всех этих разложений из точных выражений, приведенных в статьях [4], [5].

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Функциональные коэффициенты в разностных уравнениях

A.1. Функции C_+ , C_0 , C_- . Можно поделить все функции $C_i(a, a')$ на общий множитель, что соответствует перенормировке всего уравнения (21). При выборе $C_+ = 1$ остальные две функции даются выражениями

$$\begin{aligned}
 C_0(u, u') = & -\frac{e^{ib\pi(a_1+a_2-a_3-a_4)}u'(e^{-ib^2\pi}/u' - e^{ib^2\pi}u')}{(-1 + e^{2ib\pi(a_2-a_3)}u')(-1 + e^{2ib\pi(a_1-a_4)}u')} \times \\
 & \times \left(\frac{e^{-ib\pi(b-a_1-a_2-a_3-a_4)}(-1 + e^{2ib\pi(b-a_2-a_3)}u')(-1 + e^{2ib\pi(b-a_1-a_4)}u')}{e^{2ib^2\pi} - (u')^2} + \right. \\
 & + \frac{e^{-ib\pi(3b-3a_1-3a_2+a_3+a_4)}(e^{2ib\pi(2b-a_1-a_2)} - u')(-1 + e^{2ib\pi(b-a_1-a_2)}u')(-1 + (u')^2)}{u'(e^{2ib\pi(a_2-a_3)} - u')(e^{2ib\pi(a_1-a_4)} - u')} + \\
 & + \frac{e^{-ib\pi(3b-3a_1-3a_2+a_3+a_4)}(e^{2ib\pi(2b-a_2-a_3)} - u')(-e^{2ib\pi(b-a_2+a_3)} + u')}{(-e^{2ib\pi(a_2-a_3)} + u')(-e^{2ib\pi(a_1-a_4)} + u')} \times \\
 & \times \left. \frac{(-e^{2ib\pi(2b-a_1-a_4)} + u')(-e^{2ib\pi(b-a_1+a_4)} + u')(-1 + (u')^2)}{(-e^{2ib^2\pi} + (u')^2)(-e^{4ib^2\pi} + (u')^2)} \right), \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_-(u, u') = & \frac{e^{2ib\pi(a_1+a_2-a_3-a_4)}(e^{2ib\pi(2b-a_2-a_3)} - u')(e^{2ib\pi(2b-a_1-a_4)} - u')}{(e^{2ib\pi(a_2-a_3)} - u')(e^{2ib\pi(a_1-a_4)} - u')(-1 + e^{2ib\pi(a_2-a_3)}u')} \times \\
 & \times \frac{(-e^{2ib\pi(a_2+a_3)} + u')(-e^{2ib\pi(a_1+a_4)} + u')(-1 + (u')^2)(-1 + e^{2ib^2\pi}(u')^2)}{(-1 + e^{2ib\pi(a_1-a_4)}u')(e^{4ib^2\pi} - (u')^2)(e^{6ib^2\pi} - (u')^2)}; \quad (A.2)
 \end{aligned}$$

здесь $u = e^{2\pi i b a}$, $u' = e^{2\pi i b a'}$.

А.2. Функции E_+ , E_0 , E_- . Функции E_i , входящие в уравнение (48), имеют вид

$$\begin{aligned} E_+(u, u') &= \frac{e^{-2i\pi(a_2-a_3-a_4)}u^2(e^{2i\pi(a_2-a_3)}-u')^2}{(-1+e^{2i\pi(a_1-a_2)}u)(-1+e^{2i\pi(a_1+a_2)}u)(-1+(u')^2)^2} \times \\ &\quad \times (e^{2i\pi(a_1-a_4)}-u')(-1+e^{2i\pi(a_1-a_4)}u'), \\ E_0(u, u') &= -\frac{2e^{2i\pi(a_1-a_2)}u(e^{2i\pi(a_2-a_3)}-u')(-1+e^{2i\pi(a_2+a_3)}u')}{(-1+e^{2i\pi(a_1-a_2)}u)(-1+e^{2i\pi(a_1+a_2)}u)(-1+(u')^2)^2} \times \\ &\quad \times (-2\cos(2\pi a_4)u' + \cos(2\pi a_1)(1+(u')^2)), \\ E_-(u, u') &= \frac{e^{-2i\pi(a_2+a_3+a_4)}(e^{2i\pi(a_1+a_4)}-u')}{(-1+e^{2i\pi(a_1-a_2)}u)(-1+e^{2i\pi(a_1+a_2)}u)(-1+(u')^2)^2} \times \\ &\quad \times (-1+e^{2i\pi(a_2+a_3)}u')^2(-1+e^{2i\pi(a_1+a_4)}u'). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Упрощение связывающего коэффициента в уравнении Пенлеве VI

Взяв логарифмическую производную уравнения (64) и используя равенство

$$\partial_x \ln \widehat{G}(x) = \ln 2\pi - \pi x \operatorname{ctg} \pi x,$$

получим

$$\partial_x \ln \mathcal{M} = \sum_k (\ln 2\pi - \pi(\omega_+ + \nu_k) \operatorname{ctg} \pi(\omega_+ + \nu_k)) \partial_x(\omega_+ + \nu_k) - \{\lambda \leftrightarrow \nu\}. \quad (\text{B.1})$$

Здесь и далее $\{\lambda \leftrightarrow \nu\}$ означает предыдущие слагаемые, в которых произведена замена ν на λ . Поскольку $\sum_k \nu_k - \{\lambda \leftrightarrow \nu\} = 0$, получаем

$$\ln 2\pi \sum_k \partial_x(\omega_+ + \nu_k) - \{\lambda \leftrightarrow \nu\} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Далее, используя определение (61) величины ω_+ и тот факт, что z_+ удовлетворяет уравнению (60), можно показать, что

$$-\pi\omega_+ \sum_k \operatorname{ctg} \pi(\omega_+ + \nu_k) \partial_x(\omega_+ + \nu_k) - \{\lambda \leftrightarrow \nu\} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Следовательно, выражение (Б.1) упрощается и принимает вид

$$\partial_x \ln \mathcal{M} = -\pi \sum_k \nu_k \operatorname{ctg} \pi(\omega_+ + \nu_k) \partial_x(\omega_+ + \nu_k) - \{\lambda \leftrightarrow \nu\}. \quad (\text{B.4})$$

Введем разностный оператор $\delta_\alpha = \exp(\partial/\partial a^\alpha) - 1$. Здесь и далее a^α обозначает любой из внешних или внутренних импульсов. Отметим, что δ_α уничтожает функции, периодические по a^α , а также, что $\delta_\alpha a^\beta = \delta_\alpha^\beta$. Применим оператор δ_α к уравнению (Б.4) и положим $x = a^\beta$. Имеем

$$\delta_\alpha \partial_\beta \ln \mathcal{M} = -\pi \sum_k \delta_\alpha \nu_k \operatorname{ctg} \pi(\omega_+ + \nu_k) \partial_\beta(\omega_+ + \nu_k) - \{\lambda \leftrightarrow \nu\}. \quad (\text{B.5})$$

Здесь было использовано, что $\delta_\alpha \nu_k$ равно либо единице, либо нулю. Следовательно, $\delta_\alpha \omega_+ = 0$ и $\delta_\alpha \partial_\beta \nu_k = 0$.

С другой стороны, логарифм функции $\mathcal{M}$ можно представить в следующем виде:

$$\ln \mathcal{M} = \sum_{\alpha} a^{\alpha} P_{\alpha} + R, \quad (\text{Б.6})$$

где все функции P_{α} и R периодичны. Таким образом, имеем

$$\partial_{\beta} P_{\alpha} = \delta_{\alpha} \partial_{\beta} \ln \mathcal{M} = -\pi \sum_k \delta_{\alpha} \nu_k \operatorname{ctg} \pi(\omega_+ + \nu_k) \partial_{\beta}(\omega_+ + \nu_k) - \{\lambda \leftrightarrow \nu\}. \quad (\text{Б.7})$$

Поскольку $\delta_{\alpha} \nu_k$ и $\delta_{\alpha} \lambda_k$ постоянны, это уравнение может быть непосредственно проинтегрировано:

$$P_{\alpha} = -\delta_{\alpha} \sum_k \nu_k \ln \sin \pi(\omega_+ + \nu_k) - \{\lambda \leftrightarrow \nu\}. \quad (\text{Б.8})$$

Заметим также, что

$$\sum_{\alpha} a^{\alpha} \delta_{\alpha} \nu_k = \nu_k \quad (\text{Б.9})$$

и аналогично для λ_k . Наконец, получим

$$\mathcal{M} = \exp \left(\sum_{\alpha} a^{\alpha} P_{\alpha} + R \right) = \prod_k \frac{(\sin \pi(\omega_+ + \nu_k))^{-\nu_k}}{(\sin \pi(\omega_+ + \lambda_k))^{-\lambda_k}} e^R. \quad (\text{Б.10})$$

Это подтверждает, что непериодическая часть формулы (64) может быть выражена в элементарных функциях. Остаточный множитель R , вероятно, не может быть упрощен аналогичным образом.

Благодарности. Автор выражает свою благодарность за значительное содействие Алексею Морозову, Андрею Миронову и Дмитрию Галахову.

Список литературы

- [1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [2] L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.*, **91**:2 (2010), 167–197, arXiv: 0906.3219.
- [3] G. W. Moore, N. Seiberg, *Commun. Math. Phys.*, **123**:2 (1989), 177–254.
- [4] B. Ponsot, J. Teschner, *Liouville bootstrap via harmonic analysis on a noncompact quantum group*, arXiv: hep-th/9911110.
- [5] B. Ponsot, J. Teschner, *Commun. Math. Phys.*, **224**:3 (2001), 613–655, arXiv: math/0007097.
- [6] N. Iorgov, O. Lisovyy, Yu. Tykhyy, *JHEP*, **12** (2013), 029, 26 pp., arXiv: 1308.4092.
- [7] D. Galakhov, A. Mironov, A. Morozov, *JHEP*, **06** (2014), 050, 24 pp., arXiv: 1311.7069.
- [8] J. Teschner, “From Liouville theory to the quantum geometry of Riemann surfaces”, *Prospects in Mathematical Physics*, Contemporary Mathematics, **437**, eds. J. C. Mourão, J. P. Nunes, R. Picken, J.-C. Zambrini, AMS, Providence, RI, 2007, 231–246, arXiv: hep-th/0308031.
- [9] Ал. Б. Замолодчиков, *ЖЭТФ*, **90**:5 (1986), 1808–1818.
- [10] D. Galakhov, A. Mironov, A. Morozov, *JHEP*, **08** (2012), 067, 27 pp., arXiv: 1205.4998.
- [11] N. Nemkov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:10 (2014), 105401, 15 pp., arXiv: 1307.0773.
- [12] M. Billó, M. Frau, L. Gallot, A. Lerda, I. Pesando, *JHEP*, **11** (2013), 123, 34 pp., arXiv: 1307.6648.