Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Хакимов, Ф. Х. Хайдаров, Трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 2, 286–295

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 10:17:52

© 2016 г.

Р. М. Хакимов*, Ф. Х. Хайдаров†

ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Изучаются трансляционно-инвариантные меры Гиббса на дереве Кэли порядка $k = 3$ для ферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями. Получены явные формулы для трансляционно-инвариантных мер Гиббса. Также рассмотрены периодические меры Гиббса на дереве Кэли порядка k для антиферромагнитной модели Поттса с q состояниями. При этом улучшены ранее полученные результаты: найдено точное количество периодических мер Гиббса на дереве Кэли порядка $k \geq 3$ с периодом два, заданных на некоторых инвариантных множествах.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, модель Поттса, мера Гиббса, трансляционно-инвариантные меры, периодические меры.

DOI: 10.4213/tmf9138

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что каждой предельной мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы. Поэтому в теории мер Гиббса важной является проблема существования фазового перехода, т. е. изменение состояния физической системы при изменении температуры. Это происходит, когда мера Гиббса неединственна. Температура, при которой меняется состояние физической системы, обычно называется критической [1]–[3].

В работе [4] рассмотрена ферромагнитная модель Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли второго порядка и показано, что существует критическая температура T_c такая, что при $T < T_c$ имеются три трансляционно-инвариантные меры Гиббса и бесчисленное число мер Гиббса, не являющихся трансляционно-инвариантными. В работе [5] результаты работы [4] обобщены на модель Поттса с конечным числом состояний на дереве Кэли произвольного (конечного) порядка. В работе [6]

*Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан. E-mail: rustam-7102@rambler.ru

†Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан. E-mail: haydarov_imc@mail.ru

показано, что на дереве Кэли трансляционно-инвариантная мера Гиббса антиферромагнитной модели Поттса с внешним полем единственна. Статья [7] посвящена модели Поттса со счетным числом состояний с ненулевым внешним полем, и в этой работе доказано, что данная модель имеет единственную трансляционно-инвариантную меру Гиббса.

В работе [8] изучались периодические меры Гиббса и при некоторых условиях доказано, что все периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными; найдены условия, при которых модель Поттса с ненулевым внешним полем имеет периодические меры Гиббса. Работа [9] является продолжением работы [8]. В ней доказано, что существует не менее трех периодических мер Гиббса с периодом два на дереве Кэли третьего порядка и четыре меры Гиббса для модели Поттса с тремя состояниями и с нулевым внешним полем. В работе [10] рассмотрена модель Поттса с q состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 3$ и для некоторых инвариантных множеств показано существование периодических (не являющихся трансляционно-инвариантными) мер Гиббса при некоторых условиях на параметры этой модели. Кроме того, в работе [10] указана нижняя граница числа существующих периодических мер Гиббса. В работе [11] дано полное описание трансляционно-инвариантных мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса с q состояниями и показано, что их количество равно $2^q - 1$, а в работе [12] изучена проблема крайности этих мер.

В настоящей работе мы получаем явные формулы для трансляционно-инвариантных мер Гиббса ферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k = 3$. Кроме того, мы доказываем, что на некотором инвариантном множестве при определенных условиях на параметры антиферромагнитной модели Поттса с q состояниями с нулевым внешним полем на дереве Кэли порядка $k \geq 3$ существуют ровно две периодические (не являющиеся трансляционно-инвариантными) меры Гиббса с периодом два, а также находим точное количество существующих периодических мер Гиббса на объединении некоторых инвариантных множеств.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ

Дерево Кэли $\mathfrak{Z}^k$ порядка $k \geq 1$ – это бесконечное дерево, т. е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребро. Пусть $\mathfrak{Z}^k = (V, L, i)$, где V – множество вершин графа $\mathfrak{Z}^k$, L – множество его ребер и i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$.

Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями* и ребро обозначается как $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$ для $x, y \in V$ на дереве Кэли определяется как минимальное d , при котором существуют вершины $x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V$ такие, что $\langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ (т. е. вершины последовательно являются ближайшими соседями).

Для фиксированного $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \\ L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k , являющейся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ соответственно.

Рассмотрим модель, в которой спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geq 2$, и расположены в вершинах дерева. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Гамильтониан модели Поттса определяется как

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (2.1)$$

где $J \in \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle$ – ближайшие соседи и δ_{ij} – символ Кронекера. Определим конечное распределение вероятностной меры μ в объеме V_n :

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} \tilde{h}_{\sigma(x), x} \right\}, \quad (2.2)$$

где $\beta = 1/T$, $T > 0$ – температура, Z_n^{-1} – нормировочный множитель,

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$$

и $\{\tilde{h}_x = (\tilde{h}_{1,x}, \dots, \tilde{h}_{q,x}) \in \mathbb{R}^q \mid x \in V\}$ – совокупность векторов. Говорят, что вероятностное распределение (2.2) согласованно, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}),$$

где $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ – объединение конфигураций. В этом случае существует единственная мера μ на Φ^V такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n).$$

Такая мера называется расщепленной мерой Гиббса, соответствующей гамильтониану (2.1) и векторнозначной функции $\tilde{h}_x$, $x \in V$. Следующее утверждение [6] описывает условие для $\tilde{h}_x$, обеспечивающее согласованность меры $\mu_n(\sigma_n)$.

ТЕОРЕМА 1. *Вероятностное распределение $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, в (2.2) является согласованным тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее равенство:*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \quad (2.3)$$

где функция $F: h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \rightarrow F(h, \theta) = (F_1, \dots, F_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$ определяется формулами

$$F_i = \ln \frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}, \quad \theta = e^{J\beta},$$

$S(x)$ – множество прямых потомков точки x и $h_x = (h_{1,x}, \dots, h_{q-1,x})$ удовлетворяет условию

$$h_{i,x} = \tilde{h}_{i,x} - \tilde{h}_{q,x}, \quad i = 1, \dots, q-1. \quad (2.4)$$

Пусть $\widehat{G}_k$ – подгруппа группы G_k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Совокупность векторов $h = \{h_x \mid x \in G_k\}$ называется $\widehat{G}_k$ -периодической, если $h_{yx} = h_x$ для всех $x \in G_k$ и $y \in \widehat{G}_k$. G_k -периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мера μ называется $\widehat{G}_k$ -периодической, если она соответствует $\widehat{G}_k$ -периодической совокупности векторов h .

Следующая теорема [8] характеризует периодические меры Гиббса.

ТЕОРЕМА 2. Пусть K – нормальный делитель с конечным индексом в группе G_k . Тогда для модели Поттса все K -периодические меры Гиббса являются либо $G_k^{(2)}$ -периодическими, либо трансляционно-инвариантными, где $G_k^{(2)}$ – подгруппа в G_k , состоящая из слов x , длина $|x|$ которых есть четное число.

3. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА

Для любого $x \in V$ трансляционно-инвариантная мера Гиббса соответствует решению h_x из формулы (2.3) с $h_x = h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$. Тогда из уравнения (2.3) мы получим, что $h = kF(h, \theta)$, и, введя обозначение $z_i = e^{h_i}$, $i = 1, \dots, q-1$, можем переписать последнее уравнение как

$$z_i = \left(\frac{(\theta - 1)z_i + \sum_{j=1}^{q-1} z_j + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} z_j} \right)^k, \quad i = 1, \dots, q-1. \quad (3.1)$$

Из работы [11] известно, что любая трансляционно-инвариантная мера модели Поттса соответствует решению уравнения

$$z = f_m(z) \equiv \left(\frac{(\theta + m - 1)z + q - m}{mz + q - m - 1 + \theta} \right)^k \quad (3.2)$$

для некоторого $m = 1, \dots, q-1$.

Рассмотрим уравнение (3.2) при $k = 3$, $\theta > 1$ и положим $\sqrt[3]{z} = x$. Тогда уравнение (3.2) примет вид

$$mx^4 - (\theta + m - 1)x^3 + (q - m - 1 + \theta)x - q + m = 0.$$

Заметим, что $x_0 = 1$ является решением этого уравнения. Разделив это уравнение на $x - 1$, получим

$$\varphi(x) \equiv mx^3 - (\theta - 1)x^2 - (\theta - 1)x + q - m = 0. \quad (3.3)$$

Заметим, что последнее уравнение по теореме Декарта о количестве положительных корней многочлена имеет не более двух положительных решений. Кроме того, $\varphi(0) = q - m > 0$, $\varphi(+\infty) = +\infty$ и уравнение $\varphi'(x) = 0$ имеет единственное положительное решение

$$x^*(\theta, m) = \frac{\theta - 1 + \sqrt{(\theta - 1)^2 + 3m(\theta - 1)}}{3m},$$

т.е. функция $\varphi(x)$ убывает при $x < x^*$ и возрастает при $x > x^*$. Следовательно, существует $\theta_{\text{cr}}(m, q)$ такое, что уравнение (3.3) не имеет решения при $\theta < \theta_{\text{cr}}(m, q)$,

имеет одно решение при $\theta = \theta_{\text{cr}}(m, q)$ и имеет два решения при $\theta > \theta_{\text{cr}}(m, q)$; здесь $\theta_{\text{cr}}(m, q)$ есть решение уравнения $\varphi(x^*) = 0$ относительно θ .

В работе [11] приведены формулы для вычисления $\theta_{\text{cr}}(m, q) = \theta_m$ (см. формулы (3.17), (3.18)), используя которые при $k = 3$, мы имеем

$$\theta_{\text{cr}}(m, q) = \psi(x^{**}), \quad \psi(x) = \frac{mx^3 + q - m}{x^2 + x} + 1, \quad (3.4)$$

где x^{**} есть решение уравнения $mx^4 + 2mx^3 - 2(q - m)x - (q - m) = 0$. Решим последнее уравнение стандартным методом Феррари из линейной алгебры. После громоздких вычислений получим

$$x^{**} = \frac{\sqrt[4]{8\alpha_0^3} + \sqrt{(3 - 2\alpha_0)\sqrt{2\alpha_0} - 6 + 4q/m}}{2\sqrt[4]{2\alpha_0}} - \frac{1}{2},$$

где

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt[3]{m(8m^2 - 12mq + 4q^2)} + m}{2m}.$$

Пусть $q = 3$. В этом случае уравнение $\varphi'(x) = 0$ имеет единственное положительное решение

$$x^*(\theta, 1) = \frac{\theta - 1 + \sqrt{\theta^2 + \theta - 2}}{3}$$

и θ_{cr} есть решение уравнения $\varphi(x^*) = 0$ относительно θ : мы имеем

$$\theta_{\text{cr}} = \sqrt{9 + 6\sqrt{3}} - 2 \approx 2.403669476.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Указанное выше значение θ_{cr} можно получить из формулы (3.4) при $q = 3$, $m = 1$.

Найдем решения уравнения (3.3) с помощью формулы Кардано. Для этого положим $x = y + (\theta - 1)/3$ и перепишем уравнение (3.3) как

$$y^3 + py + r = 0, \quad (3.5)$$

где

$$p = -\frac{1}{3}(\theta^2 + \theta - 2), \quad r = \frac{1}{27}(-2(\theta - 1)^3 - 9(\theta - 1)^2 + 54).$$

Последнее уравнение имеет одно отрицательное решение при $\theta < \theta_{\text{cr}}$,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

одно положительное решение при $\theta = \theta_{\text{cr}}$,

$$y^* = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{3} + \frac{1}{3} \sqrt{9 + 6\sqrt{3}}(1 - \sqrt{3}) \right) \approx 0.828740438,$$

а при $\theta > \theta_{\text{cr}}$ – решения вида

$$y_1 = \frac{2p}{3} \cos \frac{\alpha}{3}, \quad y_2 = \frac{2p}{3} \cos \frac{\alpha + 2\pi}{3}, \quad y_3 = \frac{2p}{3} \cos \frac{\alpha + 4\pi}{3},$$

где

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{r}\sqrt{-\frac{r^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right), \quad r \neq 0.$$

Можно увидеть, что при $\theta > \theta_{\text{cr}}$

$$x_1 = y_1 + \frac{\theta - 1}{3} < 0, \quad x_2 = y_2 + \frac{\theta - 1}{3} > 0, \quad x_3 = y_3 + \frac{\theta - 1}{3} > 0.$$

Кроме того, при $\theta = \theta_{\text{cr}}$

$$x_4 = y^* + \frac{\theta - 1}{3} = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{9 + 6\sqrt{3}(3 - \sqrt{3})}\right) \approx 1.296630263.$$

Из леммы 1 в работе [11] следует, что z_2^{-1} и z_3^{-1} являются решениями уравнения (3.2) при $m = 2, k = 3$. Из всего сказанного и в силу формулы (1.5) из работы [11] получаем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $q = 3, k = 3, \theta > 1$. Тогда система уравнений (3.1) имеет:

- 1) единственное решение $(1, 1)$ при $\theta < \theta_{\text{cr}}$;
 - 2) три решения $(1, 1), (z_1, 1), (1, z_1)$ при $\theta = \theta_{\text{cr}}$;
 - 3) семь решений $(1, 1), (z_2, 1), (1, z_2), (z_3, 1), (1, z_3), (z_2, z_2), (z_3, z_3)$ при $\theta > \theta_{\text{cr}}$.
- Здесь $z_1 = x_4^3, z_2 = x_2^3, z_3 = x_3^3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение 1 является частным случаем теоремы 1 из работы [11]. Здесь мы привели явные формулы для решений, соответствующих трансляционно-инвариантным мерам Гиббса в случае $k = 3$. При $\theta = \theta_{\text{cr}}$ имеем $z_1 = z_2 = z_3$.

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА

Рассмотрим случай $q \geq 3$, т. е. $\sigma: V \rightarrow \Phi = \{1, 2, \dots, q\}$. В силу теоремы 2 имеются только $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса, которые соответствуют совокупности векторов $h = \{h_x \in \mathbb{R}^{q-1} \mid x \in G_k\}$ вида

$$h_x = \begin{cases} h, & \text{если } |x| - \text{четное число,} \\ l, & \text{если } |x| - \text{нечетное число.} \end{cases}$$

Здесь $h = (h_1, h_2, \dots, h_{q-1}), l = (l_1, l_2, \dots, l_{q-1})$. Тогда в силу (2.3) имеем

$$\begin{aligned} h_i &= k \ln \frac{(\theta - 1)e^{l_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{l_j} + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} e^{l_j} + \theta}, \\ l_i &= k \ln \frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + \theta}, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, q - 1.$$

Введем обозначения $e^{h_i} = x_i, e^{l_i} = y_i$. Тогда последнюю систему уравнений можно переписать как

$$\begin{aligned} x_i &= \left(\frac{(\theta - 1)y_i + \sum_{j=1}^{q-1} y_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} y_j + \theta} \right)^k, \\ y_i &= \left(\frac{(\theta - 1)x_i + \sum_{j=1}^{q-1} x_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} x_j + \theta} \right)^k, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, q - 1. \quad (4.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $q = 2$ модель Поттса совпадает с моделью Изинга, с которой можно ознакомиться в монографии [6]. В работе [8] доказано, что для $k = 2, q = 3$ и $J < 0$ на инвариантном множестве

$$I = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, y_1 = y_2\}$$

все $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными. Также в работе [8] доказано, что в случае $k \geq 1, q = 3$ и $J > 0$ все $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.

Из работы [10] известно, что множество

$$I_m = \left\{ z = (u, v) \in \mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{q-1} \mid \begin{array}{ll} x_i = x, y_i = y, & i = 1, 2, \dots, m, \\ x_i = y_i = 1, & i = m+1, m+2, \dots, q-1 \end{array} \right\},$$

т. е. множество элементов вида

$$z = (u, v), \quad u = (\underbrace{x, x, \dots, x}_m, 1, 1, \dots, 1), \quad v = (\underbrace{y, y, \dots, y}_m, 1, 1, \dots, 1),$$

инвариантно относительно отображения $W: \mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{q-1} \rightarrow \mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{q-1}$, заданного следующим образом:

$$\begin{aligned} x'_i &= \left(\frac{(\theta - 1)y_i + \sum_{j=1}^{q-1} y_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} y_j + \theta} \right)^k \\ y'_i &= \left(\frac{(\theta - 1)x_i + \sum_{j=1}^{q-1} x_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} x_j + \theta} \right)^k, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, q-1. \quad (4.2)$$

На множестве I_m система уравнений (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{\theta y + (m-1)y + (q-m)}{\theta + my + (q-m-1)} \right)^k, \\ y &= \left(\frac{\theta x + (m-1)x + (q-m)}{\theta + mx + (q-m-1)} \right)^k, \end{aligned} \quad (4.3)$$

или

$$\begin{aligned} x &= f(y), \\ y &= f(x), \end{aligned} \quad \text{где} \quad f(x) = \left(\frac{\theta x + (m-1)x + (q-m)}{\theta + mx + (q-m-1)} \right)^k. \quad (4.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть $\pi \in S_{q-1}$ – перестановка, действующая на вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_{q-1})$ как

$$\pi(x) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(q-1)}).$$

Тогда $\pi(I_m) = \{(\pi(x), \pi(y)) \mid (x, y) \in I_m\}$ также является инвариантным множеством относительно отображения W , заданного в (4.2), но соответствующая система уравнений совпадает с (4.3), поэтому, не нарушая общности, можно рассматривать только множество I_m .

В работе [10] также доказано (см. утверждение 1), что при $k \geq 3$, $3 \leq q < k + 1$ и при

$$0 < \theta < \bar{\theta}_{\text{cr}} = \frac{k - q + 1}{k + 1} < 1$$

система уравнений (4.1) на инвариантном множестве I_m имеет не менее трех решений $x_0 < x_1 = 1 < x_2$; при $\theta = \bar{\theta}_{\text{cr}}$ система имеет не менее одного решения $x_1 = 1$; при $\theta > \bar{\theta}_{\text{cr}}$ имеет только одно решение $x_1 = 1$.

В следующей теореме мы докажем, что для некоторого m система уравнений (4.1) на инвариантном множестве I_m имеет ровно три решения $x_0 < x_1 = 1 < x_2$ при $0 < \theta < \bar{\theta}_{\text{cr}}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$\bar{\theta}_{\text{cr}} = \frac{k - q + 1}{k + 1}, \quad k \geq 3, \quad q \geq 3, \quad J < 0.$$

Тогда для модели Поттса при $0 < \theta < \bar{\theta}_{\text{cr}}$ существуют ровно три $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса, соответствующие совокупности из множества I_m для некоторого m . При этом одна из них является трансляционно-инвариантной, а другие две – $G_k^{(2)}$ -периодическими (не трансляционно-инвариантными).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что система уравнений (4.4) при $x = y$ и $\theta < 1$ имеет единственное решение, которое соответствует трансляционно-инвариантной мере Гиббса, так как при $x = y$ мы имеем уравнение $x = f(x)$, для правой части которого справедливо следующее неравенство:

$$f(0) = \left(\frac{q - m}{\theta + q - m - 1} \right)^k > 0.$$

Функция $f(x)$ строго убывает и ограничена при $x > 0$. Докажем, что при условиях теоремы существуют только две $G_k^{(2)}$ -периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса и $x \neq y$. Для этого рассмотрим уравнение $f(f(x)) = x$. Так как функция $f(x)$ обратима при $x > 0$, перепишем последнее уравнение в виде $f(x) = f^{-1}(x) = g(x)$, где

$$g(x) = f^{-1}(x) = \frac{q - m - (\theta + q - m - 1) \sqrt[k]{x}}{m \sqrt[k]{x} - \theta - m + 1}.$$

Так как $f(x) > 0$, то $g(x) > 0$, откуда имеем

$$\theta_1 = \left(\frac{\theta + m - 1}{m} \right)^k < x < \left(\frac{q - m}{\theta + q - m - 1} \right)^k = \theta_2.$$

Рассмотрим функцию $h(x) = \ln(f(x)/g(x)) = \ln f(x) - \ln g(x)$. Изучим решения уравнения $h(x) = 0$. Ясно, что $x = 1$ является решением этого уравнения, т.е. $h(1) = 0$. Воспользовавшись производными

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{k(\theta - 1)(\theta + q - 1)f(x)}{[(\theta + m - 1)x + q - m](mx + \theta + q - m - 1)}, \\ g'(x) &= \frac{(\theta - 1)(\theta + q - 1)g(x)}{k \sqrt[k]{x^{k-1}}(m \sqrt[k]{x} - \theta - m + 1)[q - m - (\theta + q - m - 1) \sqrt[k]{x}]}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} = \\ &= \frac{(\theta-1)(\theta+q-1)}{k} \frac{k^2}{[(\theta+m-1)x+q-m](mx+\theta+q-m-1)} - \\ &- \frac{(\theta-1)(\theta+q-1)}{k} \frac{1}{\sqrt[k]{x^{k-1}}(m\sqrt[k]{x}-\theta-m+1)(q-m-(\theta+q-m-1)\sqrt[k]{x})}. \end{aligned}$$

Положив $\sqrt[k]{x} = t$, перепишем производную $h'(x) = v(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{(\theta-1)(\theta+q-1)p(t)}{kt^{k-1}[(\theta+m-1)t^k+q-m]} \times \\ &\times \frac{1}{(mt^k+\theta+q-m-1)(mt-\theta-m+1)[(\theta+q-m-1)t-q+m]}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p(t) &= m(\theta+m-1)t^{2k} + k^2m(\theta+q-m-1)t^{k+1} - \\ &- (k^2-1)(\theta^2+(q-2)\theta+2mq-2m^2-q+1)t^k + \\ &+ k^2(\theta+m-1)(q-m)t^{k-1} + (\theta+q-m-1)(q-m). \end{aligned}$$

Заметим, что по теореме Декарта многочлен $p(t)$ и, следовательно, $h'(x)$ имеют не более двух положительных корней.

Легко проверить, что

$$\lim_{x \rightarrow \theta_1} h(x) = -\infty, \quad h(1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \theta_2} h(x) = +\infty.$$

Отсюда уравнение $h(x) = 0$ имеет по крайней мере одно решение x_0 при $x < 1$ и хотя бы одно решение x_2 при $x > 1$, если $h'(1) < 0$. Из условия

$$h'(1) = \frac{(\theta-1)(\theta+q-1)}{k} \left[\frac{k^2}{(\theta+q-1)^2} - \frac{1}{(\theta-1)^2} \right] < 0$$

вытекает, что

$$\theta < \frac{k-q+1}{k+1} = \bar{\theta}_{\text{cr}},$$

так как $(\theta-1)(\theta+q-1)/k < 0$.

Кроме того, при $\theta < \bar{\theta}_{\text{cr}}$

$$\lim_{x \rightarrow \theta_1} h'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \theta_2} h'(x) = +\infty.$$

Тогда из неравенства $h'(1) < 0$ следует, что функция $h(x)$ имеет ровно две критические точки ξ_1, ξ_2 , причем $\theta_1 < \xi_1 < 1$ и $1 < \xi_2 < \theta_2$. Следовательно, $h(x)$ возрастает при $\theta_1 < x < \xi_1$ и при $x > \xi_2$ и убывает при $\xi_1 < x < \xi_2$ (см. рис. 1). Поэтому уравнение $h(x) = 0$ имеет только три решения $x_0 < x_1 = 1 < x_2$.

Осталось проверить условие $x \neq y$. Мы имеем решения $x_0 < x_1 = 1 < x_2$. Поскольку функция $f(x)$ строго убывает, из второго уравнения системы (4.4) получаем, что $f(x_0) = y_0 > f(x_1) = y_1 = 1 > f(x_2) = y_2$.

Рис. 1. График функции $h(x)$ при $k = 3$, $q = 3$, $\bar{\theta}_{cr} = 0.25$, $m = 1$ (а) и при $k = 5$, $q = 4$, $\theta = 0.2$, $m = 2$ (б).

Итак, для модели Поттса при условиях теоремы существуют три $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса μ_0 , μ_1 , μ_2 , соответствующие решениям $x_0 < x_1 = 1 < x_2$, при этом мера μ_1 является трансляционно-инвариантной, а меры μ_0 , μ_2 являются $G_k^{(2)}$ -периодическими (не трансляционно-инвариантными). Теорема доказана.

Из теоремы 3 с учетом результатов работы [10] вытекает следующая

ТЕОРЕМА 4. Для модели Поттса при $k \geq 3$, $3 \leq q < k + 1$ и $0 < \theta < \bar{\theta}_{cr}$ на множестве $\cup_{m=1}^q I_m$ существуют ровно $2 \cdot (2^q - 1)$ $G_k^{(2)}$ -периодических (не являющихся трансляционно-инвариантными) мер Гиббса.

Благодарности. Авторы выражают свою глубокую признательность профессору У. А. Розикову за полезные советы.

Список литературы

- [1] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, М., 1992.
- [2] К. Престон, *Гиббсовские состояния на счетных множествах*, Мир, М., 1977.
- [3] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.
- [4] Н. Н. Ганиходжаев, *ТМФ*, **85**:2 (1990), 163–175.
- [5] Н. Н. Ганиходжаев, *Докл. АН РУз*, **6–7** (1992), 4–7.
- [6] U. A. Rozikov, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci., Singapore, 2013.
- [7] N. N. Ganikhodjaev, U. A. Rozikov, *Lett. Math. Phys.*, **75**:2 (2006), 99–109.
- [8] У. А. Розиков, Р. М. Хакимов, *ТМФ*, **173**:1 (2012), 60–70.
- [9] Р. М. Хакимов, *Узбек. матем. журн.*, 2014, № 3, 134–142.
- [10] R. M. Khakimov, *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, **7**:3 (2014), 297–304.
- [11] C. Külske, U. A. Rozikov, R. M. Khakimov, *J. Stat. Phys.*, **156**:1 (2014), 189–200.
- [12] C. Külske, U. A. Rozikov, *Fuzzy transformations and extremality of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree*, [arXiv:1403.5775](https://arxiv.org/abs/1403.5775).