Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. П. Чубурин, Двухчастичное рассеяние в периодической среде, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 2, 304–318

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:12:19

© 2017 г.

Ю. П. Чубурин*

ДВУХЧАСТИЧНОЕ РАССЕЯНИЕ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Рассматривается двухчастичный разностный оператор Шредингера с периодическим потенциалом, возмущенный экспоненциально убывающим потенциалом взаимодействия, для частиц на одномерной решетке. Получены строгие результаты для двухчастичной задачи рассеяния в случае малого взаимодействия и малых скоростей. При этом, как и в других квазиодномерных моделях, малые взаимодействия могут существенно влиять на картину рассеяния. В частности, найдена вероятность того, что скорости двух частиц в периодической среде (например, это могут быть ультрахолодные атомы в одномерной оптической решетке) при столкновении изменяют знак. Эта вероятность растет при уменьшении относительной скорости, а также при увеличении абсолютной величины матричного элемента между одночастичными невозмущенными блоховскими состояниями.

Ключевые слова: разностный оператор Шредингера, двухчастичная задача рассеяния, периодический потенциал.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9139>

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Введем в рассмотрение разностный оператор Шредингера, действующий в пространстве квадратично суммируемых функций $l^2(\mathbb{Z}^2)$, вида

$$H = H_0 + V(n) + \varepsilon W(n_1 - n_2), \quad n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2. \quad (1)$$

Здесь H_0 определяется равенством

$$H_0 = h_0 \otimes 1 + 1 \otimes h_0,$$

где

$$(h_0 \psi)(n_j) = \psi(n_j - 1) + \psi(n_j + 1), \quad j = 1, 2,$$

Работа частично поддержана УРО РАН (грант № 15-8-2-12).

*Физико-технический институт Уральского отделения РАН, Ижевск, Россия.
E-mail: chuburin@ftiudm.ru

$V(n)$ – вещественная функция, периодическая по n_1, n_2 с периодом $T \geq 1$, $\varepsilon > 0$ – (малый) параметр и $W(n_1)$ – вещественная ненулевая функция, удовлетворяющая оценке

$$|W(n_1)| \leq C e^{-a|n_1|}, \quad a > 0. \quad (2)$$

В частности, положим

$$V(n) = U(n_1) + U(n_2) \quad (3)$$

для некоторой периодической функции U с периодом T ; тогда гамильтониан H описывает две одномерные взаимодействующие микрочастицы в периодической среде. Гамильтонианы такого вида используются (при фиксированном квазиимпульсе) для описания двухатомных состояний в оптической решетке [1]–[4].

Математическое исследование собственных значений и виртуальных уровней подобных разностных операторов для случая $V = 0$ проводилось, например, в статьях [3], [5]. Задача рассеяния для разностного гамильтониана в простом случае $V = 0$ и δ -образного потенциала W была решена в работах [1], [2], [6]; в “непрерывном” случае эта задача хорошо изучена [7], но лишь для убывающих потенциалов взаимодействия без периодического слагаемого. Асимптотическое поведение собственных значений и резонансов оператора H для возмущенного периодического потенциала и для малых ε в дискретном случае изучалось в статье [8], а в “непрерывном” случае – в статье [9].

В настоящей статье математически строго исследуется задача столкновения двух взаимодействующих частиц, описываемых гамильтонианом H , в одномерной решетке с периодическим потенциалом. Как и для других квазиодномерных систем [10]–[12], в отличие от случаев размерности $d > 1$ малые потенциалы могут оказывать существенное влияние на рассеяние медленных частиц; это связано с наличием сингулярности относительно некоторого параметра у функции Грина данных систем. В данной статье для малых взаимодействий и скоростей получены простые аналитические выражения для вероятности того, что скорости частиц в периодической среде (в частности, это могут быть пары ультрахолодных атомов в одномерной оптической решетке) при столкновении изменят знак. Эта вероятность зависит от скоростей частиц и, подобно обычной теории возмущений, от матричного элемента, включающего в себя потенциал взаимодействия и невозмущенные бловские волновые функции данных частиц (см. теорему 1). В отличие от имеющихся результатов для разностных моделей [1], [2], [6], в теореме 1 явно учитываются закон дисперсии и волновые функции периодической среды, в которой происходит рассеяние, а также вид потенциала межчастичного взаимодействия, что позволяет существенно обобщить и уточнить эти результаты.

Сформулируем эту основную теорему, для чего понадобятся некоторые понятия и предположения. Введем унитарный оператор

$$U_0: l^2(\mathbb{Z}^2) \rightarrow \int_{\Omega_0^*}^{\oplus} l^2(\Omega_0) dk$$

с помощью следующего равенства (ср. с книгой [13]):

$$(U_0 \varphi)(n, k) = \frac{T}{2\pi} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2} e^{-i(k, \mu)T} \varphi(n + T\mu)|_{\Omega_0 \times \Omega_0^*},$$

где $\Omega_0 = \{0, 1, \dots, T-1\}^2$ – это ячейка в прямой решетке, а $\Omega_0^* = [-\pi/T, \pi/T]^2$ – ячейка в двойственной решетке. Очевидно, что имеет место свойство блоховости

$$(U_0\varphi)(n+Tm, k) = e^{iT(k,m)}(U_0\varphi)(n, k). \quad (4)$$

Оператор $H_V = H_0 + V(n)$ унитарно эквивалентен оператору $U_0 H_V U_0^{-1}$. При этом оператор $U_0 H_V U_0^{-1}$ можно рассматривать как семейство $H_V(k) = H_0(k) + V(n)$, $k \in \Omega_0^*$, операторов, действующих в $l^2(\Omega_0) \cong \mathbb{C}^{T^2}$ следующим образом: функция $H_0(k)\psi(n)$, $n \in \Omega_0$, совпадает с $H_0\psi(n)$, $n \in \Omega_0$, но с учетом (4) для

$$n_j \pm 1 \notin \{0, 1, \dots, T-1\}, \quad j = 1, 2.$$

Вектор k называется *квазиимпульсом*.

Обозначим через $E_m(k)$, $m = 1, \dots, T^2$, собственные значения оператора $H_V(k)$, занумерованные по возрастанию с учетом кратностей, соответствующие блоховским собственным функциям $\psi_m(n, k)$, образующим ортонормированный базис в $l^2(\Omega_0)$.

Пусть $E_0 = E_N(k_{10}, \kappa_0 - k_{10})$ (см. равенство (10) ниже) – невырожденное собственное значение оператора $H_V(k_{10}, \kappa_0 - k_{10})$, отвечающее нормированному собственному вектору $\psi_N(n, (k_{10}, \kappa_0 - k_{10}))$. Без ограничения общности предполагаем, что E_N и ψ_N аналитически зависят от (k_1, κ) в некоторой окрестности (k_{10}, κ_0) (см. книгу [13]). В дальнейшем будем предполагать, что

$$\frac{\partial E_N(k_{10}, \kappa_0 - k_{10})}{\partial k_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 E_N(k_{10}, \kappa_0 - k_{10})}{\partial k_1^2} \neq 0. \quad (5)$$

Вследствие теоремы о неявной функции [14] и равенств (5) первое уравнение в (5) можно переписать в виде $k_1 = k_1^{(0)}(\kappa)$, где $k_1^{(0)}(\kappa)$ – аналитическая функция, определенная в окрестности κ_0 . Обозначим через $\mathcal{M}$ поверхность, определенную функцией $k_1^{(0)}(\kappa)$. Предполагаем, что число точек $(k_1, \kappa) \neq (k_{10}, \kappa_0)$ из некоторой окрестности (k_{10}, κ_0) таких, что $E_m(k_1, \kappa - k_1) = E_0$ для некоторого $m \neq N$, финитно и в этих точках $\partial E_m(k_1, \kappa - k_1)/\partial k_1 \neq 0$. В частности, сформулированные выше условия справедливы, если граничная точка некоторой зоны спектра оператора H_V определена функцией $E_N(k_1, \kappa - k_1)$.

Пусть U – достаточно малая (комплексная) окрестность точки E_0 . Тогда для (k_1, κ) , близких к (k_{10}, κ_0) , существуют ровно два решения $k_{1j} = k_{1j}(\kappa, E)$, $j = 1, 2$, уравнения

$$E_N(k_1, \kappa - k_1) = E,$$

аналитически зависящие от (k_1, κ) , если $E \neq E_0$ [15]. Положим $\xi_j = k_{1j} - k_1^{(0)}(\kappa)$, $j = 1, 2$. Тогда $\xi_2 = \mu(\xi_1)$, где μ – аналитическая функция такая, что $\mu'(0) = -1$ [15]. Следовательно, $\xi_2 = -\xi_1 + o(\xi_1)$. В дальнейшем для заданного κ будем часто использовать параметр ξ_1 вместо E . В этих случаях мы также будем употреблять обозначение $f(\xi_1)$ вместо $f(E)$ и т. д. Функции ξ_j , $j = 1, 2$, как функции переменной E образуют одну аналитическую функцию ξ , определенную на двулистной римановой поверхности $\mathcal{N}$ в окрестности E_0 , и ξ является аналитическим продолжением ξ_1 и ξ_2 . Для определенности предполагаем, что имеет место неравенство $\partial E_N(k_{11}, \kappa - k_{11})/\partial k_1 > 0$ для E вблизи точки E_0 .

Рассмотрим теперь случай (3), где $U(n_1)$ – вещественный периодический потенциал с периодом T . Обозначим через $\psi_{N_j}(n_1, k_j)$ нормированные собственные функции оператора $h(k_j) = h_0(k_j) + U(n_1)$, действующего в $l^2\{0, 1, \dots, T-1\}$, отвечающие собственным значениям $E_{N_j}(k_j)$, $j = 1, 2$. Тогда $\psi_0(n, k) = \psi_{N_1}(n_1, k_1)\psi_{N_2}(n_2, k_2)$ – нормированная собственная функция оператора $H(k) = H_0(k) + V(n)$, отвечающая собственному значению $E_0(k) = E_{N_1}(k_1) + E_{N_2}(k_2)$. Предполагаем, что $E_0 = E_0(k_0)$ невырождено. Первое условие в (5) означает равенство скоростей: $E'_{N_1}(k_{10}) = E'_{N_2}(\kappa_0 - k_{10}) = E'_{N_2}(k_{20})$. Считаем, что это равенство в дальнейшем выполняется. Для выполнения второго условия $E''_{N_1}(k_{10}) + E''_{N_2}(\kappa_0 - k_{10}) \neq 0$ в (5) потребуем, чтобы $E''_{N_j}(k_{j0}) > 0$, $j = 1, 2$.

Предположим, что

$$\xi_1 = A\varepsilon, \quad A = \text{const} \neq 0, \quad (6)$$

тогда $\xi_2 = -A\varepsilon + o(\varepsilon)$. Это означает, что рассматриваются малые потенциалы и медленные частицы.

ТЕОРЕМА 1. *Вероятность того, что частицы после столкновения не меняют скоростей, дается равенством*

$$\begin{aligned} P_+ &= \frac{A^2(E''_{N_1}(k_1^{(0)}) + E''_{N_2}(\kappa - k_1^{(0)}))^2}{A^2(E''_{N_1}(k_1^{(0)}) + E''_{N_2}(\kappa - k_1^{(0)}))^2 + W_0^2} + O(\varepsilon) = \\ &= \frac{(E'_{N_1}(k_1^{(0)}) - E'_{N_2}(\kappa - k_1^{(0)}))^2}{(E'_{N_1}(k_1^{(0)}) - E'_{N_2}(\kappa - k_1^{(0)}))^2 + \varepsilon^2 W_0^2} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Вероятность того, что частицы после столкновения изменяют скорости на противоположные, дается равенством

$$\begin{aligned} P_- &= \frac{W_0^2}{A^2(E''_{N_1}(k_1^{(0)}) + E''_{N_2}(\kappa - k_1^{(0)}))^2 + W_0^2} + O(\varepsilon) = \\ &= \frac{\varepsilon^2 W_0^2}{(E'_{N_1}(k_1^{(0)}) - E'_{N_2}(\kappa - k_1^{(0)}))^2 + \varepsilon^2 W_0^2} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Здесь

$$W_0 = T(\psi_N(n, (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)})), W(n_1 - n_2)\psi_N(n, (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))), \quad (7)$$

$(\psi_N, W\psi_N) = (\sqrt{|W|}\psi_N, \sqrt{W}\psi_N)$ есть скалярное произведение в пространстве $l^2(\{0, 1, \dots, T-1\} \times \mathbb{Z})$.

Заметим, что выражение $E'_{N_1}(k_1^{(0)}) - E'_{N_2}(\kappa - k_1^{(0)})$ представляет собой относительную скорость частиц, а $E''_{N_1}(k_1^{(0)}) + E''_{N_2}(\kappa - k_1^{(0)})$ – это сумма их обратных эффективных масс. Теорема остается справедливой и в случае $V(n) = U_1(x_1) + U_2(x_2)$.

Для доказательства теоремы необходимы некоторые утверждения, связанные, во-первых, с еще одним прямым интегралом пространств, относящимся уже не к периодичности гамильтониана, а к его двухчастичности, и, во-вторых, с умножением операторнозначной функции на векторнозначную обобщенную функцию. Такие обобщенные функции появляются при решении уравнения Липпмана–Швингера в разделе 3. Также нам понадобятся ключевые леммы 1, 2 о структуре функции Грина периодического оператора в бесконечной ячейке. Все эти результаты содержатся

в разделе 2. В разделе 3 с помощью уравнения Липпмана–Швингера в бесконечной ячейке исследуется двухчастичная задача рассеяния. Наконец, в разделе 4 рассматривается поведение волновых пакетов, чем завершается доказательство теоремы 1. В заключении (раздел 5) кратко резюмируется содержание статьи.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ И УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $\omega_1 \subset \mathbb{Z}^2$ и ω_2 – измеримое подмножество в $\mathbb{R}^m$. Обозначим через $l^2(\omega_1) \otimes L^2(\omega_2)$ гильбертово пространство всех измеримых по k функций $\varphi(n, k)$, определенных на $\omega_1 \times \omega_2$, таких, что

$$(\varphi, \varphi) = \sum_{n \in \omega_1} \int_{\omega_2} \varphi(n, k) \overline{\varphi(n, k)} dk < \infty.$$

Далее, определим прямой интеграл пространств $l^2(\omega_1)$ (см. книгу [13]) как

$$\int_{\omega_2}^{\oplus} l^2(\omega_1) dk = l^2(\omega_1) \otimes L^2(\omega_2).$$

Для изучения оператора H (1) введем ячейки вида $\Omega = \{0, 1, \dots, T-1\} \times \mathbb{Z}$, $\Omega^* = [-\pi/T, \pi/T)$, а также унитарный оператор [8]

$$U: l^2(\mathbb{Z}^2) \rightarrow \int_{\Omega^*}^{\oplus} l^2(\Omega) d\kappa,$$

действующий по формуле

$$(U\varphi)(n, \kappa) = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{-iT\kappa\nu} \varphi(n + T(\nu, \nu))|_{\Omega \times \Omega^*}. \quad (8)$$

Оператор UHU^{-1} отождествляется с семейством операторов

$$H(\kappa) = H_0(\kappa) + V(n) + \varepsilon W(n_1 - n_2), \quad \kappa \in \Omega^*,$$

действующих в $l^2(\Omega)$, где $H_0(\kappa)$ действует на функции из $l^2(\Omega)$ как оператор H_0 , если учесть свойство блоховости

$$(U\varphi)(n + T(\nu, \nu), \kappa) = e^{iT(\kappa, \nu)} (U\varphi)(n, \kappa) \quad (9)$$

для $n_1 \pm 1 \notin \{0, 1, \dots, T-1\}$. В случае $T = 1$ (это означает, что $V = \text{const}$), имеем $\Omega \cong \mathbb{Z}$, и $H(\kappa)$ становится одномерным оператором. Параметр κ является квазиимпульсом движения центра масс [3].

Имеет место равенство [8]

$$\sigma[H_V(\kappa)] = \bigcup_{k_1 + k_2 = \kappa} \sigma[H_V(k)], \quad (10)$$

где $\sigma(A)$ обозначает спектр оператора A .

Функция Грина (ядро резольвенты) оператора $H_V(k)$ имеет вид

$$G_V(n, n', k, E) = \sum_{m=1}^{T^2} \frac{\psi_m(n, k) \overline{\psi_m(n', k)}}{E_m(k) - E}. \quad (11)$$

Будем обозначать через $G_V(n, n', \kappa, E)$ функцию Грина оператора $H_V(\kappa) = H_0(\kappa) + V(n)$. Имеем следующие равенства [8]:

$$\begin{aligned} G_V(n, n', \kappa, E) &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{-iT\kappa\nu} G_V(n + T(\nu, \nu), n', E) = \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi/T} G_V(n, n', (k_1, \kappa - k_1), E) dk_1 \end{aligned} \quad (12)$$

и

$$G_V(n + T\mu, n', E) = G_V(n, n' - T\mu, E) = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \int_{\Omega_0^*} e^{iT(k, \mu)} G_V(n, n', k, E) dk. \quad (13)$$

Обозначим через $k_1^{(m, \alpha)} = k_1^{(m, \alpha)}(\kappa)$, $\alpha = 1, \dots, A_m$, точки, в которых верно равенство $E_m(k_1^{(m, \alpha)}, \kappa - k_1^{(m, \alpha)}) = E$ (в частности, $k_{11} = k_1^{(N, \alpha_0)}$). Согласно сделанным выше предположениям $\partial E_m(k_1^{(m, \alpha)}, \kappa - k_1^{(m, \alpha)})/\partial k_3 \neq 0$ для точки (E, κ) , где $E \neq E_0$ и достаточно близко к E_0 . Через N_+ (соответственно через N_-) обозначим множество точек $k_1^{(m, \alpha)}$, в которых эта производная положительна (соответственно отрицательна). Далее, представим произвольные точки $n, n' \in \Omega$ в виде $n = n_0 + T(\nu, 0)$, $n' = n'_0 + T(\nu', 0)$, где $n_0, n'_0 \in \Omega_0$ и $\nu, \nu' \in \mathbb{Z}$. Так же, как это было сделано для периодического оператора в различных ячейках [10], из выражений (11), (12) получаем следующие утверждения, дающие два различных представления для функции Грина $G_V(n, n', \kappa, \xi_1)$. Введем обозначение (только для W) $\sqrt{W} = \sqrt{|W|} \operatorname{sgn} W$.

ЛЕММА 1. Для (κ, E) , где $E \neq E_0$ принадлежит достаточно малой окрестности точки E_0 , справедливо равенство

$$\begin{aligned} G_V(n_0 + T(0, \nu), n'_0 + T(0, \nu'), \kappa, E + i0) &= \\ &= -\frac{T}{i} \sum_{k_1^{(m, \alpha)} \in N_+} \frac{\psi_m[n_0 + T(0, \nu), (k_1^{(m, \alpha)}, \kappa - k_1^{(m, \alpha)})]}{\partial E_m(k_1^{(m, \alpha)}, \kappa - k_1^{(m, \alpha)})/\partial k_1} \times \\ &\quad \times \overline{\psi_m[n'_0 + T(0, \nu'), (k_1^{(m, \alpha)}, \kappa - k_1^{(m, \alpha)})] \vartheta(\nu - \nu' - 1)} + \\ &+ \frac{T}{i} \sum_{k_1^{(m, \alpha)} \in N_-} \frac{\psi_m[n_0 + T(0, \nu), (k_1^{(m, \alpha)}, \kappa - k_1^{(m, \alpha)})]}{\partial E_m(k_1^{(m, \alpha)}, \kappa - k_1^{(m, \alpha)})/\partial k_1} \times \\ &\quad \times \overline{\psi_m[n'_0 + T(0, \nu'), (k_1^{(m, \alpha)}, \kappa - k_1^{(m, \alpha)})] \vartheta(\nu' - \nu)} + \\ &+ \gamma(n_0 + T(0, \nu), n'_0 + T(0, \nu'), \kappa, E), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\vartheta(t)$ – функция Хевисайда, причем γ удовлетворяет оценке

$$|\gamma(n_0 + T(0, \nu), n'_0 + T(0, \nu'), \kappa, E)| \leq C e^{-\sigma|\nu - \nu'|}, \quad \sigma > 0,$$

а функции

$$\sqrt{|W(n_1 - n_2)|} \gamma(n, n', \kappa, \xi, E), \quad \gamma(n, n', \kappa, \xi, E) \sqrt{|W(n'_1 - n'_2)|}$$

являются $l^2(\Omega \times \Omega)$ -значными аналитическими функциями в окрестности точки (κ_0, E_0) .

В следующей лемме функция $G_V(n, m, \kappa, \xi_1)$ аналитически продолжена на риманову поверхность $\mathcal{N}$ (см. раздел 1).

ЛЕММА 2. *Для (κ, ξ_1) , где $\xi_1 \neq 0$ принадлежит достаточно малой окрестности нуля, справедливо равенство*

$$G_V(n, n', \kappa, \xi_1) = -\frac{T\psi_N(n, (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))\overline{\psi_N(n', (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))}}{i\xi_1 \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)})/\partial k_1^2} + g(n, m, \kappa, \xi_1),$$

причем $\sqrt{|W(n_1 - n_2)|}g(n, n', \kappa, \xi_1)\sqrt{W(n'_1 - n'_2)}$ является $l^2(\Omega \times \Omega)$ -значной аналитической функцией в окрестности точки $(\kappa_0, 0)$.

3. УРАВНЕНИЕ ЛИППМАНА–ШВИНГЕРА

Запишем уравнение Липпмана–Швингера для оператора H в виде

$$\psi(n, k) = \psi_N(n, k) - \varepsilon \sum_{n' \in \mathbb{Z}} G_V(n, n', E + i0)W(n'_1 - n'_2)\psi(n', k), \quad (15)$$

где $E = E_N(k)$. В дальнейшем обычно мы будем пользоваться обозначением $\psi(n)$ вместо $\psi(n, k)$. В силу предположения (6), принятого в лемме 3 ниже и теореме 1, выбор плюса или минуса в (15) несуществен, и этот знак можно опустить.

Положим $\widehat{\varphi}(n, \kappa) = (U\varphi)(n, \kappa)$. Действуя (формально) оператором U на обе части (15), получим согласно формулам (8), (9), (12) и (13) уравнение Липпмана–Швингера в ячейке Ω :

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(n, \kappa) &= \widehat{\psi}_N(n, k, \kappa) - \varepsilon \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \sum_{n' \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{-iT\kappa\nu} G_V(n + T(\nu, \nu), n', E)W(n'_1 - n'_2)\psi(n') = \\ &= \widehat{\psi}_N(n, k, \kappa) - \varepsilon \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \sum_{n' \in \mathbb{Z}^2} G_V(n, n', E)W(n'_1 - n'_2) \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{-iT\kappa\nu} \psi(n' + T(\nu, \nu)) = \\ &= \widehat{\psi}_N(n, k, \kappa) - \varepsilon \sum_{n' \in \mathbb{Z}^2} G_V(n, n', E) \times W(n'_1 - n'_2) \widehat{\psi}(n', \kappa) = \\ &= \widehat{\psi}_N(n, k, \kappa) - \varepsilon \sum_{n' \in \Omega} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} G_V(n, n' - T(\nu, \nu), E)W(n'_1 - n'_2) \widehat{\psi}(n' - T(\nu, \nu), \kappa) = \\ &= \widehat{\psi}_N(n, k, \kappa) - \varepsilon \sum_{n' \in \Omega} G_V(n, n', \kappa, E)W(n'_1 - n'_2) \widehat{\psi}(n', \kappa). \end{aligned} \quad (16)$$

При этом согласно (4)

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_N(n, k, \kappa) &= \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{-iT\kappa\nu} \psi_N(n + T(\nu, \nu), k) = \\ &= \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{iT(k_1 + k_2 - \kappa\nu)} \psi_N(n, k) = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \psi_N(n, k) \delta_{\text{per}}(k_1 + k_2 - \kappa), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\delta_{\text{per}}(k_1 + k_2 - \kappa) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \delta\left(k_1 + k_2 - \kappa + \frac{2\pi\nu}{T}\right).$$

Найдем ограниченное решение уравнения (15). Ряды по ν (16), (17) понимаются как $l^\infty(\Omega)$ -значные периодические обобщенные функции аргумента κ .

Согласно формулам (16), (17) запишем уравнение Липпмана–Швингера в ячейке Ω в виде

$$\widehat{\psi}(n, \kappa) = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \psi_N(n, k) \delta_{\text{per}}(k_1 + k_2 - \kappa) - \varepsilon \sum_{n' \in \Omega} G_V(n, n', \kappa, E) W(n'_1 - n'_2) \widehat{\psi}(n', \kappa). \quad (18)$$

Используя лемму 2 и параметр ξ_1 вместо E , а также заменяя k_1 на $k_{11} = k_1^{(0)}(\kappa) + \xi_1$, перепишем уравнение (18) для κ , близких к κ_0 , и малых ξ_1 следующим образом:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(n, \kappa) = & \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \psi_N(n, (k_{11}, k_2)) \delta_{\text{per}}(k_{11} + k_2 - \kappa) + \\ & + \frac{\varepsilon T \psi_N(n, (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))}{i \xi_1 \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2} \sum_{n' \in \Omega} \overline{\psi_N(n', (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))} W(n'_1 - n'_2) \widehat{\psi}(n', \kappa) - \\ & - \varepsilon \sum_{n' \in \Omega} g(n, n', \kappa, \xi_1) W(n'_1 - n'_2) \widehat{\psi}_N(n', \kappa). \end{aligned} \quad (19)$$

Обозначим через $K(\kappa, \xi_1)$ оператор с ядром вида

$$-\sqrt{|W(n_1 - n_2)|} g(n, n', \kappa, \xi_1) \sqrt{|W(n_1 - n_2)|}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \varphi(n, \kappa) &= \sqrt{|W(n_1 - n_2)|} \widehat{\psi}(n, \kappa), \quad \varphi_N(n, k) = \sqrt{|W(n_1 - n_2)|} \psi_N(n, k), \\ \vartheta(n, \kappa) &= (1 - \varepsilon K(\kappa, \xi_1)) \varphi(n, \kappa). \end{aligned} \quad (20)$$

Будем рассматривать φ и φ_N как $l^2(\Omega)$ -значные обобщенные функции аргумента κ , изменяющегося в малой окрестности ω точки κ_0 . Определим действие оператора K на эти обобщенные функции. Обозначим через $L(l^2(\Omega))$ банахово пространство всех линейных ограниченных операторов в $l^2(\Omega)$, а через

$$\mathcal{E}(\omega, L(l^2(\Omega))) \cong \mathcal{E}(\omega) \widehat{\otimes} L(l^2(\Omega)) \quad (21)$$

— пространство Фреше (см. статьи [16], [17]) бесконечно дифференцируемых $L(l^2(\Omega))$ -значных функций, определенных на ω . Для малых ξ_1 по переменной κ имеем включение $K \in \mathcal{E}(\omega, L(l^2(\Omega)))$. Обозначим через $\mathcal{D}'(\omega, l^2(\Omega))$ пространство $l^2(\Omega)$ -значных обобщенных функций на ω [17]. Пусть $T \in \mathcal{D}'(\omega, l^2(\Omega))$. Определим отображение

$$\alpha_T: \mathcal{E}(\omega) \times L(l^2(\Omega)) \rightarrow \mathcal{D}'(\omega, l^2(\Omega))$$

формулой

$$\alpha_T(f, A)(\psi) = AT(f\psi), \quad \psi \in \mathcal{D}(\omega).$$

Очевидно, что билинейное отображение α_T раздельно непрерывно и, следовательно, непрерывно [18]. Таким образом (см. книгу [18]), согласно (21) отображение α_T порождает линейное непрерывное отображение

$$\widehat{\alpha}_T: \mathcal{E}(\omega, L(l^2(\Omega))) \rightarrow \mathcal{D}'(\omega, l^2(\Omega)).$$

Под $K(\kappa, \xi_1)\varphi(n, \kappa)$ и т. д. будем понимать $\widehat{\alpha}_\varphi(K)$.

Заметим, что K можно представить (не единственным образом) в виде [18]

$$K(\kappa, \xi_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \varphi_m(\kappa) A_m,$$

где $\{\lambda_m\} \in l^1$, $\{\varphi_m\}$ и $\{A_m\}$ – последовательности, сходящиеся к нулю в пространствах $\mathcal{E}(\omega)$ и $L(l^2(\Omega))$ соответственно. Тогда

$$(K(\kappa, \xi_1) \varphi(n, \kappa))(\psi) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m A_m \varphi(n, \kappa) (\varphi_m \psi), \quad \psi \in \mathcal{D}(\omega).$$

Из этого равенства и теоремы о равномерной сходимости на предкомпактных множествах [18] следует, что $K\varphi$ непрерывно по φ .

Эти же соображения верны, если вместо пространства $l^\infty(\Omega)$ взять $l^2(\Omega)$.

ЛЕММА 3. *Предположим, что выполнено условие (6). Тогда для всех достаточно малых ε существует единственное решение уравнения Липпмана–Швингера (19) в ячейке Ω , имеющее вид*

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(n, \kappa) = & \left(\frac{\sqrt{2\pi/T} i A \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2}{i A \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2 - W_0} + O(\varepsilon) \right) \times \\ & \times \psi_N(n, (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) \delta_{\text{per}}(k_{11} + k_2 - \kappa), \end{aligned}$$

где W_0 определяется равенством (7). Здесь величина $O(\varepsilon)$ гладко зависит от κ, ε и удовлетворяет оценке

$$\|\sqrt{W(n_1 - n_2)} O(\varepsilon)\|_{l^2(\Omega)} \leq C\varepsilon, \quad C = \text{const}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя обозначение (20), в окрестности κ_0 из формулы (19) получаем следующее равенство:

$$\vartheta(n, \kappa) = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \varphi_N(n, (k_{11}, k_2)) \delta_{\text{per}}(k_{11} + k_2 - \kappa) + \varphi_N(n, (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)})) C, \quad (22)$$

где $C = C(\kappa)$ – обобщенная функция, не зависящая от n . Из выражений (19), (22) для малых ε находим, что

$$\begin{aligned} C = & \frac{\varepsilon T}{i \xi_1 \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2} \times \\ & \times ((1 - \varepsilon K(\kappa, \xi_1))^{-1} \vartheta(n, \kappa), \sqrt{W(n_1 - n_2)} \psi_N(n, (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))) = \\ = & \frac{\varepsilon T}{i \xi_1 \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2} \times \\ & \times \sqrt{\frac{2\pi}{T}} ((\varphi_N(n, (k_{11}, k_2)), \sqrt{W(n_1 - n_2)} \psi_N(n, (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))) \delta_{\text{per}}(k_{11} + k_2 - \kappa) + \\ & + (\varphi_N(n, (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)})), \sqrt{W(n_1 - n_2)} \psi_N(n, (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))) C + \\ & + \varepsilon \sqrt{\frac{2\pi}{T}} (L(\kappa, \xi_1, \varepsilon) \varphi_N(n, (k_{11}, k_2)), \sqrt{W(n_1 - n_2)} \psi_N(n, (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))) \times \\ & \times \delta_{\text{per}}(k_{11} + k_2 - \kappa) + \\ & + \varepsilon (L(\kappa, \xi_1, \varepsilon) \varphi_N(n, (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)})), \sqrt{W(n_1 - n_2)} \psi_N(n, (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))) C), \end{aligned}$$

где

$$L(\kappa, \xi_1, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} K^n(\kappa, \xi_1).$$

Отсюда следует, что

$$C = \left(\frac{\sqrt{2\pi/T} W_0}{iA \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2 - W_0} + O(\varepsilon) \right) \delta_{\text{per}}(k_{11} + k_2 - \kappa) \quad (23)$$

(это равенство было получено в некоторой окрестности точки κ_0 , и его можно продолжить по периодичности на $\mathbb{R}$). Согласно (20), (22) и (23) получаем выражение

$$\begin{aligned} \varphi(n, \kappa) &= \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left(1 + \frac{\sqrt{2\pi/T} W_0}{iA \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2 - W_0} + O(\varepsilon) \right) \times \\ &\times \varphi_N(n, (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)})) \delta_{\text{per}}(k_{11} + k_2 - \kappa). \end{aligned} \quad (24)$$

Если $W(n_1) \neq 0$ для всех n_1 , то очевидно, что первое утверждение леммы 3 следует из (24). В противном случае существует последовательность функций $W_m(n_1)$, $m = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих (2), сходящаяся к $W(n_1)$ и такая, что $W_m(n_1) \neq 0$ для всех m, n_1 . Остается разделить (24), подставив W_m вместо W , на $\sqrt{|W_m(n_1 - n_2)|}$ и перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$. Гладкость $O(\varepsilon)$ очевидна из доказательства. Лемма доказана.

Используя формулу (18) и леммы 1, 3, запишем решение $\widehat{\psi}$ уравнения (18) в виде, удобном для изучения рассеяния. Будем предполагать, что $\xi_1 > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_N(k_{11}, \kappa - k_{11})}{\partial k_1} &= \frac{\partial^2 E_N(k_{11}^{(0)}, \kappa - k_{11}^{(0)})}{\partial k_1^2} \xi_1 + o(\xi_1) > 0, \\ \frac{\partial E_N(k_{12}, \kappa - k_{12})}{\partial k_1} &= \frac{\partial^2 E_N(k_{11}^{(0)}, \kappa - k_{11}^{(0)})}{\partial k_1^2} \xi_2 + o(\xi_2) = \\ &= - \frac{\partial^2 E_N(k_{11}^{(0)}, \kappa - k_{11}^{(0)})}{\partial k_1^2} \xi_1 + o(\xi_1) < 0, \end{aligned} \quad (25)$$

и соответственно $\partial^2 E_N(k_{11}^{(0)}, \kappa - k_{11}^{(0)}) / \partial k_1^2 > 0$. С помощью (25) получаем равенство

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(n_0 + T(0, \nu), \kappa) &= \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \psi_N(n_0 + T(0, \nu), (k_{11}, k_2)) \delta_{\text{per}}(k_{11} + k_2 - \kappa) + \\ &+ \frac{\varepsilon T \psi_N(n_0 + T(0, \nu), (k_{11}, \kappa - k_{11}))}{i \partial E_N(k_{11}, \kappa - k_{11}) / \partial k_1} \times \\ &\times \sum_{\substack{n'_0 \in \Omega_0, \\ \nu' \leq \nu - 1}} \overline{\psi_N(n'_0 + T(0, \nu'), (k_{11}, \kappa - k_{11}))} W(n'_1 - n'_2) \widehat{\psi}(n'_0 + T(0, \nu'), \kappa) - \\ &- \frac{\varepsilon T \psi_N(n_0 + T(0, \nu), (k_{12}, \kappa - k_{12}))}{i \partial E_N(k_{12}, \kappa - k_{12}) / \partial k_1} \times \\ &\times \sum_{\substack{n'_0 \in \Omega_0, \\ \nu' \geq \nu}} \overline{\psi_N(n'_0 + T(0, \nu'), (k_{12}, \kappa - k_{12}))} W(n'_1 - n'_2) \widehat{\psi}(n'_0 + T(0, \nu'), \kappa) - \\ &- \sum_{n' \in \Omega} \eta(n, n', \kappa, \xi_1) W(n'_1 - n'_2) \widehat{\psi}(n', \kappa) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \psi_N(n_0 + T(0, \nu), (k_{11}, k_2)) \delta_{\text{per}}(k_{11} + k_2 - \kappa) + \\
&+ \left(\sqrt{\frac{2\pi}{T}} \frac{T \psi_N(n_0 + T(0, \nu), (k_{11}, \kappa - k_{11}))}{iA \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2 - W_0} \times \right. \\
&\quad \times \sum_{\substack{n'_0 \in \Omega_0, \\ \nu' \leq \nu-1}} |\psi_N(n'_0 + T(0, \nu'), (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))|^2 W(n'_1 - n'_2) + \\
&\quad + \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \frac{T \psi_N(n_0 + T(0, \nu), (k_{12}, \kappa - k_{12}))}{iA \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2 - W_0} \times \\
&\quad \times \sum_{\substack{n'_0 \in \Omega_0, \\ \nu' \geq \nu}} |\psi_N(n'_0 + T(0, \nu'), (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))|^2 W(n'_1 - n'_2) + O(\varepsilon) \Big) \times \\
&\quad \times \delta_{\text{per}}(k_{11} + k_2 - \kappa) = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left(1 + \frac{T}{iA \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2 - W_0} \times \right. \\
&\quad \times \sum_{\substack{n'_0 \in \Omega_0, \\ \nu' \leq \nu-1}} |\psi_N(n'_0 + T(0, \nu'), (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))|^2 W(n'_1 - n'_2) \Big) \times \\
&\quad \times \psi_N(n_0 + T(0, \nu), (k_{11}, \kappa - k_{11})) \delta_{\text{per}}(k_{11} + k_2 - \kappa) + \\
&+ \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left(\frac{T}{iA \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2 - W_0} \times \right. \\
&\quad \times \sum_{\substack{n'_0 \in \Omega_0, \\ \nu' \geq \nu}} |\psi_N(n'_0 + T(0, \nu'), (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))|^2 W(n'_1 - n'_2) \Big) \times \\
&\quad \times \psi_N(n_0 + T(0, \nu), (k_{12}, \kappa - k_{12})) \delta_{\text{per}}(k_{11} + k_2 - \kappa) + O(\varepsilon) \delta_{\text{per}}(k_{11} + k_2 - \kappa).
\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь величина $O(\varepsilon)$ аналитически зависит от ε и κ , η – сумма γ и слагаемых в суммах (14), отвечающих $k_1^{(m, \alpha)} \neq k_{1j}$, $j = 1, 2$ (знаменатели этих слагаемых не равны нулю, и, следовательно, их можно включить в $O(\varepsilon)$).

Используя (26) и блоховость (4) функции ψ_N , теперь можно найти решение ψ уравнения Лишмана–Швингера (15) в пространстве $\mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned}
\psi(n + T(\nu, \nu)) &= \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \int_0^{2\pi/T} e^{iT\kappa\nu} \hat{\psi}(n, \kappa) d\kappa = \\
&= \left(1 + \frac{T}{iA \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2 - W_0} \times \right. \\
&\quad \times \sum_{\substack{n'_0 \in \Omega_0, \\ \nu' \leq \nu-1}} |\psi_N(n'_0 + T(0, \nu'), (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))|^2 W(n'_1 - n'_2) \Big) \times \\
&\quad \times \psi_N(n + T(\nu, \nu), (k_{11}, k_2)) + \frac{T}{iA \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2 - W_0} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\sum_{\substack{n'_0 \in \Omega_0, \\ \nu' \geq \nu}} |\psi_N(n'_0 + T(0, \nu'), (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))|^2 W(n'_1 - n'_2) \right) \times \\
 & \times \psi_N(n + T(\nu, \nu), (k_{12}, k'_2)) + O(\varepsilon),
 \end{aligned} \tag{27}$$

где $n \in \Omega$ и $k'_2 = k_{11} + k_2 - k_{12}$. Пусть $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$. Обозначим через $\nu \in \mathbb{Z}$ число, для которого выполнено включение $n_1 - \nu T \in \{0, 1, \dots, T-1\}$, и положим $n_1 - \nu T = n_1 \pmod{T}$. Тогда равенство (27) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 \psi(n) = & \left(1 + \frac{T}{iA \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2 - W_0} \times \right. \\
 & \times \sum_{\substack{n'_0 \in \Omega_0, \\ \nu' \leq (n_1 - n_1 \pmod{T}) / T - 1}} |\psi_N(n'_0 + T(0, \nu'), (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))|^2 W(n'_1 - n'_2) \Big) \times \\
 & \times \psi_N(n, (k_{11}, k_2)) + \frac{T}{iA \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2 - W_0} \times \\
 & \times \left(\sum_{\substack{n'_0 \in \Omega_0, \\ \nu' \geq (n_1 - n_1 \pmod{T}) / T}} |\psi_N(n'_0 + T(0, \nu'), (k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}))|^2 W(n'_1 - n'_2) \right) \times \\
 & \times \psi_N(n, (k_{12}, k'_2)) + O(\varepsilon).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Из формулы (28) следует, что

$$\psi(n) = \begin{cases} \psi_N(n, (k_{11}, k_2)) + a_- \psi_N(n, (k_{12}, k'_2)) + \eta_-(n) + O(\varepsilon), & n \rightarrow -\infty, \\ a_+ \psi_N(n, (k_{11}, k_2)) + \eta_+(n) + O(\varepsilon), & n \rightarrow \infty, \end{cases} \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_- &= \frac{W_0}{iA \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2 - W_0}, \\
 a_+ &= \frac{iA \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2}{iA \partial^2 E_N(k_1^{(0)}, \kappa - k_1^{(0)}) / \partial k_1^2 - W_0},
 \end{aligned} \tag{30}$$

а функции $\eta_{\pm} = \eta_{\pm}(n, \xi_1)$ удовлетворяют согласно (1) оценке

$$|\eta_{\pm}(n, \xi_1)| \leq C e^{-\alpha|n_1|}, \quad \pm n_1 \geq 0,$$

и аналитически зависят от ξ_1 .

Рассмотрим нестационарное поведение одномерных волновых пакетов, отвечающих блоховской функции $\psi_{N_1}(n_1, k_1)$. Имеем равенство $\psi_{N_1}(n_1, k_1) = e^{ik_1 n_1} \vartheta(n_1, k_1)$, где функция $\vartheta(n_1, k_1)$ периодична по переменной n_1 с периодом T . Отсюда получаем, что

$$\vartheta(n_1, k_1) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{T-1} c_m(k_1) e^{i2\pi m n_1 / T},$$

где

$$c_m(k_1) = \left(\vartheta(n_1, k_1), \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i2\pi m n_1 / T} \right).$$

Решение уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial \psi(n_1, t)}{\partial t} = (h_0 + U(n_1))\psi(n_1, t)$$

будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi(n_1, t) &= \int_{\mathbb{R}} C(k_1) \psi(n_1, k_1) e^{-itE_{N_1}(k_1)} dk_1 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{T-1} e^{i2\pi mn_1/T} \int_{\mathbb{R}} C(k_1) c_m(k_1) e^{i(k_1 n_1 - tE_{N_1}(k_1))} dk_1, \end{aligned} \quad (31)$$

где $C(k_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\text{supp } C(k_1)$ лежит в достаточно малой окрестности точки $k'_1 \neq 0$. Волновой пакет, отвечающий m -му слагаемому в (31), сосредоточен с точностью до как угодно малого слагаемого в точках $n_1 \in \mathbb{Z}$, для которых

$$-\sigma < \frac{n_1}{t} - E'_{N_1}(k'_1) < \sigma, \quad (32)$$

где $\sigma > 0$ достаточно мало (см. книгу [7]). Таким образом, волновой пакет перемещается со скоростью $E'_{N_1}(k'_1)$ вправо или влево в зависимости от знака $tE'_{N_1}(k'_1)$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Решение двухчастичного уравнения Шредингера

$$\frac{\partial \psi(n, t)}{\partial t} = H\psi(n, t)$$

с потенциалом вида (3) находим, как и выше, в виде интеграла

$$\psi(n, t) = \int_{\mathbb{R}^2} C_1(k_1) C_2(k_2) \psi(n, k) e^{-it(E_{N_1}(k_1) + E_{N_2}(k_2))} dk, \quad (33)$$

где $\text{supp } C_j(k_j)$ выбираем в малой окрестности некоторой точки k'_j , $j = 1, 2$, так, чтобы $k'_1 > k_{10}$ и $k'_2 = \kappa_0 - k'_1$ (здесь $\kappa = k_1 + k_2$ рассматривается как функция независимых переменных k_1, k_2). Согласно формуле (29) для больших t интеграл (33) с точностью до ε сводится к интегралу вида

$$\int_{\mathbb{R}^2} C_1(k_1) C_2(k_2) \psi_{N_1}(n_1, k_{1j}) \psi_{N_2}(n_2, k_2) e^{-it(E_{N_1}(k_1) + E_{N_2}(k_2))} dk,$$

поскольку интегралы, содержащие функции $\eta_{\pm}$, стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ (см. работу [19]). Следовательно, изучение интегралов (33) сводится к рассмотренному выше случаю. Опишем картину рассеяния для медленных частиц. Скорости частиц, отвечающих волновым функциям $\psi_{N_1}(n_1, k_{11}) = \psi_{N_1}(n_1, k_1^{(0)} + \xi_1)$ и $\psi_{N_2}(n_2, k_2) = \psi_{N_2}(n_2, \kappa - \xi_1 + o(\xi_1))$, равны соответственно

$$\begin{aligned} E'_{N_1}(k_1^{(0)} + \xi_1) &= E''_{N_1}(k_1^{(0)})\xi_1 + o(\varepsilon), \\ E'_{N_2}(\kappa - k_1^{(0)} - \xi_1 + o(\xi_1)) &= -E''_{N_2}(\kappa - k_1^{(0)})\xi_1 + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

и, следовательно, противоположны по направлению. Пусть $\xi_1 > 0$, тогда в силу оценок (32) $n_j \approx E'_{N_j}(k_j)t$, $j = 1, 2$. В случае $t \rightarrow -\infty$ имеем $n_1 \rightarrow -\infty$ и $n_2 \rightarrow \infty$. Следовательно, можно использовать первое равенство в (29); более того, только первое слагаемое играет роль в рассеянии, причем оно описывает движение частиц навстречу друг другу. В случае $t \rightarrow \infty$ и $n_1 \rightarrow \infty$ второе равенство в (29) описывает частицы, которые после встречи продолжают движение с неизменившимися скоростями. В этом случае второе слагаемое в первом равенстве (29) имеет вид $a_- \psi_{N_1}(n_1, k_1^{(0)} - \xi_1) \psi_{N_2}(n_2, \kappa - k_1^{(0)} + \xi_1) + o(\varepsilon)$ и описывает ситуацию, когда частицы отражаются друг от друга. Для достаточно больших $|t|$ и малых ε рассматриваемые волновые пакеты с любой степенью точности локализованы в непересекающихся областях. Это позволяет вычислить вероятности распространения частиц в противоположных направлениях как суммы $|\psi(n, t)|^2$ в этих областях. Используя стандартные рассуждения, получаем равенство $C = C|a_+|^2 + C'|a_-|^2$, где константы C и C' отвечают членам с функциями $\psi_N(n, (k_{11}, k_2))$ и $\psi_N(n, (k_{12}, k'_2))$ соответственно. Из очевидного равенства $|a_+|^2 + |a_-|^2 = 1$ следует, что $C = C'$. Таким образом, вероятность P_+ того, что частицы после столкновения не изменят скоростей, равна $|a_+|^2$, а вероятность изменения их скоростей на противоположные равна $|a_-|^2$. Теорема 1 вытекает теперь из формулы (30).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрены две одномерные взаимодействующие частицы в периодической среде; в частности, это могут быть два ультрахолодных атома в одномерной оптической решетке. В случае малого взаимодействия и медленных частиц получена простая аналитическая формула для вероятности изменения их скоростей на противоположные при столкновении. Эта вероятность растет при уменьшении относительной скорости, а также при увеличении абсолютной величины матричного элемента между одночастичными невозмущенными блоховскими состояниями.

Список литературы

- [1] K. Winkler, G. Thalhammer, F. Lang, R. Grimm, J. Hecker Denschlag, A. J. Daley, A. Kantian, H. P. Büchler, P. Zoller, “Repulsively bound atom pairs in an optical lattice”, *Nature*, **441** (2006), 853–856.
- [2] N. Nygaard, R. Piil, K. Mølmer, “Two-channel Feshbach physics in a structured continuum”, *Phys. Rev. A*, **78**:2 (2008), 023617, 16 pp.
- [3] M. Valiente, D. Petrosyan, “Two-particle states in the Hubbard model”, *J. Phys. B*, **41**:16 (2008), 161002, 5 pp.
- [4] Y.-M. Wang, J.-Q. Liang, “Repulsive bound-atom pairs in an optical lattice with two-body interaction of nearest neighbors”, *Phys. Rev. A*, **81**:4 (2010), 045601, 4 pp.
- [5] С. Н. Лакаев, А. М. Халужаев, “О спектре двухчастичного оператора Шредингера на решетке”, *ТМФ*, **155**:2 (2008), 287–300.
- [6] A. Dhar, D. Sen, D. Roy, “Scattering of electrons from an interacting region”, *Phys. Rev. Lett.*, **101**:6 (2008), 066805, 4 pp.
- [7] М. Рид, Б. Саймон, *Методы математической физики*, т. 3: *Теория рассеяния*, Мир, М., 1982.
- [8] L. Y. Baranova, Y. P. Chuburin, “Quasi-levels of the two-particle discrete Schrödinger operator with a perturbed periodic potential”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:43 (2008), 435205, 11 pp.

- [9] Ю. П. Чубурин, “Квазиуровни двухчастичного оператора Шредингера с возмущенным периодическим потенциалом”, *ТМФ*, **158**:1 (2009), 115–125.
- [10] Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин, “Рассеяние электрона на кристаллическом слое”, *ТМФ*, **176**:3 (2013), 444–457.
- [11] Y. P. Chuburin, “Electron scattering on the surface of a topological insulator”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:25 (2014), 255203, 13 pp.
- [12] Yu. P. Chuburin, “Electron scattering in a graphene nanoribbon in the presence of ferromagnetic layer and Rashba interaction”, *Phys. Lett. A*, **380**:13 (2016), 1329–1333.
- [13] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [14] Р. Ганнинг, Х. Росси, *Аналитические функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1969.
- [15] Ю. П. Чубурин, “О малых возмущениях оператора Шредингера с периодическим потенциалом”, *ТМФ*, **110**:3 (1997), 443–453.
- [16] L. Schwartz, “Théorie des distributions à valeurs vectorielles. I”, *Ann. Inst. Fourier*, **7** (1957), 1–141; “Théorie des distributions à valeurs vectorielles. II”, **8** (1958), 1–210.
- [17] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs of the American Mathematical Society, **16**, AMS, Providence, RI, 1955.
- [18] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971.
- [19] Ю. П. Чубурин, “О рассеянии для оператора Шредингера в случае кристаллической пленки”, *ТМФ*, **72**:1 (1987), 120–131.

Поступила в редакцию 24.12.2015,
после доработки 26.05.2016