Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Гавриленко, А. В. Маршаков, Свободные фермионы, W -алгебры и изомонодромные деформации, $ТМФ$, 2016, том 187, номер 2, 232–262

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9141>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:47:38

© 2016 г.

П. Г. Гавриленко^{*†}, А. В. Маршаков^{*‡§}

СВОБОДНЫЕ ФЕРМИОНЫ, W -АЛГЕБРЫ И ИЗОМОНОДРОМНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Рассматривается теория многокомпонентных свободных безмассовых фермионов в двух измерениях, которая применяется для построения представлений W -алгебр с целыми центральными зарядами Вирасоро. Вершинные операторы в этой теории определяются в терминах решений соответствующей изомонодромной задачи. Эта конструкция используется для того, чтобы получить новые данные о тау-функциях многокомпонентных иерархий типа цепочки Тоды для класса решений, отвечающих изомонодромным вершинным операторам, а также для того, чтобы получить удобное представление для тау-функций изомонодромных деформаций.

Ключевые слова: двумерные конформные теории поля, W -алгебры, изомонодромные деформации.

DOI: 10.4213/tmf9141

Работа П. Г. Гавриленко поддержана РФФИ (российско-украинский проект НАНУ-РФФИ № 01-01-14), а также НАНУ-CNRS (проект F14-2015) и стипендией “Молодая математика России”. Работа А. В. Маршакова поддержана РФФИ (проекты № 14-01-90405, 15-01-99504, российско-японский проект РФФИ/JSPS № 15-51-50034) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1500.2014.2). Статья подготовлена в ходе проведения исследования за счет субсидии на государственную поддержку ведущих университетов РФ в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной Национальному исследовательскому университету «Высшая школа экономики».

^{*}Лаборатория теории представлений и математической физики, Факультет математики, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

[†]Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Киев, Украина.
E-mail: gavrylenko@bitp.kiev.ua

[‡]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

[§]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: mars@itep.ru

*Посвящается 75-летию
Игоря Викторовича Тютина*

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы – дать краткое представление об основных фермионных конструкциях, которые возникают при изучении соответствия между задачами теории изомонодромных деформаций и двумерными конформными теориями поля (CFT), для некоторого класса этих теорий с расширенной конформной симметрией. Интерес к двумерным CFT с расширенной конформной симметрией возник начиная с пионерской работы [1]. Эти теории с так называемыми W -симметриями обладают многими свойствами обычных CFT, включающими, например, представление через свободные поля [2], [3], которое оказывается особенно простым в случае целых центральных зарядов Вирасоро. Однако даже в этом относительно простом случае невозможно построить их W -конформные блоки общего положения [4], на основе которых строятся физические корреляционные функции в рамках подхода конформного бутстрапа [5].

Интерес к таким теориям был значительно поддержан в нашем столетии достаточно нетривиальным соответствием между двумерной CFT и четырехмерной суперсимметричной калибровочной теорией [6]–[9], согласно которому конформные блоки должны отвечать инстантонным статистическим суммам Некрасова [10], дающим в квазиклассическом пределе препотенциалы Виттена–Зайберга [11]. Данное соответствие испытывает серьезные проблемы за рамками $SU(2)$ /вирасоровского уровня: как на стороне четырехмерной калибровочной теории, так и на стороне двумерной CFT. К этим трудностям можно подходить с разных сторон, например, в работе [12] мы показали, что точные конформные блоки для твист-полей [13] в теориях с W -симметрией могут быть вычислены с использованием техники, развитой ранее в работах [14]–[16].

В настоящей работе мы представляем другой подход к изучению вершинных операторов в CFT с расширенной конформной симметрией, основанный на представлении свободными фермионами. Достаточно очевидно, что эта конструкция должна работать (по крайней мере) в случае целых центральных зарядов, когда она неразрывно связана с недавно установленным в этом случае соответствием CFT/изомонодромия [17], [18]. Мы обсуждаем операторный состав таких теорий с нетривиальными свойствами монодромии, а затем переходим к вычислению матричных элементов общих монодромных операторов. Наконец, мы демонстрируем связь этих матричных элементов с тау-функциями двух различных задач, а именно с тау-функциями многокомпонентных классических иерархий типа цепочки Тоды [19] и с тау-функциями изомонодромных деформаций [20].

Мы очень рады представить эту работу в специальный выпуск, посвященный 75-летию Игоря Викторовича Тютина. Мы знаем Игоря Викторовича как безусловно лучшего специалиста во многих вопросах квантовой теории поля, и нам хотелось бы отметить, что в его курсе “Конформная теория поля из квантовой теории поля” было много пересечений с идеями, которые развиваются в настоящей работе. Один из авторов (А. М.) также помнит Игоря как самого активного участника специального семинара по интегрируемым системам в ФИАНе, на котором, в частности, интенсивно обсуждалось фермионное представление тау-функций. Мы надеемся получить отклик от Игоря Викторовича на обсуждающиеся ниже фермионные конструкции.

2. АБЕЛЕВА $U(1)$ -ТЕОРИЯ

2.1. Фермионы и вершинные операторы. Введем стандартные двумерные голоморфные фермионные поля с действием

$$S = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} d^2 z \tilde{\psi} \partial \psi,$$

так что

$$\tilde{\psi}(z)\psi(z') = \frac{1}{z-z'} + \dots \quad (2.1)$$

или

$$\begin{aligned} \{\psi_r, \tilde{\psi}_s\} &= \delta_{r+s,0}, \quad r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \\ \psi(z) &= \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \frac{\psi_r}{z^{r+1/2}}, \quad \tilde{\psi}(z) = \sum_{s \in \mathbb{Z}+1/2} \frac{\tilde{\psi}_s}{z^{s+1/2}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

с разложением по полуцелым модам. Формулы бозонизации имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(z) &= :e^{i\phi(z)}: = \exp\left\{-\sum_{n<0} \frac{J_n}{n} z^{-n}\right\} \exp\left\{-\sum_{n>0} \frac{J_n}{n} z^{-n}\right\} e^{Q} z^{J_0}, \\ \psi(z) &= :e^{-i\phi(z)}: = \exp\left\{\sum_{n<0} \frac{J_n}{n} z^{-n}\right\} \exp\left\{\sum_{n>0} \frac{J_n}{n} z^{-n}\right\} e^{-Q} z^{-J_0}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$J(z) = :\tilde{\psi}(z)\psi(z): = i \partial \phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n}{z^{n+1}}, \quad (2.4)$$

$$[J_n, J_m] = n \delta_{n+m,0}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad [J_n, Q] = \delta_{n,0},$$

а нормальное упорядочение означает, что все отрицательные моды находятся слева от положительных и операторы Q слева от J_0 .

Рассмотрим теперь общие вершинные операторы для бозонных полей

$$\begin{aligned} V_{\nu}(z) &= :e^{i\nu\phi(z)}: = \exp\left\{-\nu \sum_{n<0} \frac{J_n}{n} z^{-n}\right\} \exp\left\{-\nu \sum_{n>0} \frac{J_n}{n} z^{-n}\right\} e^{\nu Q} z^{\nu J_0} \equiv \\ &\equiv V_{\nu}^{-}(z) V_{\nu}^{+}(z) e^{\nu Q} z^{\nu J_0}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

которые удовлетворяют очевидным соотношениям, вытекающим из формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа:

$$\begin{aligned} V_{\alpha}^{+}(z) V_{\beta}^{-}(w) &= \left(1 - \frac{w}{z}\right)^{\alpha\beta} V_{\beta}^{-}(w) V_{\alpha}^{+}(z), \\ V_{\alpha}(z) V_{\beta}(w) &= \left(\frac{z}{w}\right)^{\alpha\beta} \left(1 - \frac{w}{z}\right)^{\alpha\beta} \left(1 - \frac{z}{w}\right)^{-\alpha\beta} V_{\beta}(w) V_{\alpha}(z). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Также можно записать равенство

$$V_{\alpha}(z) V_{\beta}(w) = (z-w)^{\alpha\beta} :V_{\alpha}(z) V_{\beta}(w):. \quad (2.7)$$

Поскольку вершинные операторы содержат множитель $e^{\nu Q}$, они сдвигают вакуумный заряд,

$$V_\nu(z): \mathcal{H}^\sigma \rightarrow \mathcal{H}^{\sigma+\nu}, \quad (2.8)$$

когда действуют на сектор гильбертова пространства

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\sigma} \mathcal{H}^{\sigma}, \quad (2.9)$$

отвечающего фиксированному значению этого заряда. Отметим, что мы пока не налагаем никаких ограничений на вещественные (или даже комплексные) значения вакуумных зарядов σ .

Гильбертово пространство $\mathcal{H}^\sigma$ строится путем действия отрицательных бозонных генераторов $J_{-n_1} \dots J_{-n_k} |\sigma\rangle$ на вакуумный вектор $J_0 |\sigma\rangle = \sigma |\sigma\rangle$, и получающиеся состояния могут быть индексированы диаграммами Юнга с длинами строк $n_1, \dots, n_k$.

Можно также построить действие фермионных операторов в этом векторном пространстве. При этом формулы бозонизации (2.3) в общем случае приводят к появлению дробных степеней голоморфной координаты z из-за множителей z^{J_0} , в то время как $e^{\pm Q}$ просто сдвигает вакуумный заряд на ± 1 . Это означает, что можно определить (многократное) действие мод операторов

$$\psi^\sigma(z) = \sum_r \frac{\psi_r^\sigma}{z^{r+1/2+\sigma}}, \quad \tilde{\psi}^\sigma(z) = \sum_r \frac{\tilde{\psi}_r^\sigma}{z^{r+1/2-\sigma}} \quad (2.10)$$

в прямой сумме гильбертовых пространств

$$\mathcal{H}^\sigma = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_n^\sigma, \quad (2.11)$$

естественно нумеруемой некоторым дробным зарядом $\sigma \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

В каждом из пространств $\mathcal{H}_n^\sigma$ базис может быть составлен из векторов, отвечающих комбинации фермионных мод с нулевым зарядом. Как и в бозонном случае, эти векторы могут быть пронумерованы диаграммами Юнга,

$$|Y, \sigma\rangle = \prod_i \tilde{\psi}_{-p_i}^\sigma \psi_{-q_i}^\sigma |\sigma\rangle, \quad (2.12)$$

так что p_i и q_i – координаты Фробениуса на диаграмме Юнга. По нашему соглашению они являются полуцелыми, и могут быть легко определены с помощью следующей картинки:

Для этого следует просто разрезать диаграмму по главной диагонали и определить площади полученных строк и столбцов, включающих половинки диагональных клеток. Например, для диаграммы Юнга, изображенной на рисунке, получим

$$\{p_i\} = \left\{ \frac{9}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right\}, \quad \{q_i\} = \left\{ \frac{9}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right\}. \quad (2.13)$$

Состояния в двойственном к $\mathcal{H}^\sigma$ модуле можно получить с помощью эрмитова сопряжения:

$$\langle \sigma, Y | = \langle \sigma | \prod_i \tilde{\psi}_{q_i}^\sigma \psi_{p_i}^\sigma. \quad (2.14)$$

В дальнейшем нашей целью будет вычисление матричных элементов

$$Z(\nu | Y', Y) = \langle \theta + \nu, Y' | V_\nu(1) | Y, \theta \rangle \quad (2.15)$$

оператора $V_\nu(1) = V_\nu$ между произвольными фермионными состояниями. Наиболее прямым способом сделать это является использование бозонного представления (2.5) вершинного оператора:

$$\begin{aligned} Z(\nu | Y', Y) &= \langle \sigma + \nu | \prod_j \tilde{\psi}_{q'_j} \psi_{p'_j} V_\nu^- V_\nu^+ e^{\nu Q} \prod_i \tilde{\psi}_{-p_i} \psi_{-q_i} | \sigma \rangle = \\ &= \langle 0 | \prod_j V_{-\nu}^- \tilde{\psi}_{q'_j} V_\nu^- \cdot V_{-\nu}^- \psi_{p'_j} V_\nu^- \prod_i V_\nu^+ \tilde{\psi}_{-p_i} V_{-\nu}^+ \cdot V_\nu^+ \psi_{-q_i} V_{-\nu}^+ | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \prod_j (V_\nu^-)^{-1} \tilde{\psi}_{q'_j} V_\nu^- \cdot (V_\nu^-)^{-1} \psi_{p'_j} V_\nu^- \prod_i V_\nu^+ \tilde{\psi}_{-p_i} (V_\nu^+)^{-1} \cdot V_\nu^+ \psi_{-q_i} (V_\nu^+)^{-1} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из формул (2.3) и (2.5) легко понять, что последовательные тройные произведения операторов в (2.16) можно рассматривать как некоторое присоединенное действие или попросту сопряжение фермионов, переходящих при таком действии в свои линейные комбинации. На уровне производящих функций это принимает вид

$$\begin{aligned} V_\nu^+ \tilde{\psi}(z) (V_\nu^+)^{-1} &= (1 - z)^\nu \tilde{\psi}(z), & V_\nu^+ \psi(z) (V_\nu^+)^{-1} &= (1 - z)^{-\nu} \psi(z), \\ (V_\nu^-)^{-1} \tilde{\psi}(z) V_\nu^- &= \left(1 - \frac{1}{z}\right)^\nu \tilde{\psi}(z), & (V_\nu^-)^{-1} \psi(z) V_\nu^- &= \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-\nu} \psi(z) \end{aligned} \quad (2.17)$$

или, в большей общности,

$$\begin{aligned} V_\nu^{-1}(w) \tilde{\psi}^{\sigma+\nu}(z) V_\nu(w) &= \left(\frac{z}{w}\right)^\nu \exp\left\{\nu \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \frac{z^n}{w^n}\right\} \tilde{\psi}^\sigma(z), \\ V_\nu^{-1}(w) \psi^{\sigma+\nu}(z) V_\nu(w) &= \left(\frac{z}{w}\right)^{-\nu} \exp\left\{-\nu \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \frac{z^n}{w^n}\right\} \psi^\sigma(z), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где формальные ряды в правой части могут быть переписаны с помощью преобразования Фурье в виде

$$\exp\left\{\nu \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \frac{z^n}{n}\right\} = \frac{\sin \pi \nu}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{z^k}{k + \nu}. \quad (2.19)$$

Это частный случай преобразований из группы $GL(\infty)$, реализованной с помощью преобразований

$$\sum a_{rs} : \tilde{\psi}_{-r} \psi_s : \in \mathfrak{gl}(\infty), \quad a_{rs} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad |r - s| \rightarrow \infty, \quad (2.20)$$

и, более того, отвечающий случаю $a_{rs} = a_{r-s}$ (хорошо известный пример такого преобразования генерируется токами $J_n = \sum_r : \tilde{\psi}_r \psi_{n-r} :$ из (2.4)). Это верно и в самом общем случае: при вычислении любых матричных элементов такого оператора

они всегда могут быть выражены через элементы только с двумя дополнительными вставками фермионов, следовательно, нам необязательно знать явный вид оператора $V_\nu = V_\nu^- V_\nu^+$ – достаточно лишь самого факта присоединенного действия. Мы воспользуемся этим свойством ниже в более сложном неабелевом случае.

В частности, можно вычислить элемент (2.16), сначала воспользовавшись теоремой Вика,

$$Z(\nu|Y', Y) = \det \begin{pmatrix} \langle \sigma + \nu | \tilde{\psi}_{q'_j} \psi_{p'_j} V_\nu | \sigma \rangle & \langle \sigma + \nu | \tilde{\psi}_{q'_j} V_\nu \psi_{-q_i} | \sigma \rangle \\ -\langle \sigma + \nu | \psi_{p'_j} V_\nu \tilde{\psi}_{-p_i} | \sigma \rangle & \langle \sigma + \nu | V_\nu \tilde{\psi}_{-p_i} \psi_{-q_i} | \sigma \rangle \end{pmatrix} = \det G_\nu, \quad (2.21)$$

а потом уже применить соотношение (2.17) к матричным элементам в (2.21).

2.2. Матричные элементы и функции Некрасова. Матричные элементы матрицы $G = G_\nu$ с двумя фермионными вставками (ее строки нумеруются числами $\{x_a\} = \{q'_j\} \cup \{-p_i\}$, а столбцы – числами $\{y_b\} = \{p'_j\} \cup \{-q_i\}$, где p и q являются полуцелыми и положительными) имеют вид

$$\begin{aligned} G(q', p') &= \langle 0 | \psi_{q'} \tilde{\psi}_{p'} V_\nu^- | 0 \rangle = \sum_{m=0}^{q'-1/2} \frac{(\nu)_m}{m!} \frac{(-\nu)_{p'+q'-m}}{(p' + q' - m)!}, \\ G(-p, -q) &= \langle 0 | V_\nu^+ \psi_{-p} \tilde{\psi}_{-q} | 0 \rangle = \sum_{n=0}^{q-1/2} \frac{(-\nu)_n}{n!} \frac{(\nu)_{p+q-n}}{(p + q - n)!}, \\ G(-p, p') &= -\langle 0 | \tilde{\psi}_{p'} V_\nu^- V_\nu^+ \psi_{-p} | 0 \rangle = -\sum_{m=0}^{p'-1/2} \frac{(-\nu)_m}{m!} \frac{(\nu)_{m+p-p'}}{(m + p - p')!}, \\ G(q', -q) &= \langle 0 | \psi_{q'} V_\nu^- V_\nu^+ \tilde{\psi}_{-q} | 0 \rangle = \sum_{n=0}^{q-1/2} \frac{(-\nu)_n}{n!} \frac{(\nu)_{n+q'-q}}{(n + q' - q)!}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $(\nu)_0 = 1$, $(\nu)_m = \nu(\nu+1) \dots (\nu+m-1)$, а для сумм в правых частях существуют явные формулы

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^b \frac{(\nu)_m}{m!} \frac{(-\nu)_{a-m}}{(a-m)!} &= \frac{(\nu)_{b+1} (-\nu)_{a-b}}{\nu a b! (a-b-1)!}, \\ \sum_{m=0}^b \frac{(-\nu)_m}{m!} \frac{(\nu)_{a+m}}{(a+m)!} &= -\frac{(-\nu)_{b+1} (\nu)_{a+b+1}}{\nu(a+\nu) b! (a+b)!}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

которые легко доказать по индукции. Элементы (2.22) легко вычислить, воспользовавшись присоединенным действием (2.17) для компонент

$$\begin{aligned} V_\nu^+ \psi_{-p} (V_\nu^+)^{-1} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\nu)_m}{m!} \psi_{-p+m}, & V_\nu^+ \tilde{\psi}_{-q} (V_\nu^+)^{-1} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_m}{m!} \tilde{\psi}_{-q+m}, \\ (V_\nu^-)^{-1} \psi_q V_\nu^- &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\nu)_m}{m!} \psi_{q-m}, & (V_\nu^-)^{-1} \tilde{\psi}_p V_\nu^- &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_m}{m!} \tilde{\psi}_{p-m}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Это позволяет записать матричные элементы (2.22) в факторизованном виде:

$$\begin{aligned}
 G(q', p') &= \frac{1}{\nu(p' + q')} \frac{(\nu)_{q'+1/2}(-\nu)_{p'+1/2}}{(q' - 1/2)!(p' - 1/2)!}, \\
 G(-p, -q) &= -\frac{1}{\nu(p + q)} \frac{(\nu)_{p+1/2}(-\nu)_{q+1/2}}{(p - 1/2)!(q - 1/2)!}, \\
 G(-p, p') &= \frac{1}{\nu(p - p' + \nu)} \frac{(\nu)_{p+1/2}(-\nu)_{p'+1/2}}{(p - 1/2)!(q' - 1/2)!}, \\
 G(q', -q) &= -\frac{1}{\nu(q' - q + \nu)} \frac{(\nu)_{q'+1/2}(-\nu)_{q+1/2}}{(q - 1/2)!(q' - 1/2)!}.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Следовательно, определитель из формулы (2.21) можно переписать как

$$\begin{aligned}
 \det_{a,b} G(x_a, y_b) &= \\
 &= \prod_j \frac{(-\nu)_{p'_j+1/2}(\nu)_{q'_j+1/2}}{\nu(p'_j - 1/2)!(q'_j - 1/2)!} \prod_i \frac{(\nu)_{p_i+1/2}(-\nu)_{q_i+1/2}}{\nu(p_i - 1/2)!(q_i - 1/2)!} \cdot \det_{a,b} \tilde{G}(\tilde{x}_a, \tilde{y}_b),
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

где для двух новых наборов $\{\tilde{x}_a\} = \{q'_j\} \cup \{-p_i - \nu\}$ и $\{\tilde{y}_b\} = \{-p'_j\} \cup \{q_i - \nu\}$

$$\tilde{G}(\tilde{x}_a, \tilde{y}_b) = \frac{\text{sgn}(\tilde{x}_a \tilde{y}_b)}{\tilde{x}_a - \tilde{y}_b}, \tag{2.27}$$

а соответствующий детерминант может быть вычислен с помощью формулы Коши:

$$\det_{a,b} \frac{1}{\tilde{x}_a - \tilde{y}_b} = \frac{\prod_{a < b} (\tilde{x}_a - \tilde{x}_b) \prod_{a > b} (\tilde{y}_a - \tilde{y}_b)}{\prod_{a,b} (\tilde{x}_a - \tilde{y}_b)}.$$

В результате окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 Z(\nu|Y', Y) &= \pm \prod_j \frac{(-\nu)_{p'_j+1/2}(\nu)_{q'_j+1/2}}{\nu(p'_j - 1/2)!(q'_j - 1/2)!} \prod_i \frac{(\nu)_{p_i+1/2}(-\nu)_{q_i+1/2}}{\nu(p_i - 1/2)!(q_i - 1/2)!} \times \\
 &\times \frac{\prod_{i > j} (p'_i - p'_j) \prod_{i < j} (p_i - p_j) \prod_{i > j} (q'_i - q'_j) \prod_{i < j} (q_i - q_j)}{\prod_{i,j} (p'_i + q'_j) \prod_{i,j} (p_i + q_j) \prod_{i,j} (q'_i - q_j + \nu) \prod_{i,j} (p_i - p'_j + \nu)} \times \\
 &\times \prod_{i,j} (q'_i + p_j + \nu) \prod_{i,j} (p'_i + q_j - \nu).
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Легко видеть, что полученное выражение имеет структуру

$$Z(\nu|Y', Y) = \pm \frac{Z_b(\nu|Y', Y)}{Z_0^{1/2}(Y') Z_0^{1/2}(Y)}, \tag{2.29}$$

где

$$Z_0^{1/2}(Y) = \prod_i (p_i - 1/2)!(q_i - 1/2)! \frac{\prod_{i,j} (p_i + q_j)}{\prod_{i < j} (q_i - q_j) \prod_{i < j} (p_i - p_j)}, \tag{2.30}$$

в то время как

$$\begin{aligned}
 Z_b(\nu|Y', Y) &= \prod_i \nu^{-1}(-\nu)_{p'_i+1/2}(\nu)_{q'_i+1/2} \prod_j \nu^{-1}(-\nu)_{q_j+1/2}(\nu)_{p_j+1/2} \times \\
 &\times \frac{\prod_{i,j} (q'_i + p_j + \nu) \prod_{i,j} (p'_i + q_j - \nu)}{\prod_{i,j} (q'_i - q_j + \nu) \prod_{i,j} (p'_i - p_j - \nu)}.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

В этой нормировке легко проверить, что функция

$$Z_b(\nu|Y', Y) = \pm \prod_{t \in Y} (1 + a_Y(t) + l_{Y'}(t) + \nu) \prod_{s \in Y'} (1 + a_{Y'}(s) + l_Y(s) - \nu) \quad (2.32)$$

является буквально функцией Некрасова для бифундаментальной материи в калибровочной $U(1)$ -теории при $c = 1$ или $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$. Заметим также, что

$$Z_b(0|Y, Y) = Z_0^{1/2}(Y) Z_0^{1/2}(Y) = \prod_{s \in Y} (1 + a_Y(s) + l_Y(s))^2 = Z_V^{-1}(Y) \quad (2.33)$$

представляет собой функцию Некрасова для чистой калибровочной $U(1)$ -теории, отвечающую мере Планшереля на разбиениях [6].

2.3. Проблема Римана–Гильберта. Для обобщений крайне полезно следующее простое наблюдение. Рассмотрим коррелятор

$$\langle \theta | V_\nu(1) \tilde{\psi}^\sigma(z) \psi^\sigma(w) | \sigma \rangle = \delta_{\theta, \sigma + \nu} \frac{z^\sigma w^{-\sigma} (1-z)^\nu (1-w)^{-\nu}}{z-w}, \quad (2.34)$$

который легко вычисляется с помощью правил бозонизации (2.3). Далее, величина

$$(z-w) \langle \theta | V_\nu(1) \tilde{\psi}^\sigma(z) \psi^\sigma(w) | \sigma \rangle = \phi(z) \phi^{-1}(w) \quad (2.35)$$

выражается через решения простой линейной системы

$$\frac{d\phi(z)}{dz} = \phi(z) \left(\frac{\sigma}{z} + \frac{\nu}{z-1} \right). \quad (2.36)$$

Это означает, что данную линейную систему можно использовать, чтобы определить все матричные элементы с двумя фермионами, например, в области $1 > |z| > |w|$:

$$\langle \theta | V_\nu(1) \tilde{\psi}^\sigma(z) \psi^\sigma(w) | \sigma \rangle = \sum_{p,q} \frac{1}{z^{p+1/2-\sigma} w^{q+1/2+\sigma}} \langle \theta | V_\nu(1) \tilde{\psi}_p^\sigma \psi_q^\sigma | \sigma \rangle. \quad (2.37)$$

Вместе с теоремой Вика это определяет все матричные элементы или сам оператор V_ν однозначно с точностью до численного множителя. В свою очередь линейная система определяется свойствами монодромии (в данном случае очень простыми) решения $\phi(z)$ при $z = 0$ и $z = 1$ (а также связанной с ними монодромией в точке $z = \infty$). Таким образом, нахождение корреляционных функций с двумя фермионами можно свести к решению задачи Римана–Гильберта.

2.4. Замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Формулы (2.28), (2.31) дают явное представление для матричных элементов и бифундаментальных функций Некрасова через координаты Фробениуса соответствующих диаграмм Юнга (это представление, например, гораздо проще для практических вычислений, нежели формулы (2.32)). Однако часто достаточно сложно заметить, что эти формулы обладают рядом простых свойств: скажем, они удовлетворяют “правилам сумм” типа

$$\begin{aligned} \sum_Y t^{|Y|} \frac{Z_b(\alpha_1 | \emptyset, Y) Z_b(\alpha_2 | Y, \emptyset)}{Z_0(Y)} &= \sum_Y t^{|Y|} Z(\alpha_1 | \emptyset, Y) Z(\alpha_2 | Y, \emptyset) = \\ &= \sum_Y t^{|Y|} \langle 0 | e^{i\alpha_1 \phi(1)} | Y, 0 \rangle \langle Y, 0 | e^{i\alpha_2 \phi(1)} | 0 \rangle = (1-t)^{\alpha_1 \alpha_2}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где ответ в правой части сразу следует из разложения единицы и коррелятора двух экспонент

$$\langle 0 | e^{i\alpha_1 \phi(1)} e^{i\alpha_2 \phi(t)} | 0 \rangle = (1-t)^{\alpha_1 \alpha_2}. \quad (2.39)$$

Эти свойства весьма поучительно сравнить с вычислениями из работ [21], [22].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно также извлечь достаточно полезную информацию из частных случаев равенства (2.34), которые включают красивое тождество (ср. с работами [7] и [8])

$$\frac{(1-z)^\nu (1-w)^{-\nu}}{z-w} = \frac{1}{z-w} + \sum_{a,b=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_{a+1} (\nu)_{b+1}}{(a+b+1)\nu a! b!} z^a w^b, \quad (2.40)$$

содержащее некоторую часть матричных элементов (2.25).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Согласно соотношению (2.7)

$$\tilde{\psi}(z+t/2)\psi(z-t/2) = \frac{1}{t} : \exp \left\{ \int_{z-t/2}^{z+t/2} d\xi J(\xi) \right\} :. \quad (2.41)$$

Разложение по степеням t дает бесконечный ряд токов алгебры $W_{1+\infty}$:

$$\begin{aligned} :\tilde{\psi}(z+t/2)\psi(z-t/2): &= \frac{1}{t} : \left(\exp \left\{ \int_{z-t/2}^{z+t/2} d\xi J(\xi) \right\} - 1 \right) : = \\ &= \sum_{k>0} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} U_k(z), \end{aligned} \quad (2.42)$$

где в явном виде

$$U_1(z) = J(z), \quad U_2 = \frac{1}{2} : J^2(z) :, \quad U_3 = \frac{1}{3} \left(: J^3(z) : + \frac{1}{4} \partial^2 J(z) \right), \quad \dots \quad (2.43)$$

и подразумевается бозонное нормальное упорядочение для бозонов и фермионное для фермионов. Эти формулы были использованы неоднократно (см., например, работы [6], [7], [23]–[25]) для того, чтобы связать генераторы алгебры $W_{1+\infty}$ с операторами, билинейными по фермионам. Мы хотели бы напомнить о них здесь с целью дальнейшего обобщения в гораздо менее тривиальном неабелевом случае.

3. НЕАБЕЛЕВА $U(N)$ -ТЕОРИЯ

3.1. Функции Некрасова. Рассмотрим теперь более общий случай функций Некрасова, отвечающий неабелевой теории с группой $U(N)$. Их можно выразить через функции (2.31), (2.32) $U(1)$ -теории с помощью следующей формулы произведений:

$$\widehat{Z}_b(\theta', \nu, \theta | \mathbf{Y}', \mathbf{Y}) = \prod_{\alpha, \beta=1}^N Z_b(\nu - \theta'_\alpha + \theta_\beta | Y'_\alpha, Y_\beta). \quad (3.1)$$

Для диагональных элементов $\widehat{Z}_0(\theta | \mathbf{Y}) = \widehat{Z}_b(\theta, 0, \theta | \mathbf{Y}, \mathbf{Y})$ получаем

$$\widehat{Z}_0(\theta | \mathbf{Y}) = \prod_{\alpha, \beta=1}^N Z_b(-\theta_\alpha + \theta_\beta | Y_\alpha, Y_\beta) = \pm \prod_{i < j} Z_b^2(-\theta_\alpha + \theta_\beta | Y_\alpha, Y_\beta) \prod_{\alpha} Z_0(Y_\alpha) \quad (3.2)$$

или, после взятия квадратного корня, просто

$$\hat{Z}_0^{1/2}(\theta|Y) = \prod_{\alpha < \beta} Z_b(-\theta_\alpha + \theta_\beta|Y_\alpha, Y_\beta) \prod_{\alpha} Z_0^{1/2}(Y_\alpha). \quad (3.3)$$

Для простоты лучше сделать замену $\theta'_\alpha - \nu \mapsto \theta'_\alpha$ или $\theta_\alpha + \nu \mapsto \theta_\alpha$, и тогда зависимость от ν в формулах (3.1) пропадает.

Рассмотрим теперь нормированный матричный элемент

$$\begin{aligned} \hat{Z}(\theta', \theta|Y', Y) &= \frac{\hat{Z}_b(\theta', \theta|Y', Y)}{\hat{Z}_0^{1/2}(\theta'|Y')\hat{Z}_0^{1/2}(\theta|Y)} = \\ &= \frac{\prod_{\alpha, \beta=1}^N Z_b(-\theta'_\alpha + \theta_\beta|Y'_\alpha, Y_\beta)}{\prod_{\alpha < \beta} Z_b(-\theta_\alpha + \theta_\beta|Y_\alpha, Y_\beta) \prod_{\alpha} Z_0^{1/2}(Y_\alpha) \prod_{\alpha < \beta} Z_b(-\theta'_\alpha + \theta'_\beta|Y'_\alpha, Y'_\beta) \prod_{\alpha} Z_0^{1/2}(Y'_\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Используя представление (2.28), (2.31) для $U(1)$ -функций в координатах Фробениуса, можно заметить, что отношение произведений элементарных детерминантов Коши на самом деле объединяется в более сложный единый детерминант Коши,

$$\begin{aligned} \hat{Z}(\theta', \theta|Y', Y) &= \\ &= \det \frac{1}{\prod_{I,J} x_I - y_J} \prod_{i,\alpha} f_{1,\alpha}(\theta', \theta, p'_{\alpha,i}) f_{2,\alpha}(\theta', \theta, q'_{\alpha,i}) f_{1,\alpha}(\theta, \theta', p_{\alpha,i}) f_{2,\alpha}(\theta, \theta', q_{\alpha,i}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

с двумя мультинаборами входящих в определитель переменных

$$\{x_i\} = \{-q'_{\alpha,i} - \theta'_\alpha\} \cup \{p_{\alpha,i} - \theta_\alpha\}, \quad \{y_I\} = \{p'_{\alpha,i} - \theta'_\alpha\} \cup \{-q_{\alpha,i} - \theta_\alpha\} \quad (3.6)$$

с точностью до вполне нетривиальной диагональной части, которая, впрочем, также извлекается из формул (2.28) и (3.4). Эта диагональная часть приводит к следующим множителям в (3.5):

$$\begin{aligned} f_{1,\alpha}(\theta, \theta', p_{\alpha,i}) &= \frac{1}{(p_{\alpha,i} - 1/2)!} \prod_{\beta} \frac{(\theta'_\beta - \theta_\alpha)_{p_{\alpha,i}+1/2}}{\sqrt{\theta'_\beta - \theta_\alpha}} \prod_{\beta \neq \alpha} \frac{\sqrt{\theta_\beta - \theta_\alpha}}{(\theta_\beta - \theta_\alpha)_{p_{\alpha,i}+1/2}}, \\ f_{2,\alpha}(\theta, \theta', q_{\alpha,i}) &= \frac{1}{(q_{\alpha,i} - 1/2)!} \prod_{\beta} \frac{(\theta_\alpha - \theta'_\beta)_{q_{\alpha,i}+1/2}}{\sqrt{\theta_\alpha - \theta'_\beta}} \prod_{\beta \neq \alpha} \frac{\sqrt{\theta_\alpha - \theta_\beta}}{(\theta_\alpha - \theta_\beta)_{q_{\alpha,i}+1/2}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Детерминантная формула (3.5) чрезвычайно важна, так как из нее следует, что функции Некрасова $\hat{Z}(\theta', \theta|Y', Y)$ можно отождествить с матричными элементами некоторого вершинного оператора, который характеризуется, как и в абелевом случае группы $U(1)$, своим присоединенным действием, являющимся по-прежнему линейным преобразованием, но теперь уже N -компонентных фермионов. Ниже мы определим этот оператор, используя теорию (N -компонентных) свободных фермионов, путем обобщения рассмотренного выше абелева случая. В общем случае данный оператор задается как решение вспомогательной линейной задачи на сфере с тремя отмеченными точками, а явные формулы этого раздела отвечают случаю решениям гипергеометрического типа.

3.2. N -компонентные свободные фермионы. Рассмотрим обобщение конструкции свободных фермионов со случая группы $U(1)$ на неабелеву теорию с группой $U(N)$. Первым делом определим алгебру

$$\begin{aligned} \{\psi_{\alpha,r}, \psi_{\beta,s}\} &= 0, & \{\tilde{\psi}_{\alpha,r}, \tilde{\psi}_{\beta,s}\} &= 0, & \{\tilde{\psi}_{\alpha,r}, \psi_{\beta,s}\} &= \delta_{\alpha,\beta} \delta_{r+s,0}, \\ r, s &\in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, & \alpha, \beta &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.8)$$

канонических антикоммутиационных соотношений для компонент фермионных полей с действием первого порядка

$$S = \frac{1}{\pi} \sum_{\alpha=1}^N \int_{\Sigma} d^2 z \tilde{\psi}_{\alpha} \partial \psi_{\alpha},$$

так что соотношения (3.8) эквивалентны операторным разложениям

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\alpha}(z) \psi_{\beta}(w) &= \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{z-w} + J_{\alpha\beta}(w) + O(z-w), \\ \psi_{\alpha}(z) \psi_{\beta}(w) &= \text{reg}, & \tilde{\psi}_{\alpha}(z) \tilde{\psi}_{\beta}(w) &= \text{reg}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Аналогично (2.3) возможно и полезно определить формулы бозонизации для этих фермионных полей:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\alpha}(z) &= \exp \left\{ - \sum_{n < 0} \frac{J_{\alpha,n}}{nz^n} \right\} \exp \left\{ - \sum_{n > 0} \frac{J_{\alpha,n}}{nz^n} \right\} e^{Q_{\alpha}} z^{J_{\alpha,0}} \epsilon_{\alpha}(\mathbf{J}_0), \\ \psi_{\alpha}(z) &= \exp \left\{ \sum_{n < 0} \frac{J_{\alpha,n}}{nz^n} \right\} \exp \left\{ \sum_{n > 0} \frac{J_{\alpha,n}}{nz^n} \right\} e^{-Q_{\alpha}} z^{-J_{\alpha,0}} \epsilon_{\alpha}(\mathbf{J}_0). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь $J_{\alpha,n}$ образуют алгебру Гейзенберга

$$[J_{\alpha,n}, J_{\beta,m}] = n \delta_{\alpha,\beta} \delta_{m+n,0}, \quad [J_{0,\alpha}, Q_{\beta}] = \delta_{\alpha,\beta}, \quad (3.11)$$

а $\epsilon_{\alpha}(\mathbf{J}_0) = \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} (-1)^{J_{0,\beta}}$. Можно также заметить, что $\epsilon_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \epsilon_{\alpha}(\mathbf{x}) \epsilon_{\beta}(\mathbf{y})$. Эти дополнительные знаковые множители играют роль преобразований Йордана–Вигнера: превращают коммутирующие объекты в антикоммутирующие.

Стандартное представление этой алгебры $\mathcal{H}^{\sigma}$ строится из вакуумного вектора $|\sigma\rangle$ с зарядами $\mathbf{J}_0|\sigma\rangle = \sigma|\sigma\rangle$, который обращается в ноль под действием всех положительных мод:

$$\psi_{\alpha,r}^{\sigma}|\sigma\rangle = 0, \quad \tilde{\psi}_{\alpha,r}^{\sigma}|\sigma\rangle = 0 \quad \text{при } r > 0. \quad (3.12)$$

Базисные векторы этого представления можно выбрать в виде

$$|\{p_{\alpha,i}\}, \{q_{\alpha,i}\}, \sigma\rangle = \prod_{\alpha=1}^N \left(\prod_{i=1}^{|\{p_{\alpha,i}\}|} \tilde{\psi}_{\alpha,-p_{\alpha,i}} \prod_{j=1}^{|\{q_{\alpha,i}\}|} \psi_{\alpha,-q_{\alpha,i}} \right) |\sigma\rangle. \quad (3.13)$$

Величины $p_{\alpha,i}$ и $q_{\alpha,i}$, по крайней мере в случае $|\{p_{\alpha}\}| = |\{q_{\alpha}\}|$, следует интерпретировать как координаты Фробениуса набора из N диаграмм Юнга. В дальнейшем также будет полезно использовать операторы P_{α}^n сдвига вакуума,

$$\begin{aligned} P_{\alpha}^0 &= 1, & P_{\alpha}^n &= \psi_{\alpha,n+1/2}^{\sigma} \psi_{\alpha,n+3/2}^{\sigma} \cdots \psi_{\alpha,-1/2}^{\sigma} |\sigma\rangle, & n < 0, \\ P_{\alpha}^n &= \tilde{\psi}_{\alpha,-n+1/2}^{\sigma} \tilde{\psi}_{\alpha,-n+3/2}^{\sigma} \cdots \tilde{\psi}_{\alpha,-1/2}^{\sigma} |\sigma\rangle, & n > 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

и соответствующие состояния

$$|\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}\rangle = \prod_{\alpha=1}^N P_{\alpha}^{n_{\alpha}} |\boldsymbol{\sigma}\rangle, \quad (3.15)$$

в частности, для векторов $\mathbf{n} = \pm \mathbf{1}_{\beta}$ с компонентами $n_{\alpha} = \pm \delta_{\alpha, \beta}$.

3.3. Алгебры Каца–Мули уровня один и W -алгебры. Рассмотрим W -алгебры для серии $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(N)$ с возможным расширением до $\mathfrak{gl}(N)$; в последнем случае мы будем называть их алгебрами $W_N \oplus H$. Генераторы алгебр в токовом представлении можно отождествить с симметрическими функциями нормально упорядоченных произведений токов $J(z) \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, принимающих значение в подалгебре Картана или эквивалентным образом рассматривать их как некоторые “элементы Казимира” в универсальной обертывающей алгебре $U(\widehat{\mathfrak{gl}(N)}_1)$. Для центрального заряда Вирасоро на уровне $k = 1$ имеем

$$c = \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + C_V} = \frac{N^2 - 1}{1 + N} = N - 1. \quad (3.16)$$

Будучи погруженной в $U(\widehat{\mathfrak{gl}(N)}_1)$, эта алгебра токов имеет изящное представление в терминах многокомпонентных свободных голоморфных фермионных полей

$$J_{\alpha\beta}(z) = :\tilde{\psi}_{\alpha}(z)\psi_{\beta}(z):, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, N. \quad (3.17)$$

Алгебра W_N может быть определена через инвариантные полиномы Казимира из токов, коммутирующих с экранирующими зарядами $Q_{\alpha\beta} = \oint J_{\alpha\beta}(z)$ (достаточно потребовать коммутативности лишь с теми из них, которые отвечают простым положительным корням). Тогда генераторы алгебры превращаются просто в симметрические полиномы от диагональных картановских токов $J_{\alpha} = J_{\alpha\alpha}(z) \in \mathfrak{h}$:

$$W_n(z) = \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_n} :J_{\alpha_1}(z) \dots J_{\alpha_n}(z):, \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.18)$$

Можно построить представления алгебр $U(\widehat{\mathfrak{gl}(N)}_1)$ и $W_N \oplus H$ в пространстве $\mathcal{H}^{\boldsymbol{\sigma}}$. Для этого удобно ввести производящие функции

$$\psi_{\alpha}^{\boldsymbol{\sigma}}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \frac{\psi_{\alpha, r}^{\boldsymbol{\sigma}}}{z^{r+1/2+\sigma_{\alpha}}}, \quad \tilde{\psi}_{\alpha}^{\boldsymbol{\sigma}}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \frac{\tilde{\psi}_{\alpha, r}^{\boldsymbol{\sigma}}}{z^{r+1/2-\sigma_{\alpha}}}, \quad (3.19)$$

где сдвиги степеней координаты z возникают естественным образом, например, из формул бозонизации (3.10). Для этих полей вместо (3.9) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\alpha}^{\boldsymbol{\sigma}}(z)\psi_{\beta}^{\boldsymbol{\sigma}}(w) &= \delta_{\alpha, \beta} \frac{z^{\sigma_{\alpha}} w^{-\sigma_{\alpha}}}{z - w} + :\tilde{\psi}_{\alpha}^{\boldsymbol{\sigma}}(z)\psi_{\beta}^{\boldsymbol{\sigma}}(w): = \\ &= \frac{\delta_{\alpha, \beta}}{z - w} + \delta_{\alpha, \beta} \frac{\sigma_{\alpha}}{w} + :\tilde{\psi}_{\alpha}^{\boldsymbol{\sigma}}(w)\psi_{\beta}^{\boldsymbol{\sigma}}(w): + O(z - w). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Остается нетрудно заметить, что моды тока $J_{\alpha\beta}^{\boldsymbol{\sigma}}(w)$ из (3.9) принимают в этом представлении вид

$$J_{\alpha\beta, n}^{\boldsymbol{\sigma}} = \delta_{\alpha, \beta} \delta_{n, 0} \sigma_{\alpha} + \sum_{p \in \mathbb{Z}+1/2} :\tilde{\psi}_{\alpha, n-p}^{\boldsymbol{\sigma}} \psi_{\beta, p}^{\boldsymbol{\sigma}}: . \quad (3.21)$$

Как и в случае алгебры $U(1)$ (см. соотношение (2.42)), в фермионной реализации алгебры $W_N \oplus H$ генераторы можно выбрать в билинейном по фермионам виде:

$$\sum_{\alpha} \tilde{\psi}_{\alpha}^{\sigma}(z+t/2) \psi_{\alpha}^{\sigma}(z-t/2) = \frac{N}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} U_k^{\sigma}(z). \quad (3.22)$$

Левая часть этого равенства дает

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\alpha}^{\sigma}(z+t/2) \psi_{\alpha}^{\sigma}(z-t/2) &= \frac{1}{t} \left(\frac{1+t/2z}{1-t/2z} \right)^{\sigma_{\alpha}} + \\ &+ \frac{1}{t} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z^m} \frac{t/z}{(1+t/2z)^{m+1}} \sum_{p \in \mathbb{Z}+1/2} \left(\frac{1+t/2z}{1-t/2z} \right)^{p+1/2+\sigma_{\alpha}} : \tilde{\psi}_{m-p, \alpha}^{\sigma} \psi_{\alpha, p}^{\sigma} :. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Вводя два набора полиномов¹⁾

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+x/2}{1-x/2} \right)^p &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} u_k(p) \frac{x^k}{(k-1)!}, \\ \frac{x}{(1+x/2)^{m+1}} \left(\frac{1+x/2}{1-x/2} \right)^{p+1/2} &= \sum_{k=1}^{\infty} v_{k,m}(p) \frac{x^k}{(k-1)!}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

мы можем записать генераторы в правой части равенства (3.22) в явном виде:

$$U_{k,m}^{\sigma} = \sum_{\alpha} \left(\delta_{m,0} u_k(\sigma_{\alpha}) + \sum_{p \in \mathbb{Z}} v_{k,m}(p + \sigma_{\alpha}) : \tilde{\psi}_{\alpha, m-p}^{\sigma} \psi_{p, \alpha}^{\sigma} : \right). \quad (3.25)$$

Этот набор генераторов алгебры $W_N \oplus H$ содержит коммутирующие нулевые моды $U_{k,0}^{\sigma}$ которые, как хорошо известно, играют важную роль в изучении расширенной теории Виттена–Зайберга и соответствии Алдая–Гайотто–Тачикавы [6], [25]–[27]. Также важно отметить, что коммутационные соотношения между этими генераторами линейны, а нелинейность возникает лишь в соотношениях между самими генераторами.

Используя правила бозонизации (3.10), эти генераторы можно привести к общепринятому виду. Для того чтобы провести явное разложение алгебры в прямую сумму $W_N \oplus H$, полезно переопределить токи как $J_{\alpha}(z) \mapsto J_{\alpha}(z) + j(z)$, где новые токи удовлетворяют соотношению $\sum J_{\alpha} = 0$ и операторным разложениям

$$j(z)j(w) = \frac{1/N}{(z-w)^2} + \text{reg}, \quad J_{\alpha}(z)J_{\beta}(w) = \frac{\delta_{\alpha, \beta} - 1/N}{(z-w)^2} + \text{reg}. \quad (3.26)$$

¹⁾Можно также заметить на уровне производящих функций (3.24), что

$$v_{k,0}(p) = u_k(p+1/2) - u_k(p-1/2).$$

Для младших полиномов приведем явные выражения:

$$u_1(p) = p, \quad u_2(p) = \frac{p^2}{2}, \quad u_3(p) = \frac{p^3}{3} + \frac{p}{6}, \quad u_4(p) = \frac{p^4}{4} + \frac{p^2}{2}, \quad u_5(p) = \frac{p^5}{5} + p^3 + \frac{3p}{10}.$$

Рассмотрим теперь билинейное выражение

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \tilde{\psi}_{\alpha}(z+t/2) \psi_{\alpha}(z-t/2) &= \sum_{\alpha} :e^{i\varphi(z+t/2)+i\phi_{\alpha}(z+t/2)}: :e^{-i\varphi(z-t/2)-i\phi_{\alpha}(z-t/2)}: = \\ &= \frac{1}{t} :e^{i\varphi(z+t/2)-i\varphi(z-t/2)}: \sum_{\alpha} :e^{i\phi_{\alpha}(z+t/2)-i\phi_{\alpha}(z-t/2)}:, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где $j(z) = i\partial\varphi$, $J_{\alpha}(z) = i\partial\phi_{\alpha}(z)$, и разложим его по степеням t . Сравнивая с (3.22), получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} U_1(z) &= Nj(z), \quad U_2(z) = T(z) + \frac{N}{2} :j^2(z):, \\ U_3(z) &= W_3(z) + 2NT(z)j(z) + \frac{N}{3} \left(:j^3(z): + \frac{1}{4} : \partial^2 j(z) : \right), \\ U_4(z) &= -W_4(z) + \frac{1}{2} (TT)(z) + 3W_3(z)j(z) + 3 :j^2(z): T(z) + \\ &\quad + \frac{N}{4} \left(:j^4(z): + :j(z)\partial^2 j(z): \right), \quad \dots, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где $T(z) = -W_2(z)$ представляет собой тензор энергии-импульса, а $(TT)(z)$ обозначает нормальное упорядочение “в теории со взаимодействием”,

$$(T_1 T_2)(z) = \oint_z \frac{dw}{w-z} T_1(w) T_2(z). \quad (3.29)$$

Тем самым один базис связан с другим некоторым сложным, хотя и явным, треугольным преобразованием. Кроме того, мы видим, что генераторы $U_k(z)$ на самом деле зависимы: например, если $N = 3$, то $W_4(z) = 0$ и $U_4(z)$ превращается в выражение, нелинейное относительно младших генераторов.

Легко видеть, что для состояний (3.15)

$$\begin{aligned} J_{\alpha,0}^{\sigma} |n, \sigma\rangle &= (\sigma_{\alpha} + n_{\alpha}) |n, \sigma\rangle, \\ U_{k,0}^{\sigma} |n, \sigma\rangle &= u_k(\sigma + n) |n, \sigma\rangle, \quad U_{k,m}^{\sigma} |n, \sigma\rangle = 0 \quad \text{при } m > 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Иногда оказывается полезным разложить полное гильбертово пространство на секторы с фиксированными зарядами $\mathfrak{h} \in \mathfrak{gl}(N)$ как $\mathcal{H}^{\sigma} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}^N} \mathcal{H}_n^{\sigma}$, а также на секторы с фиксированным полным $u(1) = \mathfrak{gl}(1)$ -зарядом как $\mathcal{H}_l^{\sigma} = \bigoplus_{\sum n_{\alpha} = l} \mathcal{H}_n^{\sigma}$.

Все эти факты обобщает следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пространства $\mathcal{H}_l^{\sigma}$ суть представления алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}(N)}_1$. Для значений σ общего положения пространства $\mathcal{H}_n^{\sigma}$ являются модулями Верма для алгебры $W_N \oplus H$ с векторами старшего веса $|\sigma, n\rangle$ и базисами, заданными векторами $|Y, n, \sigma\rangle$ для всех Y .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очень простое. Генераторы алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}(N)}_1$ имеют нулевой $\mathfrak{gl}_1$ -заряд, генераторы алгебры $W_N \oplus H$ обладают нулевыми $\mathfrak{h}$ -зарядами, поэтому пространства $\mathcal{H}_l^{\sigma}$ и $\mathcal{H}_n^{\sigma}$ замкнуты относительно действия этих алгебр. Мы также знаем из соотношений (3.30) что $|\sigma, n\rangle$ являются векторами старшего веса для $W_N \oplus H$, поэтому можно построить ненулевое отображение из модуля Верма в $\mathcal{H}_n^{\sigma}$. Поскольку модуль Верма в общем случае неприводим и имеет тот же характер $\text{tr } q^{L_0}$, на самом деле это отображение является изоморфизмом.

3.4. Свободные фермионы и представления W -алгебр. Продемонстрируем теперь, как свободные фермионы возникают в теории с W_N -симметрией при целых центральных зарядах после включения дополнительной алгебры Гейзенберга. Приведенная ниже конструкция является прямым обобщением процедуры бозонизации из работы [28].

Хорошо известно [2], [3], что конформная теория с W_N -симметрией содержит два вырожденных поля $V_{\mu_1}(z)$ и $V_{\mu_{N-1}}(z)$ с W -зарядами, определяемыми старшими весами фундаментального ($\mathbf{N}$) и антифундаментального ($\bar{\mathbf{N}}$) представлений соответственно. Размерности этих полей равны

$$\Delta(\mu_i) = \frac{1}{2}\mu_i^2 = \frac{N-1}{2N}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (3.31)$$

и правила слияния с произвольным примарным полем для них имеют следующий вид:

$$[\mu_1] \otimes [\sigma] = \bigoplus_{\alpha=1}^N [\sigma + e_\alpha], \quad [\mu_{N-1}] \otimes [\sigma] = \bigoplus_{\alpha=1}^N [\sigma - e_\alpha], \quad (3.32)$$

где $\{\pm e_\beta\}$ отвечают набору всех весов представлений $\mathbf{N}$ и $\bar{\mathbf{N}}$.

Следовательно, можно определить вершинные операторы

$$\Psi_\alpha(z) = \sum_{\sigma} P_{\sigma+e_\alpha} V_{\mu_1}(z) P_{\sigma}, \quad \tilde{\Psi}_\alpha(z) = \sum_{\sigma} P_{\sigma-e_\alpha} V_{\mu_{N-1}}(z) P_{\sigma}, \quad (3.33)$$

которые из-за дополнительных проекторов действуют между фиксированными модулями Верма, просто выделяя соответствующее слагаемое из правил слияния (3.32). Используя общую структуру операторного разложения двух изначальных вырожденных полей

$$V_{\mu_1}(z)V_{\mu_{N-1}}(w) = (\mathbf{1} \cdot (z-w)^{(1-N)/N} + \text{const} \cdot (z-w)^{(1+N)/N}T(w)) + (z-w)^{1/N} \sum_{\alpha \in \text{roots}(\mathfrak{gl}_N)} c_\alpha V_\alpha(w) + \dots, \quad (3.34)$$

находим, что $\tilde{\Psi}_\alpha(z)\Psi_\beta(w) = \delta_{\alpha,\beta} \mathbf{1} \cdot (z-w)^{(1-N)/N} + \text{reg}$, т. е. эти поля устроены, почти как фермионы, за исключением неправильной степени в операторном разложении. Чтобы исправить это, добавим дополнительное скалярное поле $\phi(z)$ такое, что

$$\phi(z)\phi(w) = -\frac{1}{N} \ln(z-w) + \dots, \quad (3.35)$$

и определим новые, истинно фермионные, вершинные операторы

$$\psi_\alpha(z) = e^{-i\phi(z)}\Psi_\alpha(z), \quad \tilde{\psi}_\alpha(z) = e^{i\phi(z)}\tilde{\Psi}_\alpha(z), \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (3.36)$$

которые обладают уже каноническим операторным разложением (ср. с соотношением (3.9))

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(z)\tilde{\psi}_\beta(w) &= \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{z-w} + \text{reg}, \\ \psi_\alpha(z)\psi_\beta(w) &= \text{reg}, \quad \tilde{\psi}_\alpha(z)\tilde{\psi}_\beta(w) = \text{reg}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Осталось только понять, как выражаются генераторы W -алгебры в терминах этих свободных фермионов. Легко написать выражение для суммы

$$\begin{aligned} (z-w)^{-1/N} \sum_{\alpha} \tilde{\Psi}_{\alpha}(z) \Psi_{\alpha}(w) &= \frac{1}{z-w} + \text{const} \cdot (z-w)(\mathcal{L}_{-2}\mathbf{1})(w) + \\ &+ \text{const}(z-w)^2 \cdot (\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}\mathbf{1}) + \text{const}(z-w)^2 \cdot (\mathcal{W}_{-3}\mathbf{1})(w) + \dots = \\ &= \frac{1}{z-w} + \text{const} \cdot (z-w)T(w) + \text{const} \cdot (z-w)^2 \partial T(w) + \\ &+ \text{const} \cdot (z-w)^2 W(w) + \dots \end{aligned} \quad (3.38)$$

с некоторыми коэффициентами (мы использовали очевидные обозначения для соответствующих потомков). В данный момент нам важны не численные значения этих коэффициентов, а лишь сам факт, что только единичный оператор $\mathbf{1}$ входит в это операторное разложение вместе со своими потомками. Используя также операторное разложение для $U(1)$ -факторов

$$\begin{aligned} (z-w)^{1/N} e^{i\phi(z)} e^{-i\phi(w)} &= \\ &= : \exp \left\{ i(z-w) \partial \phi(w) + \frac{1}{2} i(z-w)^2 \partial^2 \phi(w) + \frac{1}{6} (z-w)^3 \partial^3 \phi(w) \right\} : = \\ &= 1 + (z-w)j(w) + \frac{1}{2} (z-w)^2 \partial j(w) + \frac{1}{6} (z-w)^3 \partial^2 j(w) + \\ &+ \frac{1}{2} (z-w)^2 :j^2(w): + \frac{1}{2} (z-w)^3 :j(w) \partial j(w): + \frac{1}{6} (z-w)^3 j^3(w) + \dots, \end{aligned} \quad (3.39)$$

находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \tilde{\psi}_{\alpha}(z) \psi_{\alpha}(w) &= \frac{1}{z-w} + j(w) + (z-w) \left(\text{const} \cdot T(w) + \frac{1}{2} j(w) + \frac{1}{2} :j^2(w): \right) + \\ &+ (z-w)^2 \left(\text{const} \cdot W(w) + \text{const} \cdot j(w)T(w) + \frac{1}{6} \partial^2 j(w) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} :j(w) \partial j(w): + \frac{1}{6} :j^3(w): \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.40)$$

Полученная формула говорит, что стандартные W -генераторы можно выразить через билинейные комбинации фермионов при помощи некоторого треугольного преобразования, а симметризованный вариант этой формулы в точности отвечает соотношениям (3.27), (3.28).

4. ВЕРШИННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ПРОБЛЕМА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

4.1. Вершинные операторы и монодромии. Перейдем к общей конструкции вершинного оператора

$$V_{\nu}(t): \mathcal{H}^{\sigma} \rightarrow \mathcal{H}^{\theta}, \quad (4.1)$$

определяемого данными монодромии²⁾. На самом деле достаточно определить лишь оператор $V_{\nu}(1)$ и далее использовать конформное тождество Уорда

$$V_{\nu}(t) = t^{-\Delta_{\nu}} t^{L_0} V_{\nu}(1) t^{-L_0}. \quad (4.2)$$

²⁾Теперь у нас имеется только условие сохранения “полного заряда” $\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} + \sum_{\alpha} \nu_{\alpha} = \sum_{\alpha} \theta_{\alpha}$, за исключением этого заряды могут быть произвольными.

Сам оператор $V_\nu(1)$ определяется следующими тремя свойствами.

1. Оператор $V_\nu(1)$ представляет собой (квази)групповой элемент, т. е.

$$V_\nu(1)\mathcal{H}^\sigma(V_\nu(1))^{-1} \subseteq \mathcal{H}^\theta, \quad (V_\nu(1))^{-1}\mathcal{H}^\theta V_\nu(1) \subseteq \mathcal{H}^\sigma.$$

Как мы уже обсуждали в разделе 2, это означает, что все корреляторы фермионов в присутствии такого оператора можно вычислить с помощью теоремы Вика.

2. Имеет место равенство $\langle \theta | V_\nu(1) | \sigma \rangle = 1$, которое фиксирует нормировку некоторым удобным образом. Отметим, однако, что вершинный оператор определен лишь с точностью до некоторого диагонального множителя $S = e^\beta$, $\beta \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(N)$; мы будем при необходимости восстанавливать эти множители.

3. Все корреляторы с двумя фермионами дают решение трехточечной задачи Римана–Гильберта в различных областях

$$\begin{aligned} \langle \theta | V_\nu(1) \tilde{\psi}_\alpha^\sigma(z) \psi_\beta^\sigma(w) | \sigma \rangle &= \mathcal{K}_{\alpha\beta}(z, w), & |z| \leq 1, & |w| \leq 1, \\ \langle \theta | \tilde{\psi}_\alpha^\theta(z) \psi_\beta^\theta(w) V_\nu(1) | \sigma \rangle &= \mathcal{K}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(z, w), & |z| \geq 1, & |w| \geq 1, \\ \langle \theta | \tilde{\psi}_\alpha^\theta(z) V_\nu(1) \psi_\beta^\sigma(w) | \sigma \rangle &= \mathcal{K}_{\dot{\alpha}\beta}(z, w), & |z| \geq 1, & |w| \leq 1, \\ -\langle \theta | \psi_\beta^\theta(w) V_\nu(1) \tilde{\psi}_\alpha^\sigma(z) | \sigma \rangle &= \mathcal{K}_{\alpha\dot{\beta}}(z, w), & |z| \leq 1, & |w| \geq 1, \end{aligned} \quad (4.3)$$

в терминах некоторых матричных ядер $\mathcal{K}(z, w) = \mathcal{K}^\nu(z, w)$. Здесь мы используем индексы $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}\}$ для того, чтобы различать матричные индексы, отвечающие двум разным базисам, связанным с точками $z = 0$ и $z = \infty$ соответственно.

До этого момента мы утверждали лишь то, что оператор $V_\nu(1)$ единственным образом определяется свойствами, перечисленными выше; это вытекает из следующего простого факта: все матричные элементы квазигруппового элемента $V_\nu(1)$ задаются детерминантами, построенными на основе ядра $\mathcal{K}(z, w)$. Существование этого оператора, таким образом, становится очевидным, так как мы можем вычислить все его матричные элементы, используя теорему Вика.

Теперь же мы хотим задать ядра $\mathcal{K}(z, w)$ на основании их свойств монодромии. В окрестности $z = 0$ выберем базис из собственных векторов матрицы $M_0 \sim e^{2\pi i \sigma}$, а в окрестности $z = \infty$ – базис из собственных векторов матрицы $M_\infty \sim e^{2\pi i \theta}$ (фиксированы только классы сопряженности этих матриц и, конечно, $[M_0, M_\infty] \neq 0$). Мы предлагаем явную формулу для ядра

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta}(z, w) = \frac{[\phi(z)\phi^{-1}(w)]_{\alpha\beta}}{z - w}, \quad (4.4)$$

заданного с помощью решений

$$\frac{d}{dz}\phi(z) = \phi(z) \left(\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} \right) = \phi(z)A(z), \quad A_0 \sim \sigma, \quad A_1 \sim \nu, \quad A_\infty \sim \theta, \quad (4.5)$$

с учетом предписанных монодромий

$$\gamma_0: \phi_{\alpha i}(z) \mapsto \sum_{\beta} (M_0)_{\alpha\beta} \phi_{\beta i}(z), \quad \gamma_\infty: \phi_{\alpha i}(z) \mapsto \sum_{\beta} (M_\infty)_{\alpha\beta} \phi_{\beta i}(z), \quad (4.6)$$

также определяющих монодромию вокруг точки $z = 1$:

$$\gamma_1: \phi_{\alpha i}(z) \mapsto \sum_{\beta} (M_1)_{\alpha\beta} \phi_{\beta i}(z), \quad M_1 \sim e^{2\pi i\nu}, \quad M_0 M_1 M_{\infty} = 1.$$

Решения линейной системы (4.5) сами могут быть выражены в терминах фермионных корреляторов, а именно

$$\phi_{\alpha\gamma}(z) = z \cdot \langle \theta | V_{\nu}(1) \tilde{\psi}_{\alpha}(z) | \mathbf{1}_{\gamma}, \sigma \rangle, \quad \phi_{\gamma\beta}^{-1}(z) = z \cdot \langle \theta | V_{\nu}(1) \psi_{\beta}(z) | \mathbf{1}_{\gamma}, \sigma \rangle \quad (4.7)$$

для некоторой фиксированной нормировки при $z \rightarrow 0$. В следующем разделе мы докажем, что определения (4.4) на самом деле согласованы друг с другом, а также с (4.7). Это следует из обобщенных билинейных тождеств Хироты, которым удовлетворяют введенные вершинные операторы.

На самом деле у нас имеются четыре различных матричных ядра (4.4) с индексами $\alpha\beta$, $\alpha\dot{\beta}$, $\dot{\alpha}\beta$, $\dot{\alpha}\dot{\beta}$, соответствующими всем возможным комбинациям разных областей. При переходе из одной области в другую происходит замена базиса решений, и это преобразование может быть задано некоторой матрицей C_{α}^{α} . Разложение этих ядер при $0 < z, w < 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\alpha\beta}(z, w) &= \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{z-w} + \sum_{p,q>0} \langle \theta | V_{\nu}(1) \tilde{\psi}_{-p}^{\alpha} \psi_{-q}^{\beta} | \sigma \rangle z^{p-1/2+\sigma_{\alpha}} w^{q-1/2-\sigma_{\beta}} = \\ &= \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{z-w} + \sum_{p,q>0} K_{pq}^{\alpha\beta} z^{p-1/2+\sigma_{\alpha}} w^{q-1/2-\sigma_{\beta}}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

а при $z, w > 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(z, w) &= \frac{\delta_{\dot{\alpha},\dot{\beta}}}{z-w} + \sum_{p,q>0} \langle \theta | \tilde{\psi}_p^{\dot{\alpha}} \psi_q^{\dot{\beta}} V_{\nu}(1) | \sigma \rangle z^{-p-1/2+\theta_{\dot{\alpha}}} w^{-q-1/2-\theta_{\dot{\beta}}} = \\ &= \frac{\delta_{\dot{\alpha},\dot{\beta}}}{z-w} + \sum_{p,q>0} \tilde{K}_{pq}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} z^{-p-1/2+\theta_{\dot{\alpha}}} w^{-q-1/2-\theta_{\dot{\beta}}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Это разложение позволяет найти соответствующие матричные элементы для фермионных мод. Матричные элементы $K_{p_{\alpha},q_{\beta}}^{\alpha\beta}$ и $\tilde{K}_{p_{\alpha},q_{\beta}}^{\alpha\beta}$ фактически определены с точностью до множителей $s_{\alpha} s_{\beta}^{-1}$, которые появляются из-за неопределенности в нормировке вершинных операторов.

Для любых трех матриц монодромии таких, что $M_0 M_1 M_{\infty} = 1$, можно зафиксировать все их инвариантные функции (например, следы) и диагонализировать матрицу M_{∞} , но и после этого выживает еще одно семейство преобразований, а именно одновременное сопряжение

$$M_i \mapsto S^{-1} M_i S \quad (4.10)$$

диагональными матрицами $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_N)$. Это дает разные вершинные операторы, отличающиеся множителями $s^{\mathbf{J}_0}$ с соответствующей мультипликативной

перенормировкой их матричных элементов. Для специальных вершинных операторов с $\nu = \nu N e_j$ эти матричные элементы можно выразить в терминах произведений (3.7), например

$$\begin{aligned} K_{p_\alpha, q_\beta}^{\alpha\beta} &= \langle \theta | V_\nu(1) | p_\alpha, q_\beta; \sigma \rangle = \langle \theta | V_\nu(1) \tilde{\psi}_{-p_\alpha}^\alpha \psi_{-q_\beta}^\beta | \sigma \rangle = \\ &= \frac{1}{p_\alpha + q_\beta - \sigma_\alpha + \sigma_\beta} f_{1,\alpha}(\sigma, \theta + \nu, p_\alpha) f_{2,\beta}(\sigma, \theta + \nu, q_\beta), \\ \tilde{K}_{p_\alpha, q_\beta}^{\alpha\beta} &= \langle p_\alpha, q_\beta; \theta | V_\nu(1) | \sigma \rangle = \langle \theta | \tilde{\psi}_{p_\alpha}^\alpha \psi_{q_\beta}^\beta V_\nu(1) | \sigma \rangle = \\ &= -\frac{1}{p_\alpha + q_\beta - \theta_\alpha + \theta_\beta} f_{1,\alpha}(\theta + \nu, \sigma, p_\alpha) f_{2,\beta}(\theta + \nu, \sigma, q_\beta). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Мы вернемся к обсуждению специального случая ниже в п. 4.3.

Общая формула для $2n$ -точечного фермионного коррелятора задается формулой Вика:

$$\begin{aligned} \langle \theta | \prod_{\dot{\alpha}=1}^N \prod_{i=1}^{d'_\alpha} \tilde{\psi}_{\dot{\alpha}}^\theta(z_{\dot{\alpha},i}) \psi_{\dot{\alpha}}^\theta(w_{\dot{\alpha},i}) V_\nu(1) \prod_{\alpha=1}^N \prod_{i=1}^{d_\alpha} \tilde{\psi}_\alpha^\sigma(z_{\alpha,i}) \psi_\alpha^\sigma(w_{\alpha,i}) | \sigma \rangle = \\ = \langle \theta | V_\nu(1) | \sigma \rangle \cdot \det \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{\alpha\beta}(z_{\alpha,i}, w_{\beta,j}) & \mathcal{K}_{\alpha\dot{\beta}}(z_{\alpha,i}, w_{\dot{\beta},j}) \\ \mathcal{K}_{\dot{\alpha}\beta}(z_{\dot{\alpha},i}, w_{\beta,j}) & \mathcal{K}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(z_{\dot{\alpha},i}, w_{\dot{\beta},j}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

На проколотовой единичной окружности $|z| = |w| = 1$, $z \neq 1$, $w \neq 1$ имеем

$$\mathcal{K}_{\dot{\alpha}\beta}(z, w) = \sum_\alpha C_\alpha^\alpha \mathcal{K}_{\alpha\beta}(z, w), \quad \mathcal{K}_{\alpha\dot{\beta}}(z, w) = \sum_\beta \mathcal{K}_{\alpha\beta}(z, w) (C^{-1})_{\dot{\beta}}^\beta. \quad (4.13)$$

Из формул (4.12) следует, что существуют два операторных тождества

$$\tilde{\psi}_\alpha^\theta(z) V_\nu(1) = V_\nu(1) \sum_\alpha C_\alpha^\alpha \tilde{\psi}_\alpha^\sigma(z), \quad \psi_\alpha^\theta(z) V_\nu(1) = V_\nu(1) \sum_\alpha \psi_\alpha^\sigma(z) (C^{-1})_\alpha^\alpha. \quad (4.14)$$

На самом деле этих равенств уже достаточно для того, чтобы определить оператор $V_\nu(1)$. Проще всего вычислить

$$V_\nu(1) \psi_{\alpha,r}^\sigma V_\nu^{-1}(1) = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i} z^{r-1/2+\sigma_\alpha} V_\nu(1) \psi_\alpha^\sigma(z) V_\nu^{-1}(1). \quad (4.15)$$

Используя тождества (4.14), можно переписать это эквивалентным образом для мод:

$$\begin{aligned} V_\nu(1) \psi_{\alpha,r}^\sigma V_\nu^{-1}(1) &= \sum_\beta C_\alpha^\beta \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i} z^{r-1/2+\sigma_\alpha} \psi_\beta^\theta(z) = \\ &= \sum_{\beta,s} C_\alpha^\beta \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i} z^{r-s-1+\sigma_\alpha-\theta_\beta} \psi_{\beta,s}^\theta = \sum_{\beta,s} C_\alpha^\beta \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{2\pi i(r-s+\sigma_\alpha-\theta_\beta)\phi} \psi_{\beta,s}^\theta = \\ &= \sum_{\beta,s} C_\alpha^\beta \frac{-i(e^{2\pi i(\sigma_\alpha-\theta_\beta)} - 1)}{r-s+\sigma_\alpha-\theta_\beta} \psi_{\beta,s}^\theta. \end{aligned} \quad (4.16)$$

В принципе эта формула содержит всю возможную информацию об операторе $V_\nu(t)$, и теперь легко может быть доказана

ТЕОРЕМА 2. *Оператор $V_\nu(t)$ является примарным полем для конформной алгебры $W_N \oplus H$ со старшими весами $u_k(\nu)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что благодаря (4.14) и определениям (4.2), (3.22) при $|z| = t$, $z \neq t$ имеем

$$U_k^\theta(z)V_\nu(t) = V_\nu(t)U_k^\sigma(z). \quad (4.17)$$

Это означает, что $U_k(z)$ – однозначные операторы (с тривиальными монодромиями). В теореме 1 мы фактически уже доказали, что состояния $|\sigma\rangle$ являются векторами старшего веса, следовательно,

$$\langle\theta|\dots U_k(z)|\sigma\rangle = \left(\frac{u_k(\sigma)}{z^k} + \text{менее сингулярные члены}\right)\langle\theta|\dots|\sigma\rangle, \quad (4.18)$$

но, поскольку система (4.5) симметрична относительно перестановки особых точек, мы можем также заключить отсюда, что и для другой точки

$$\langle\theta|\dots U_k(z)V_\nu(t)\dots|\sigma\rangle = \left(\frac{u_k(\nu)}{(z-t)^k} + \text{менее сингулярные члены}\right)\langle\theta|\dots V_\nu(t)\dots|\sigma\rangle, \quad (4.19)$$

таким образом, $(\mathcal{U}_{k,n}V_\nu)(t) = 0$ при $n > 0$, т. е. $V_\nu(t)$ – примарное поле.

4.2. Обобщенные соотношения Хироты. Рассмотрим произвольный оператор $\mathcal{O}$ с линейным присоединенным действием на фермионах

$$\mathcal{O}^{-1}\psi_{\alpha,r}\mathcal{O} = \sum_{s,\beta} R_{r\alpha,s\beta}^\mathcal{O} \psi_{\beta,s}, \quad \mathcal{O}^{-1}\tilde{\psi}_{\alpha,-r}\mathcal{O} = \sum_{s,\beta} \tilde{\psi}_{\beta,-s} (R_{s\beta,r\alpha}^\mathcal{O})^{-1}, \quad (4.20)$$

которое в общей ситуации является переопределением преобразования из $GL(\infty)$ для одного фермиона. Это свойство приводит к стандартному утверждению о коммутативности двух операторов в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$,

$$(\mathcal{O} \otimes \mathcal{O}) \sum_{r,\alpha} \psi_{\alpha,-r} \otimes \tilde{\psi}_{\alpha,r} = \sum_{r,\alpha} \psi_{\alpha,-r} \otimes \tilde{\psi}_{\alpha,r} \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}, \quad (4.21)$$

что является операторной формой билинейного соотношения Хироты [19], [29].

Заметим теперь, что с помощью тождеств (4.14) мы определили специальный подкласс среди общих преобразований (4.20):

$$V^{-1}\psi_{\dot{\alpha}}(z)V = \sum_{\alpha} (C^{-1})_{\dot{\alpha}}^{\alpha} \psi_{\alpha}(z), \quad V^{-1}\tilde{\psi}_{\dot{\alpha}}(z)V = \sum_{\alpha} C_{\dot{\alpha}}^{\alpha} \tilde{\psi}_{\alpha}(z), \quad (4.22)$$

где C и C^{-1} могут быть интерпретированы как матрицы монодромии: мы можем рассматривать равенства (4.22) как линейное соотношение между двумя аналитическими продолжениями фермионных полей с окружности $|z| = 1$ в $z \rightarrow \infty$ или $z \rightarrow 0$,

сохраняющими операторное разложение $\tilde{\psi}_\alpha(z)\psi_\beta(z') = \delta_{\alpha,\beta}/(z - z') + \dots$. Непосредственным следствием соотношений (4.22) является

ТЕОРЕМА 3. *Фурье-моды билинейных операторов*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(z) &= \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(z) \otimes \tilde{\psi}_{\alpha}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mathcal{I}_k}{z^{k+1}}, \\ \mathcal{I}^{\dagger}(z) &= \sum_{\alpha} \tilde{\psi}_{\alpha}(z) \otimes \psi_{\alpha}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mathcal{I}_k^{\dagger}}{z^{k+1}}\end{aligned}\quad (4.23)$$

коммутируют с $V_{\nu}(t) \otimes V_{\nu}(t)$ в смысле

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_k^{\theta} \cdot V_{\nu}(t) \otimes V_{\nu}(t) &= V_{\nu}(t) \otimes V_{\nu}(t) \cdot \mathcal{I}_k^{\sigma}, \\ (\mathcal{I}_k^{\dagger})^{\theta} \cdot V_{\nu}(t) \otimes V_{\nu}(t) &= V_{\nu}(t) \otimes V_{\nu}(t) \cdot \mathcal{I}_k^{\sigma}.\end{aligned}\quad (4.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что равенство

$$\mathcal{I}^{\theta}(z) \cdot V_{\nu}(t) \otimes V_{\nu}(t) = V_{\nu}(t) \otimes V_{\nu}(t) \cdot \mathcal{I}^{\sigma}(z) \quad (4.25)$$

выполняется при $|z| = t$, $z \neq t$. Это происходит благодаря тождествам (4.14):

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^{\theta}(z) \otimes \tilde{\psi}_{\alpha}^{\theta}(z) \cdot V_{\nu}(t) \otimes V_{\nu}(t) &= V_{\nu}(t) \otimes V_{\nu}(t) \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (C^{-1})_{\alpha}^{\beta} C_{\alpha}^{\gamma} \psi_{\beta}^{\sigma}(z) \otimes \tilde{\psi}_{\gamma}^{\sigma}(z) = \\ &= V_{\nu}(t) \otimes V_{\nu}(t) \sum_{\beta} \psi_{\beta}^{\sigma}(z) \otimes \tilde{\psi}_{\beta}^{\sigma}(z).\end{aligned}\quad (4.26)$$

Для продолжения этого равенства в точку $z = t$ нужно лишь проверить, что выражение $\mathcal{I}^{\theta}(z) \cdot V_{\nu}(t) \otimes V_{\nu}(t)$ регулярно. Вследствие симметрии (4.5) это то же самое, что проверить регулярность выражения $\mathcal{I}^{\sigma}(z) \cdot |\sigma\rangle \otimes |\sigma\rangle$, для которого получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{\sigma}(z) \cdot |\sigma\rangle \otimes |\sigma\rangle &= \sum_{\alpha} \sum_{n < 0} \frac{\psi_{\alpha, n}^{\sigma} |\sigma\rangle}{z^{n+1/2+\sigma_{\alpha}}} \otimes \sum_{m < 0} \frac{\tilde{\psi}_{\alpha, m}^{\sigma} |\sigma\rangle}{z^{m+1/2-\sigma_{\alpha}}} = \\ &= \sum_{\alpha} \psi_{\alpha, -1/2}^{\sigma} |\sigma\rangle \otimes \tilde{\psi}_{\alpha, -1/2}^{\sigma} |\sigma\rangle + O(z),\end{aligned}\quad (4.27)$$

что и завершает доказательство.

Теперь заметим, что справедливы равенства

$$\mathcal{I}_k^{\sigma} \cdot |\sigma\rangle \otimes |\sigma\rangle = 0, \quad (\mathcal{I}_k^{\dagger})^{\sigma} \cdot |\sigma\rangle \otimes |\sigma\rangle = 0 \quad \text{при } k \geq 0, \quad (4.28)$$

в то время как, например,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{-1}^{\dagger} |\theta\rangle \otimes |\theta\rangle &= \sum_{\alpha} \tilde{\psi}_{\alpha, -1/2} \otimes \psi_{\alpha, -1/2} |\theta\rangle \otimes |\theta\rangle = \sum_{\alpha} |\mathbf{1}_{\alpha}, \theta\rangle \otimes |-\mathbf{1}_{\alpha}, \theta\rangle, \\ \mathcal{I}_{-1} |\theta\rangle \otimes |\theta\rangle &= \sum_{\alpha} \psi_{\alpha, -1/2} \otimes \tilde{\psi}_{\alpha, -1/2} |\theta\rangle \otimes |\theta\rangle = \sum_{\alpha} |-\mathbf{1}_{\alpha}, \theta\rangle \otimes |\mathbf{1}_{\alpha}, \theta\rangle,\end{aligned}\quad (4.29)$$

но

$$\langle \theta | \otimes \langle \theta | \cdot \mathcal{I}_{-1}^{\dagger} = \langle \theta | \otimes \langle \theta | \cdot \mathcal{I}_{-1} = 0. \quad (4.30)$$

Мы увидим ниже, что существование дополнительных билинейных операторных соотношений приводит на самом деле к бесконечному набору уравнений типа уравнений Хироты для тау-функций.

Отметим, что квазигрупповой оператор может содержать также оператор t^{L_0} , который, впрочем, буквально не коммутирует с $\mathcal{I}_k$,

$$t^{L_0}\mathcal{I}(z)t^{-L_0} = t\mathcal{I}(tz), \quad (4.31)$$

что приводит к равенству $t^{L_0}\mathcal{I}_k t^{-L_0} = t^{-k}\mathcal{I}_k$. Это означает, что вершинный оператор может, вообще говоря, содержать множители $t_i^{L_0}$, но лишь при условии $\prod t_i = 1$.

Теперь мы, наконец, готовы доказать, что корреляционные функции (4.3), а на самом деле любые корреляционные функции

$$\langle \theta_\infty | \mathcal{O} \tilde{\psi}_\alpha(z) \psi_\beta(w) | \theta_0 \rangle = \langle \theta_\infty | V_{\theta_{n-2}}(t_{n-2}) \dots V_{\theta_1}(t_1) \tilde{\psi}_\alpha(z) \psi_\beta(w) | \theta_0 \rangle$$

с двумя фермионами выражаются через корреляционные функции с одним фермионом. В дополнение к равенствам (4.29), (4.30) вычислим коммутатор оператора $\mathcal{I}_{-1}$ с $\tilde{\psi} \otimes \psi$, используя представление в виде контурного интеграла:

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}_{-1}, \tilde{\psi}_\alpha(z) \otimes \psi_\beta(w)] &= \left(\oint_z + \oint_w \right) \frac{dx}{x} \sum_\gamma \psi_\gamma(x) \otimes \tilde{\psi}_\gamma(x) \cdot \tilde{\psi}_\alpha(z) \otimes \psi_\beta(w) = \\ &= \oint_z \frac{dx}{x} \sum_\gamma \frac{\delta_{\gamma,\alpha}}{x-z} \otimes \tilde{\psi}_\gamma(x) \psi_\beta(w) + \oint_w \frac{dx}{x} \sum_\gamma \psi_\gamma(x) \tilde{\psi}_\alpha(z) \otimes \frac{\delta_{\gamma,\beta}}{x-w} = \\ &= \frac{1}{z} \cdot 1 \otimes \tilde{\psi}_\alpha(z) \psi_\beta(w) + \frac{1}{w} \cdot \psi_\beta(w) \tilde{\psi}_\alpha(z) \otimes 1. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Вставляя это операторное тождество в корреляционную функцию и используя соотношения (4.29), (4.30), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \theta_\infty | \otimes \langle \theta_\infty | \cdot \mathcal{I}_{-1} \cdot \mathcal{O} \otimes \mathcal{O} \cdot \tilde{\psi}_\alpha(z) \otimes \psi_\beta(w) \cdot | \theta_0 \rangle \otimes | \theta_0 \rangle = \\ &= \langle \theta_\infty | \otimes \langle \theta_\infty | \cdot \mathcal{O} \otimes \mathcal{O} \cdot \tilde{\psi}_\alpha(z) \otimes \psi_\beta(w) \sum_\gamma | -\mathbf{1}_\gamma, \theta_0 \rangle \otimes | \mathbf{1}_\gamma, \theta_0 \rangle + \\ &\quad + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{w} \right) \langle \theta_\infty | \mathcal{O} | \theta_0 \rangle \cdot \langle \theta_\infty | \mathcal{O} \tilde{\psi}_\alpha(z) \psi_\beta(w) | \theta_0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Сумма по γ в правой части этого равенства равна билинейной комбинации корреляционных функций со вставкой одного фермиона, в итоге имеем

$$\begin{aligned} \langle \theta_\infty | \mathcal{O} \tilde{\psi}_\alpha(z) \psi_\beta(w) | \theta_0 \rangle \langle \theta_\infty | \mathcal{O} | \theta_0 \rangle &= \\ &= \frac{zw}{z-w} \sum_\gamma \langle \theta_\infty | \mathcal{O} \tilde{\psi}_\alpha(z) | -\mathbf{1}_\gamma, \theta_0 \rangle \langle \theta_\infty | \mathcal{O} \psi_\beta(w) | \mathbf{1}_\gamma, \theta_0 \rangle, \end{aligned} \quad (4.34)$$

что для $\mathcal{O} = V_\nu(1)$ и дает соотношение между выражениями (4.7) и (4.4). Подставляя в (4.34) операторное разложение

$$\tilde{\psi}_\alpha(z) \psi_\beta(w) = \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{z-w} + \text{reg}$$

и беря вычет в точке $z \rightarrow w$, мы также доказываем, что матрицы в (4.7) взаимно обратны.

4.3. Задача Римана–Гильберта: гипергеометрический пример. Гипергеометрическое решение (2×2) -задачи Римана–Гильберта с тремя особыми точками $z = 0, 1, \infty$ и обратное к нему могут быть явно описаны следующими формулами:

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \begin{pmatrix} z^\beta \mathcal{F}(\alpha, \beta, \nu|z) & -z^{1+\beta} C(\alpha, \beta, \nu) \mathcal{F}(\alpha, 1 + \beta, \nu|z) \\ -z^{1-\beta} C(\alpha, -\beta, \nu) \mathcal{F}(\alpha, 1 - \beta, \nu|z) & z^{-\beta} \mathcal{F}(\alpha, -\beta, \nu|z) \end{pmatrix}, \\ \phi^{-1}(z) &= \begin{pmatrix} z^{-\beta} \mathcal{F}(\alpha, -\beta, -\nu|z) & z^{1+\beta} C(\alpha, \beta, \nu) \mathcal{F}(\alpha, 1 + \beta, -\nu|z) \\ z^{1-\beta} C(\alpha, -\beta, \nu) \mathcal{F}(\alpha, 1 - \beta, -\nu|z) & z^\beta \mathcal{F}(\alpha, \beta, -\nu|z) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где для краткости мы ввели обозначения

$$C(\alpha, \beta, \nu) = \frac{(-\alpha - \beta + \nu)(\alpha - \beta + \nu)}{2\beta(2\beta + 1)}, \quad \mathcal{F}(\alpha, \beta, \nu|z) = {}_2F_1\left[-\alpha + \beta - \nu, \alpha + \beta - \nu \middle| z\right].$$

Эти формулы дают решение линейной системы (4.5) с вычетами в следующих классах сопряженности:

$$\begin{aligned}A_0 \sim \theta_0 = \sigma = \text{diag}(\beta, -\beta), \quad A_\infty \sim \theta_\infty = \theta = \text{diag}(\alpha, -\alpha), \\ A_1 \sim \theta_1 = \nu = \text{diag}(2\nu, 0).\end{aligned}\tag{4.35}$$

В соответствии с формулами (4.3), (4.4) имеем

$$\langle \theta | V_\nu \tilde{\psi}_\alpha(z) \psi_\beta(w) | \sigma \rangle = \frac{[\phi(z)\phi^{-1}(w)]_{\alpha\beta}}{z - w}.\tag{4.36}$$

Это означает, например, что для изучения матричных элементов, содержащих ψ_1 и $\tilde{\psi}_1$, следует рассмотреть функцию

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{K}}_{11}(z, w) &= z^{-\beta} w^\beta [\phi(z)\phi^{-1}(w)]_{11} = \mathcal{F}(\alpha, -\beta, -\nu|z) \mathcal{F}(\alpha, \beta, \nu|w) - \\ &- \frac{\prod_{\epsilon, \epsilon' = \pm 1} (\epsilon\alpha + \epsilon'\beta + \nu)}{4\beta^2(4\beta^2 - 1)} zw \mathcal{F}(\alpha, 1 - \beta, -\nu|z) \mathcal{F}(\alpha, 1 + \beta, \nu|w).\end{aligned}\tag{4.37}$$

Уже тот простой факт, что $\hat{\mathcal{K}}_{11}(z, z) = 1$, представляет собой нетривиальное билинейное соотношение для гипергеометрической функции. На самом деле наше утверждение значительно сильнее: эта функция почти столь же проста, что и (2.40), так как ее разложение (4.8) дается формулой

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(z, w)_{11} &= \frac{\hat{\mathcal{K}}_{11}(z, w)}{z - w} = \frac{1}{z - w} - \\ &- \sum_{a, b=0}^{\infty} \frac{2\beta(\alpha - \beta + \nu)_{a+1}(-\alpha + \beta + \nu)_{a+1}(-\alpha + \beta - \nu)_{b+1}(\alpha + \beta - \nu)_{b+1}}{(a + b + 1)(-\alpha + \beta - \nu)(\alpha + \beta - \nu) a! b! (2\beta)_{b+1}(-2\beta)_{a+1}} z^b w^a,\end{aligned}\tag{4.38}$$

и это действительно производящая функция для представляющих интерес матричных элементов. Подставив $a = q - 1/2$, $b = p - 1/2$, а именно

$$\begin{aligned}\langle (\alpha, -\alpha) | V_{(2\nu, 0)}(1) \psi_{1, -p} \tilde{\psi}_{1, -q} | (\beta, -\beta) \rangle &= \\ = \frac{2\beta(\alpha + \beta - \nu)_{q+1/2}(-\alpha + \beta - \nu)_{q+1/2}(\alpha - \beta + \nu)_{p+1/2}(-\alpha - \beta + \nu)_{p+1/2}}{(p + q)(-\alpha + \beta - \nu)(\alpha + \beta - \nu)(p - 1/2)!(q - 1/2)!(2\beta)_{q+1/2}(-2\beta)_{p+1/2}},\end{aligned}\tag{4.39}$$

можно сравнить эту формулу с (3.5):

$$\begin{aligned} \frac{f_{1,1}(\theta, \theta', p) f_{2,1}(\theta, \theta', q)}{p+q} &= \frac{1}{(p-1/2)!} \prod_{\beta} \frac{(\theta'_{\beta} - \theta_1)_{p+1/2}}{\sqrt{\theta'_{\beta} - \theta_1}} \prod_{\beta \neq 1} \frac{\sqrt{\theta_{\beta} - \theta_1}}{(\theta_{\beta} - \theta_1)_{p+1/2}} \times \\ &\times \frac{1}{(q-1/2)!} \prod_{\beta} \frac{(\theta_1 - \theta'_{\beta})_{q+1/2}}{\sqrt{\theta_1 - \theta'_{\beta}}} \prod_{\beta \neq 1} \frac{\sqrt{\theta_1 - \theta_{\beta}}}{(\theta_1 - \theta_{\beta})_{q+1/2}} \frac{1}{p+q} = \\ &= \frac{(\theta_1 - \theta_2)(-\theta_1 + \theta'_1)_{p+1/2}(-\theta_1 + \theta'_2)_{p+1/2}(\theta_1 - \theta'_1)_{q+1/2}(\theta_1 - \theta'_2)_{q+1/2}}{(p+q)(-\theta_1 + \theta'_1)(\theta_1 - \theta'_2)(p-1/2)!(q-1/2)!(\theta_2 - \theta_1)_{p+1/2}(\theta_2 - \theta_1)_{q+1/2}}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Легко видеть, что после правильного отождествления

$$\theta_1 = \beta, \quad \theta_2 = -\beta, \quad \theta'_1 = \alpha + \nu, \quad \theta'_2 = -\alpha + \nu \quad (4.41)$$

правые части формул (4.39) и (4.40) в точности совпадают.

В дополнение к гипергеометрическому случаю можно предъявить другой явный пример – точных конформных блоков, рассмотренных в работе [12]. Мы собираемся вернуться к этому вопросу в отдельной публикации.

5. ИЗОМОНОДРОМНЫЕ ТАУ-ФУНКЦИИ И ДЕТЕРМИНАНТЫ ФРЕДГОЛЬМА

5.1. Изомонодромная тау-функция. Сначала докажем простую лемму.

ЛЕММА 1. *Монодромии фермионных полей $\psi_{\beta}(w)$ и $\tilde{\psi}_{\alpha}(z)$ в матричных элементах*

$$\langle Y', n', \theta | V_{\nu}(1) \tilde{\psi}_{\alpha}^{\sigma}(z) \psi_{\beta}^{\sigma}(w) | Y, n, \sigma \rangle \quad (5.1)$$

не зависят от n, Y, n', Y' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все эти матричные элементы можно получить из (4.12) путем некоторого контурного интегрирования, выделяющего фермионные моды из фермионных полей. Однако в формуле (4.12) благодаря факторизации по теореме Вика все вклады имеют вид $\mathcal{K}_{\alpha\gamma}(z, \cdot) \times \dots$, где обозначенные многоточием сомножители вовсе не зависят от z , а поэтому все монодромии определяются единственным ядром $\mathcal{K}$.

Теперь уже легко может быть доказана

ТЕОРЕМА 4. *Решение линейной задачи с n отмеченными точками задается функцией $(z-w)\mathfrak{K}_{\alpha\beta}(z, w)$, где*

$$\mathfrak{K}_{\alpha\beta}(z, w) = \frac{\langle \theta_{\infty} | V_{\theta_{n-2}}(t_{n-2}) \dots V_{\theta_1}(t_1) \tilde{\psi}_{\alpha}^{\theta_0}(z) \psi_{\beta}^{\theta_0}(w) | \theta_0 \rangle}{\langle \theta_{\infty} | V_{\theta_{n-2}}(t_{n-2}) \dots V_{\theta_1}(t_1) | \theta_0 \rangle}, \quad (5.2)$$

а изомонодромная тау-функция этой задачи определяется как

$$\tau(t_1, \dots, t_{n-2}) = \langle \theta_{\infty} | V_{\theta_{n-2}}(t_{n-2}) \dots V_{\theta_1}(t_1) | \theta_0 \rangle. \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала вставим разложение единицы между любыми двумя (радиально упорядоченными) вершинными операторами, например

$$\begin{aligned} \tau \cdot \mathfrak{K}_{\alpha\beta}(z, w) &= \sum_{\{Y_1, m_i\}} \langle \theta_\infty | V_{\theta_{n-2}}(t_{n-2}) | Y_{n-3}, m_{n-3}, \sigma_{n-3} \rangle \langle Y_{n-3}, m_{n-3}, \sigma_{n-3} | \times \dots \times \\ &\times \langle Y_2, m_2, \sigma_2 | V_{\theta_2}(t_2) | Y_1, m_1, \sigma_1 \rangle \langle Y_1, m_1, \sigma_1 | V_{\theta_1}(t_1) \tilde{\psi}_\alpha^{\theta_0}(z) \psi_\beta^{\theta_0}(w) | \theta_0 \rangle \end{aligned} \quad (5.4)$$

при $0 < |z|, |w| < |t_1|$ и аналогично в других областях. Согласно лемме 1 монодромии фермионных полей зависят не от промежуточных состояний, а только от зарядов σ и вершинных операторов³⁾. Поэтому можно свести проблему вычисления всех монодромий к вычислению монодромий всевозможных трехточечных задач со вставленными различными вершинными операторами $V_{\theta_j}(t_j)$. Таким образом, мы доказали, что функция $(z - w)\mathfrak{K}_{\alpha\beta}(z, w) = [\Phi(z)\Phi^{-1}(w)]_{\alpha\beta}$ действительно является решением многоточечной проблемы Римана–Гильберта (множитель $z - w$ сокращает дополнительную сингулярность в (5.2)).

Чтобы доказать формулу (5.3), рассмотрим выражение

$$\sum_{\alpha} \tilde{\psi}_\alpha(z + t/2) \psi_\alpha(z - t/2) = \frac{N}{t} + J(z) + tU_2(z) + \dots, \quad (5.5)$$

так что

$$\begin{aligned} t \operatorname{Tr} \mathfrak{K}(z + t/2, z - t/2) &= \operatorname{Tr} \Phi(z + t/2) \Phi^{-1}(z - t/2) = \\ &= N + t \frac{\langle \theta_\infty | V_{\theta_{n-2}}(t_{n-2}) \dots V_{\theta_1}(t_1) J(z) | \theta_0 \rangle}{\langle \theta_\infty | V_{\theta_{n-2}}(t_{n-2}) \dots V_{\theta_1}(t_1) | \theta_0 \rangle} + \\ &+ t^2 \frac{\langle \theta_\infty | V_{\theta_{n-2}}(t_{n-2}) \dots V_{\theta_1}(t_1) U_2(z) | \theta_0 \rangle}{\langle \theta_\infty | V_{\theta_{n-2}}(t_{n-2}) \dots V_{\theta_1}(t_1) | \theta_0 \rangle} + \dots, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где из соотношений (3.28) и конформных тождеств Уорда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\langle \theta_\infty | V_{\theta_{n-2}}(t_{n-2}) \dots V_{\theta_1}(t_1) U_2(z) | \theta_0 \rangle}{\langle \theta_\infty | V_{\theta_{n-2}}(t_{n-2}) \dots V_{\theta_1}(t_1) | \theta_0 \rangle} &= \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\theta_i^2/2}{z - t_i} + \frac{\partial_i}{z - t_i} \ln \langle \theta_\infty | V_{\theta_{n-2}}(t_{n-2}) \dots V_{\theta_1}(t_1) | \theta_0 \rangle \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

и, кроме того, мы расширили эту формулу, чтобы включить точки $t_1 = 0$ и $t_n = \infty$.

Теперь, решая линейную систему (4.5) с $A(z) = \sum_i A_i/(z - t_i)$, получаем

$$\begin{aligned} \Phi(z + t/2) \Phi^{-1}(z - t/2) &= \Phi(z) \left(1 + \frac{t}{2} A(z) + \frac{t^2}{8} (\partial A(z) + A^2(z)) + \dots \right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{t}{2} A(z) + \frac{t^2}{8} (-\partial A(z) + A^2(z)) + \dots \right) \Phi^{-1}(z) = \\ &= \Phi(z) \left(1 + tA(z) + \frac{t^2}{2} A(z)^2 + \dots \right) \Phi^{-1}(z), \end{aligned} \quad (5.8)$$

³⁾В дополнение к $n - 3$ временным параметрам $\{t_1, \dots, t_n\}$, определенным с точностью до преобразований Мёбиуса, которое всегда позволяет зафиксировать три из них в точках $0, 1, \infty$, и n наборам W -зарядов $\{\theta_j\}$ изомонодромная тау-функция зависит от зарядов $\{\sigma_k\} \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{N-1}$, $k = 1, \dots, n - 3$, в промежуточных каналах, а также от двойственных им параметров $\{\beta_k\}$, которые мы уже обсуждали в связи с неопределенностью в нормировке вершинных операторов и их матричных элементов.

а поэтому из определения тау-функции вытекает, что

$$\mathrm{tr} \Phi(z + t/2) \Phi^{-1}(z - t/2) = \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\theta_i^2/2}{(z - t_i)^2} + \frac{\partial_i}{z - t_i} \ln \tau(t_1, \dots, t_n) \right) + \dots \quad (5.9)$$

Сравнение этой формулы с (5.7) завершает доказательство.

5.2. Детерминант Фредгольма. Рассмотрим изомонодромную тау-функцию $\tau(t) = \langle \theta_\infty | V_{\nu_1}(1) V_{\nu_t}(t) | \theta_0 \rangle$, отвечающую задаче на сфере с четырьмя отмеченными точками $z = 0, t, 1, \infty$. Вставляя разложение единицы, можно написать

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \langle \theta_\infty | V_{\nu_1}(1) V_{\nu_t}(t) | \theta_0 \rangle = \sum_{Y, m} \langle \theta_\infty | V_{\nu_1}(1) | Y, m; \sigma \rangle \langle Y, m; \sigma | V_{\nu_t}(t) | \theta_0 \rangle = \\ &= \sum_{\{p_{\alpha,i}\}, \{q_{\alpha,i}\}} \langle \theta_\infty | V_{\nu_1}(1) | \{p_{\alpha,i}\}, \{q_{\alpha,i}\}; \sigma \rangle \langle \{q_{\alpha,i}\}, \{p_{\alpha,i}\}; \sigma | V_{\nu_t}(t) | \theta_0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Мы использовали пока лишь частный случай разложения (5.4), применяя его к простейшей нетривиальной изомонодромной тау-функции. Однако теперь полезно заметить, что суммирование по базису в полном пространстве $\mathcal{H}^\sigma = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}^N} \mathcal{H}_m^\sigma$ может быть проведено в координатах Фробениуса без учета ограничения $|\{p_\alpha\}| = |\{q_\alpha\}|$ для состояний (3.13) в $\mathcal{H}_m^\sigma$, а поэтому в правой части (5.10) нет никаких ограничений на область суммирования.

Теперь можно по-прежнему воспользоваться формулами (4.8), (4.9) для матричных элементов в (5.10). Имеем

$$\begin{aligned} \langle \theta_\infty | V_{\nu_1}(1) | \{p_{\alpha,i}\}, \{q_{\alpha,i}\}; \sigma \rangle &= \det K_{x_I y_J}, \\ \langle \{p_{\alpha,i}\}, \{q_{\alpha,i}\}; \sigma | V_{\nu_t}(t) | \theta_0 \rangle &= \det \tilde{K}_{x_I y_J}(t), \\ \tilde{K}_{p_\alpha, q_\beta}^{\alpha\beta}(t) &= t^{p_\alpha + q_\beta - \sigma_\alpha + \sigma_\beta} \tilde{K}_{p_\alpha, q_\beta}^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где опять введены мультииндексы $\{x_I\} = \bigcup_\alpha \{(\alpha, p_{\alpha,i})\}$ и $\{y_J\} = \bigcup_\alpha \{(\alpha, q_{\alpha,i})\}$. Это означает, что тау-функция (5.10) может быть путем суммирования представлена как единый детерминант Фредгольма:

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \sum_{\{p_{\alpha,i}\}, \{q_{\alpha,i}\}} \langle \theta_\infty | V_{\nu_1}(1) | \{p_{\alpha,i}\}, \{q_{\alpha,i}\}; \sigma \rangle \langle \{q_{\alpha,i}\}, \{p_{\alpha,i}\}; \sigma | V_{\nu_t}(t) | \theta_0 \rangle = \\ &= \sum_{\{x\}, \{y\}} \det K_{x,y} \det \tilde{K}_{y,x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{|\{x\}|=n, \\ |\{y\}|=n}} \det K_{x,y} \det \tilde{K}_{y,x}(t) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr} \wedge^n (K \tilde{K}(t)) = \det(1 + K \tilde{K}(t)) = \det(1 + \mathcal{R}_t). \end{aligned} \quad (5.12)$$

При этом мы пользуемся практически только теоремой Вика. Можно также привести явную формулу для ядра оператора $\mathcal{R}_t = K \tilde{K}(t)$:

$$\mathcal{R}(x, z) = \oint_{|y|=r} dy \frac{(\phi(x)\phi^{-1}(y) - x^\sigma y^{-\sigma})(S^{-1}\tilde{\phi}(y/t)\tilde{\phi}(z/t)^{-1}S - y^\sigma z^{-\sigma})}{t^{-1}(x-y)(y-z)} \quad (5.13)$$

(в этой формуле через S обозначены введенные ранее диагональные матрицы). Таким образом, этот интегральный оператор действует из пространства вектор-функций $\mathbf{f}(z) = (f_1(z), \dots, f_N(z))$ на окружности $|z| = r$, где $t < r < 1$. Эти функции разлагаются в ряды Лорана с дробными степенями,

$$f_\alpha(z) = z^{\sigma_\alpha} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{\alpha,n} z^n, \quad (5.14)$$

иначе действие интегрального оператора будет плохо определенным.

Представление в виде детерминанта Фредгольма безусловно требует дальнейшего внимательного изучения и, возможно, окажется полезным для практических вычислений с изомонодромными тау-функциями, для которых по сути дела не существует явных формул.

6. ИЗОМОНОДРОМНЫЕ РЕШЕНИЯ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ

6.1. Матричные элементы и тау-функции. Многоточечные аналоги матричных элементов (2.28)

$$Z(\{\theta, t\} | Y', Y) = \langle \theta', Y' | \prod_k V_{\theta_k}(t_k) | Y, \theta \rangle \quad (6.1)$$

можно также вычислить с помощью теоремы Вика. Однако гораздо более простым упражнением является вычисление их производящих функций, или тау-функций систем Тоды

$$\tau(\mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}} | \{\theta, t\}) = \sum_{Y, Y'} Z(\{\theta, z\} | Y', Y) s_{Y'}(\mathbf{T}) s_Y(-\bar{\mathbf{T}}) = \langle \theta' | e^{H(\mathbf{T})} \prod_k V_{\theta_k}(t_k) e^{-\bar{H}(\bar{\mathbf{T}})} | \theta \rangle,$$

если ввести

$$H(\mathbf{T}) = \sum_{k>0} T_k J_k, \quad \bar{H}(\bar{\mathbf{T}}) = \sum_{k>0} \bar{T}_k J_{-k} \quad (6.2)$$

и использовать равенства

$$e^{-\bar{H}(\bar{\mathbf{T}})} | \theta \rangle = \sum_Y s_Y(-\bar{\mathbf{T}}) | Y, \theta \rangle, \quad \langle \theta' | e^{H(\mathbf{T})} = \sum_Y s_Y(\mathbf{T}) \langle \theta', Y|. \quad (6.3)$$

В результате простого вычисления получаем

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}} | \{\theta, t\}) &= \delta_{\theta', \theta + \sum_k \theta_k} \prod_k t_k^{\theta_k} \prod_{i < j} (t_i - t_j)^{\theta_i \theta_j} \times \\ &\times \exp \sum_{n>0} \left(-n T_n \bar{T}_n + T_n \sum_k \theta_k t_k^n + \bar{T}_n \sum_k \theta_k t_k^{-n} \right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Как функция времен $\{T\}$ результат представляет собой вакуумную тау-функцию иерархии Тоды с зависящим от параметров $\{\theta, t\}$ линейным сдвигом времен. Однако как функция переменных $\{t\}$ это выражение является простейшим примером тау-функции изомонодромной задачи.

6.2. Обобщенные интегрируемые иерархии. Из теоремы 3 для любого (радиально упорядоченного) произведения $\mathcal{O} = \prod_j V_{\nu_j}(t_j)$ вершинных операторов следует, что при произвольном $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\theta}_\infty | \exp \left\{ \sum_{i>0, \alpha} T_{\alpha, i} J_{\alpha, i} \right\} \otimes \langle \mathbf{n}', \boldsymbol{\theta}_\infty | \exp \left\{ \sum_{i>0, \alpha} T'_{\alpha, i} J_{\alpha, i} \right\} \cdot [\mathcal{O} \otimes \mathcal{O}, \mathcal{I}_k] \times \\ \times \exp \left\{ - \sum_{i<0, \alpha} \bar{T}_{\alpha, i} J_{\alpha, -i} \right\} | \bar{\mathbf{n}}, \boldsymbol{\theta}_0 \rangle \otimes \exp \left\{ - \sum_{i<0, \alpha} \bar{T}'_{\alpha, i} J_{\alpha, -i} \right\} | \bar{\mathbf{n}}', \boldsymbol{\theta}_0 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Используя формулы (3.10), (4.23) и (3.11), это равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha}(\mathbf{n} + \mathbf{n}') \oint_{\infty} dz z^{k+n_{\alpha}-n'_{\alpha}-2} e^{\xi_{\alpha}(\mathbf{T}-\mathbf{T}', z)} \times \\ \times \tau(\mathbf{n} - \mathbf{1}_{\alpha}, \mathbf{T} - [z^{-1}]_{\alpha}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{T}}) \tau(\mathbf{n}' + \mathbf{1}_{\alpha}, \mathbf{T}' + [z^{-1}]_{\alpha}, \bar{\mathbf{n}}', \bar{\mathbf{T}}') = \\ = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha}(\bar{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{n}}') \oint_0 dz z^{k+\bar{n}_{\alpha}-\bar{n}'_{\alpha}} e^{\xi_{\alpha}(\bar{\mathbf{T}}-\bar{\mathbf{T}}', z^{-1})} \times \\ \times \tau(\mathbf{n}, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{n}} + \mathbf{1}_{\alpha}, \bar{\mathbf{T}} - [z]_{\alpha}) \tau(\mathbf{n}, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{n}} - \mathbf{1}_{\alpha}, \bar{\mathbf{T}} + [z]_{\alpha}), \end{aligned} \quad (6.6)$$

где

$$\begin{aligned} [z]_{\alpha} = \mathbf{1}_{\alpha} \otimes \left(1, z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{3}, \dots \right), \quad [z^{-1}]_{\alpha} = \mathbf{1}_{\alpha} \otimes \left(1, \frac{1}{z}, \frac{1}{2z^2}, \frac{1}{3z^3}, \dots \right), \\ \xi_{\alpha}(\mathbf{T}, x) = \sum_{i=1}^{\infty} T_{\alpha, i} x^i. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Мы получили таким образом бесконечный набор билинейных уравнений для тау-функции, индексруемый целым числом k , который включает при $k = 0$ уравнение для обычной N -компонентной двумеризованной иерархии Тоды (2dTL-иерархии). В действительности эта иерархия эквивалентна $2N$ -компонентной иерархии КП, как видно из (6.6).

Особенно интересно получить систему билинейных уравнений относительно только переменных $\{\mathbf{T}, \mathbf{n}\}$ (существующую в замкнутой форме лишь при $k \geq 0$, иначе нельзя избежать вкладов от полюсов в правой части (6.6)). Подставив $\bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{T}}'$, $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}}'$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha}(\mathbf{n} + \mathbf{n}') \oint_{\infty} dz z^{k+n_{\alpha}-n'_{\alpha}-2} e^{\xi_{\alpha}(\mathbf{T}-\mathbf{T}', z)} \times \\ \times \tau(\mathbf{n} - \mathbf{1}_{\alpha}, \mathbf{T} - [z^{-1}]_{\alpha}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{T}}) \tau(\mathbf{n}' + \mathbf{1}_{\alpha}, \mathbf{T}' + [z^{-1}]_{\alpha}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{T}}) = 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где $\{\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{n}}\}$ играют уже роль параметров решений (данную иерархию можно называть N -компонентной изомонодромной иерархией КП; в отличие от обычного случая, N -компонентная изомонодромная 2dTL-иерархия не эквивалентна $2N$ -компонентной изомонодромной иерархии КП). Мы собираемся вернуться к детальному изучению этих иерархий в отдельной работе, а сейчас лишь приведем несколько примеров.

6.3. Примеры изомонодромных иерархий. Простейшим примером является однокомпонентная изомонодромная 2dTL-иерархия, определяемая следующими билинейными уравнениями:

$$\oint_{\infty} dz z^{k-n+n'-2} e^{\xi(\mathbf{T}-\mathbf{T}', z)} \tau(n+1, \mathbf{T} - [z^{-1}], \bar{n}, \bar{\mathbf{T}}) \tau(n'-1, \mathbf{T}' + [z^{-1}], \bar{n}', \bar{\mathbf{T}}') = \\ = \oint_0 dz z^{k-\bar{n}+\bar{n}'} e^{\xi(\bar{\mathbf{T}}-\bar{\mathbf{T}}', z^{-1})} \tau(n, \mathbf{T}, \bar{n}-1, \bar{\mathbf{T}} - [z]) \tau(n', \mathbf{T}, \bar{n}'+1, \bar{\mathbf{T}} + [z]). \quad (6.9)$$

Поскольку все квазигрупповые операторы обладают фиксированным зарядом, в данном случае можно выбрать простую параметризацию $n = \bar{n} + q - 1$, $n' = \bar{n}' + q + 1$ и ввести функцию

$$\tau_n(\mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}) = \tau(n + q, \mathbf{T}, n, \bar{\mathbf{T}}), \quad (6.10)$$

так что уравнения (6.9) принимают вид

$$\oint_{\infty} dz z^{k-n+n'} e^{\xi(\mathbf{T}-\mathbf{T}', z)} \tau_n(\mathbf{T} - [z^{-1}], \bar{\mathbf{T}}) \tau_{n'}(\mathbf{T}' + [z^{-1}], \bar{\mathbf{T}}') = \\ = \oint_0 dz z^{k-n+n'} e^{\xi(\bar{\mathbf{T}}-\bar{\mathbf{T}}', z^{-1})} \tau_{n-1}(\mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}} - [z]) \tau_{n'+1}(\mathbf{T}', \bar{\mathbf{T}}' + [z]). \quad (6.11)$$

Легко показать, что у этой иерархии имеется только сдвинутое вакуумное решение

$$\tau_n(\mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}) = A e^{bn} \exp \left\{ \sum_{l>0} (-l T_l \bar{T}_l + \gamma_l T_l + \delta_l \bar{T}_l) \right\}. \quad (6.12)$$

Подставляя $\gamma = \sum_i \theta_i [t_i]$ и $\delta = \sum_i \theta_i [t_i^{-1}]$, мы в точности получаем зависящую от времен $\{\mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}\}$ часть (6.4).

В качестве следующего примера рассмотрим изомонодромное двухкомпонентное уравнение КП, которое представляет собой уже нетривиальную интегрируемую систему. Билинейные уравнения имеют вид

$$\oint_{\infty} dz z^{k-n_1+n'_1-2} e^{\xi_1(\mathbf{T}-\mathbf{T}', z)} \tau(n_1+1, n_2, \mathbf{T} - [z^{-1}]_1) \tau(n'_1-1, n'_2, \mathbf{T}' + [z^{-1}]_1) + \\ + (-1)^{n_1+n'_1} \oint_{\infty} dz z^{k-n_2+n'_2-2} e^{\xi_2(\mathbf{T}-\mathbf{T}', z)} \times \\ \times \tau(n_1, n_2+1, \mathbf{T} - [z^{-1}]_2) \tau(n'_1, n'_2-1, \mathbf{T}' + [z^{-1}]_2) = 0. \quad (6.13)$$

Теперь можно зафиксировать полный заряд $n_1 + n_2 = q$ и, выбрав параметризацию $n_1 = n - 1$, $n_2 = q - n$, $n'_1 = n' + 1$, $n'_2 = q - n_2$, написать уравнение

$$\oint_{\infty} dz z^{k-n+n'} e^{\xi_1(\mathbf{T}-\mathbf{T}', z)} \tau_n(\mathbf{T} - [z^{-1}]_1) \tau_{n'}(\mathbf{T}' + [z^{-1}]_1) + \\ + (-1)^{n+n'} \oint_{\infty} dz z^{k+n-n'-2} e^{\xi_2(\mathbf{T}-\mathbf{T}', z)} \tau_{n-1}(\mathbf{T} - [z^{-1}]_2) \tau_{n+1}(\mathbf{T}' + [z^{-1}]_2) = 0,$$

где знаковый множитель $(-1)^{n+n'}$ можно упростить, сделав переопределение

$$\tau_n(\mathbf{T}) \mapsto (-1)^{\frac{n^2+\chi(n)}{2}} \tau_n(\mathbf{T}),$$

где $\chi(n)$ является характером Дирихле (по модулю 4): $\chi(0) = \chi(2) = 0$, $\chi(1) = 1$, $\chi(3) = -1$. В результате получаем

$$\oint_{\infty} dz z^{k-n+n'} e^{\xi_1(\mathbf{T}-\mathbf{T}', z)} \tau_n(\mathbf{T} - [z^{-1}]_1) \tau_{n'}(\mathbf{T}' + [z^{-1}]_1) = \\ = \oint_0 dz z^{-k-n+n'} e^{\xi_2(\mathbf{T}-\mathbf{T}', z^{-1})} \tau_{n-1}(\mathbf{T} - [z]_2) \tau_{n+1}(\mathbf{T}' + [z]_2), \quad (6.14)$$

где в отличие от (6.6) параметр уравнения k входит в интегралы с различными знаками.

Приведем, наконец, несколько первых уравнений этой иерархии:

$$\begin{aligned} k=0, n=n' : \quad & D_{1,1} D_{2,1} \tau_n \cdot \tau_n + 2\tau_{n+1} \cdot \tau_{n-1} = 0, \\ & D_{1,2} D_{2,1} \tau_n \cdot \tau_n = 2D_{1,1} \tau_{n+1} \cdot \tau_{n-1}, \\ & (D_{1,1}^4 + 3D_{1,1}^2 - 4D_{1,1} D_{1,3}) \tau_n \cdot \tau_n = 0, \\ k=1, n=n' : \quad & D_{1,1}^2 \tau \cdot \tau = 2\tau_{n+1} \cdot \tau_{n-1}, \\ & D_{1,2} D_{2,1} \tau \cdot \tau + 2D_{2,1} \tau_{n+1} \cdot \tau_{n-1} = 0, \\ & D_{1,2}^2 \tau_n \cdot \tau_n = 2D_{1,1}^2 \tau_{n+1} \cdot \tau_{n-1}, \\ & (D_{1,1}^4 - 3D_{1,2}^2 + 8D_{1,1} D_{1,3}) \tau_n \cdot \tau_n + 12D_{1,2} \tau_{n+1} \cdot \tau_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе мы рассмотрели формализм свободных фермионов, который позволяет изучать представления W -алгебр по крайней мере при целых значениях центральных зарядов. Вершинные операторы определяются своими матричными элементами со вставками двух фермионов, которые фиксируются монодромиями вспомогательной линейной системы. Эти вершинные операторы могут быть выражены через решение соответствующей проблемы Римана–Гильберта.

Работа является лишь первым шагом в изучении этой проблемы (кроме уже хорошо известного и даже использующегося в различных приложениях абелева случая). Естественное развитие высказанных выше идей лишь только намечено в разделах 5 и 6. Мы собираемся вернуться отдельно к проблеме выражения изомонодромной тау-функции через детерминанты Фредгольма, которые могут оказаться достаточно полезными (хотя по-прежнему не вполне явными) представлениями этих достаточно сложных функций.

Другим вопросом, который, безусловно, заслуживает большего понимания, является связь между классом изомонодромных решений иерархий типа цепочки Тоды, которые были введены в нашей работе с помощью обобщенных соотношений Хироты, и классом решений, выделяющимся условиями Вирасоро или W -условиями.

Наконец, было бы чрезвычайно интересно изучить связь между конформными блоками W -алгебр общего положения и соответствующими изомонодромными тау-функциями с топологическими струнами по крайней мере на уровне топологических вершин, а также с наиболее загадочными четырехмерными (суперсимметричными) квантовыми калибровочными теориями – основным объектом интересов Игоря Викторовича Тютина.

Список литературы

- [1] А. Б. Замоладчиков, *ТМФ*, **65**:3 (1985), 347–359.
- [2] V. A. Fateev, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **280**:4 (1987), 644–660.
- [3] V. A. Fateev, S. L. Lukyanov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **3**:2 (1988), 507–520.
- [4] П. Бойкок, Г. Баттс, *ТМФ*, **98**:3 (1994), 500–508, arXiv:hep-th/9309146.
- [5] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [6] A. S. Losev, A. V. Marshakov, N. A. Nekrasov, “Small instantons, little strings and free fermions”, *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics*, v. 1, Ian Kogan Memorial Collection, eds. M. Shifman, A. Vainshtein, J. F. Wheeler, World Sci., Singapore, 2005, 581–621, arXiv:hep-th/0302191.
- [7] N. A. Nekrasov, A. Okounkov, “Seiberg–Witten theory and random partitions”, *The Unity of Mathematics: In Honor of the Ninetieth Birthday of I. M. Gelfand*, Progress in Mathematics, **244**, eds. P. Etingof, V. Retakh, I. M. Singer, Birkhäuser, Boston, MA, arXiv:hep-th/0306238.
- [8] E. Bettelheim, A. G. Abanov, P. Wiegmann, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**:8 (2007), F193–F208, arXiv:nlin/0605006.
- [9] L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.*, **91**:2 (2010), 167–197, arXiv:0906.3219.
- [10] N. A. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7**:5 (2003), 831–864, arXiv:hep-th/0206161; N. A. Nekrasov, V. Pestun, *Seiberg–Witten geometry of four dimensional $N = 2$ quiver gauge theories*, arXiv:1211.2240.
- [11] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **426**:1 (1994), 19–52, arXiv:hep-th/9407087.
- [12] P. Gavrylenko, A. Marshakov, *JHEP*, **02** (2016), 181, 32 pp., arXiv:1507.08794.
- [13] А. В. Замоладчиков, *Nucl. Phys. B*, **285**:3 (1987), 481–503; Ал. Б. Замоладчиков, *ЖЭТФ*, **90**:5 (1986), 1808–1818; С. А. Апикийн, Ал. Б. Замоладчиков, *ЖЭТФ*, **92**:1 (1987), 34–45.
- [14] I. M. Krichever, *Commun. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475, arXiv:hep-th/9205110.
- [15] A. Marshakov, *JHEP*, **07** (2013), 068, 24 pp., arXiv:1303.0753.
- [16] P. Gavrylenko, A. Marshakov, *JHEP*, **05** (2014), 097, 33 pp., arXiv:1312.6382.
- [17] O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, *JHEP*, **10** (2012), 038, 24 pp., arXiv:1207.0787.
- [18] P. Gavrylenko, *JHEP*, **09** (2015), 167, 24 pp., arXiv:1505.00259.
- [19] T. Miwa, M. Jimbo, E. Date, *Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000; V. G. Kac, J. W. van de Leur, *J. Math. Phys.*, **44**:8 (2003), 3245–3293, arXiv:hep-th/9308137.
- [20] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **14**:1 (1978), 223–267; **15**:1 (1979), 201–278; **15**:2, 577–629; **15**:3, 871–972; **16**:2 (1980), 531–584.
- [21] N. Kitanine, K. K. Kozłowski, J.-M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Stat. Mech.*, **2011**:12 (2011), P12010, 27 pp., arXiv:1110.0803.
- [22] K. K. Kozłowski, J.-M. Maillet, *Microscopic approach to a class of 1D quantum critical models*, arXiv:1501.07711.
- [23] А. К. Погребков, *УМН*, **58**:5(353) (2003), 163–196.
- [24] A. Okounkov, R. Pandharipande, *Ann. of Math. (2)*, **163**:2 (2006), 517–560, arXiv:math.AG/0204305; *The equivariant Gromov–Witten theory of $\mathbb{P}^1$* , arXiv:math.AG/0207233.
- [25] А. В. Маршakov, *ТМФ*, **154**:3 (2008), 424–450, arXiv:0706.2857.
- [26] A. Marshakov, N. A. Nekrasov, *JHEP*, **01** (2007), 104, 39 pp., arXiv:hep-th/0612019.
- [27] V. A. Fateev, A. V. Litvinov, *JHEP*, **01** (2012), 051, 39 pp., arXiv:1109.4042.
- [28] N. Iorgov, O. Lisovyy, J. Teschner, *Commun. Math. Phys.*, **336**:2 (2015), 671–694, arXiv:1401.6104.
- [29] A. Alexandrov, A. Zabrodin, *J. Geom. Phys.*, **67** (2013), 37–80, arXiv:1212.6049.