Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Олещко, А. Ю. Хренников, О применениях p -адики
в геофизике: линейная и квазилинейная диффузия водо-
масляной эмульсии, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 1, 179–
190

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:29:29

© 2017 г.

К. Олещко*, А. Ю. Хренников†

О ПРИМЕНЕНИЯХ p -АДИКИ В ГЕОФИЗИКЕ: ЛИНЕЙНАЯ И КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ДИФфуЗИЯ ВОДОМАСЛЯНОЙ ЭМУЛЬСИИ

Обсуждаются в весьма общей постановке возможности применения p -адики в геофизике с использованием p -адического диффузионного представления основных уравнений для динамики жидкости в капиллярах в пористых средах и сформулировано несколько математических проблем, мотивированных этими применениями. Подчеркивается роль p -адических всплесков как мощного средства получения аналитических решений диффузионных уравнений. Так как p -адическая диффузия является особым случаем фрактальной диффузии, а последняя тесно связана с фрактальной структурой конфигурационного пространства, p -адическая геофизика может рассматриваться как новый подход к фрактальному моделированию геофизических процессов.

Ключевые слова: основное уравнение, геофизика, водомасляная эмульсия, p -адические числа, p -адическая диффузия, квазилинейная p -адическая диффузия.

DOI: 10.4213/tmf9142

1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних 15 лет p -адика активно использовалась в исследовании различных проблем теоретической физики (в теории струн, космологии, квантовой теории, неупорядоченных системах (спиновых стеклах)) и биологии (в моделировании процесса мышления и в генетике). Недавно p -адические методы (в основном теория p -адических всплесков [1]–[4]) и особенно теория p -адических всплесков начали применяться в геофизике, например при моделировании диффузии в случайных

Статья написана при финансовой поддержке грантов SENER-CONACYT-Hidrocarburos, Yacimiento petrolero como un reactor fractal, № 168638 и Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), Mexico (грант 312-2015), Fronteras de la Ciencia.

*Centro de Geociencias, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Campus UNAM Juriquilla, Querétaro, México

†International Center for Mathematical Modelling in Physics and Cognitive Sciences, Mathematical Institute, Linnaeus University, Växjö, Sweden.
E-mail: andrei.khrennikov@lnu.se

пористых средах: динамики жидкости (масла, воды, водомасляной эмульсии [5]) в сложной сетке пор с известной топологией.

Основная мотивация использования p -адик в геофизике заключается в древоподобной структуре сети капилляров в случайных пористых средах. Жидкости текут сквозь эти древоподобные сети из одного капилляра в другой. Следовательно, может быть полезно моделировать их динамику, представив конфигурационное пространство в виде сети капилляров, т.е. работать не в евклидовом физическом пространстве, где находится пористая среда и которое моделируется с помощью вещественных чисел, а в древоподобном пространстве капилляров, которое может моделироваться как p -адическое (или ультраметрическое в более общем смысле) пространство.

Начиная с фундаментальных работ Воловича [6], [7], посвященных p -адическим струнам, p -адические методы широко распространились в теоретической физике: в теории струн, космологии, квантовой теории, в неупорядоченных системах – спиновых стеклах (см., например, [6]–[17] и ссылки в этих работах). Некоторые авторы, стимулированные развитием p -адической теоретической физики, использовали p -адику в исследовании различных проблем биологии, например при моделировании процесса мышления [18].

Здесь уместно сделать замечание о различных способах применения p -адик и в различных приложениях к физике и биологии. В фундаментальной физике, теории струн и квантовой теории p -адика применялась благодаря ее особым свойствам, связанным с теорией чисел. Эта исследовательская программа может быть названа “от теории чисел к физике” [9]. А вот в теории неупорядоченных систем изучалась ультраметричность, т.е. иерархическая структура матрицы Паризи может быть выражена с помощью p -адик [12], [13]. Эта исследовательская программа может быть названа “от ультраметрического представления иерархии к физике неупорядоченных систем”. В общем случае эта программа реализуется в ультраметрическом представлении иерархии сложных энергетических ландшафтов [13]–[15]. Такой же подход был использован в моделировании процесса мышления [18]: иерархия в ментальной информации была выражена с помощью ультраметрических древоподобных (например, p -адических) структур. Однако, в отличие от спиновых стекол, укладки белка или генетики, в моделировании мышления это ментальное ультраметрическое представление основывается на так называемых “физических деревьях”, деревьях нейронных сетей. Подход с “физическими деревьями” также используется в геофизических применениях. Здесь можно найти много древоподобных структур, от картин эрозии до сетей капилляров в случайных пористых средах. Такие физические древоподобные структуры могут быть представлены как ультраметрические, в частности p -адические, пространства [5].

В случае динамики частиц в таких физических древоподобных структурах мы можем изучать ультраметрические основные уравнения так же, как при моделировании кинетики сложных энергетических ландшафтов. Таким образом, в качестве первого шага может стать изучение моделей p -адической диффузии, используемых в работах [14], [15] (с использованием всплесков, как в работах [2]–[4]). Заметим, что уравнение p -адической диффузии является специальным математическим представлением аномальной диффузии¹⁾. Наша p -адическая модель может

¹⁾ В настоящее время существуют многочисленные теоретические и экспериментальные подтверждения того, что диффузионная модель для неупорядоченных систем отличается от классического описания Фика и является аномальной, т.е. дисперсия соответствующего стохастического процесса нелинейно зависит от времени (см., например, [19]).

рассматриваться как обобщение закона диффузии Фика для евклидовых решеток на случай p -адических древоподобных сетей капилляров (для сравнения см. [20], см. также [21], [22]).

Более детальный анализ приводит к некоторым обобщениям, которые мы планируем обсудить в этой статье. Во-первых, применение закона Аррениуса для вычисления вероятностей переходов, который активно изучается в динамике на сложных энергетических ландшафтах и выражает особую взаимосвязь между энергетическим потенциалом $U(x)$ и вероятностями переходов, не вполне обосновано в геофизических применениях. Мы должны продолжить нашу работу с общими вероятностями переходов (в духе исследований в работах [3], [4], [23]–[26]). В геофизике мы должны моделировать динамику баланса для некоторых типов жидкостей, например водомасляной эмульсии. Более того, важно делать различие между жидкостью, которая не связана с поверхностью капилляров (например, свободная нефть или вода), и той ее частью, которая связана с поверхностью капилляров (например, система “твердое тело + связанная нефть”). Такая многокомпонентная динамика представлена системой основных уравнений диффузионного типа. Нас интересует поведение решений таких систем.

Заметим, что дифференциальные операторы D^α , определяющие особый (но очень важный) класс p -адических уравнений диффузии (в частности, оператор Владимирова [9]), являются p -адическим аналогом дробного дифференцирования. Эти операторы связаны с древовидной структурой конфигурационного пространства, в нашем случае с сеткой капилляров в пористых средах. Эта особенность дробных дифференциальных операторов активно изучалась в стандартных применениях вещественного анализа в геофизике. Здесь дробные уравнения реакции-диффузии играют важную роль. Интересные модели, основанные на численном моделировании для дробной диффузии, были предложены и изучались в работах [27]–[33].

p -Адический диффузионный подход имеет некоторые преимущества. Одно из них чисто теоретическое: моделирование на “древовидном конфигурационном пространстве” (на сетках капилляров). Этот подход может привести к новым особенностям динамики, которые не заметны в вещественном аналитическом подходе с дробными дифференциальными операторами. Однако основным преимуществом является возможность найти аналитические решения дробных диффузионных уравнений с помощью теории p -адических всплесков [1]–[5], [34]. В данном случае ключевой момент заключается в том, что p -адические всплески являются собственными функциями p -адических дробных дифференциальных операторов. Это дает возможность найти явные решения, например, задачи Коши, в виде ряда всплесков. В то же время вещественный подход к дробной диффузии обычно основывается на численных методах, так как найти аналитические решения не просто (если вообще возможно).

Практически все исследования p -адической диффузии относятся к линейной динамике. Мы можем обратить внимание только на исследование квазилинейной p -адической диффузии (раздел 6, подробнее см. [34]; особый класс нелинейных стационарных уравнений также изучался в работе [24]). Нелинейные p -адические основные уравнения возникают естественным образом в случае таких физических процессов, в которых вероятности переходов зависят от плотности жидкости. Следовательно, их изучение является важным для применений, в частности в геофизике. В этой статье эту проблему мы сводим к краткому, но, как мы надеемся, стимулирующему изложению в разделе 6.

Наконец, заметим, что дробное дифференцирование связано с фрактальным анализом. Последний интенсивно применялся в геофизике, в частности одним из соавторов этой статьи [35], [36]. Следовательно, использование p -адической модели может рассматриваться как продолжение фрактального подхода к моделированию случайных пористых сред. В этом подходе представлено обобщение диффузионного закона Фика для евклидовых решеток на случай фрактальных решеток (см. [20]). В дискуссионном разделе указанной статьи было сделано ударение на следующем: *“для самоподобных фракталов мы ожидаем, что плотность $p(r, t)$ имеет разрывы на всех шкалах длин. Несмотря на эти разрывы, мы можем очень хорошо аппроксимировать $p(r, t)$ огибающей функцией, дающей решение уравнения диффузии; это является, по нашему мнению, обобщением диффузии Фика на случай фрактальных решеток”*. В настоящей статье мы рассматриваем обобщение диффузии Фика на случай p -адических древоподобных трехмерных сетей капилляров, наполненных водомасляной эмульсией, – прототипов сложных пористо-жидкостных систем.

2. p -АДИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ДРОБНЫЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Представим кратко основы p -адического преобразования Фурье и введем p -адические дробные дифференциальные операторы (подробнее см., например, [3]).

Напомним, что элементы поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ могут быть выражены в виде следующего ряда (который сходится относительно метрики, определенной с помощью p -адической оценки):

$$x = \sum_{j=m}^{\infty} \alpha_j p^j, \quad (1)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $\alpha_j = 0, 1, \dots, p-1$. В этом представлении мы полагаем, что $\alpha_m \neq 0$. Для ненулевого x , задаваемого рядом (1), p -адическая норма (аналог абсолютного значения) определяется как $|x|_p = p^{-m}$ и по определению $|0|_p = 0$.

Чтобы ввести характеры на поле $\mathbb{Q}_p$ (которое является аддитивной локально-компактной группой), мы должны ввести *дробную часть* $\{x\}_p$ от x : это блок ряда (1), соответствующий отрицательным степеням p .

p -Адический шар радиуса R , где R – некоторая степень p , с центром в точке $a \in \mathbb{Q}_p$ определяется как

$$B_R(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq R\}.$$

Заметим, что $\mathbb{Q}_p$ может рассматриваться как метрическое пространство с метрикой $d_p(x, y) = |x - y|_p$. Оно полно и локально-компактно, так как любой шар $B_R(a)$ является компактным. Эта метрика является так называемой ультраметрической, т. е. кроме стандартного неравенства треугольника

$$d_p(x, y) \leq d_p(x, z) + d_p(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{Q}_p,$$

она удовлетворяет *сильному неравенству треугольника*

$$d_p(x, y) \leq \max[d_p(x, z), d_p(z, y)], \quad x, y, z \in \mathbb{Q}_p.$$

Это следствие соответствующего неравенства для p -адической оценки

$$|x + y|_p \leq \max[|x|_p, |y|_p], \quad x, y \in \mathbb{Q}_p.$$

Последняя доказывается непосредственно с помощью определения p -адической нормы.

Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ вложено в $\mathbb{Q}_p$. Все арифметические операции (сложение, вычитание, умножение и деление) распространяются по непрерывности с $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{Q}_p$, превращая последнее в топологическое поле, т.е. все арифметические операции на $\mathbb{Q}_p$ являются непрерывными. Заметим, что возможность определить деление является следствием использования только простых чисел $p > 1$ в представленной конструкции. В принципе, можно продолжить работу с произвольно натуральными числами $p > 1$ и получить топологическое кольцо, т.е. алгебраическую структуру, на которой все приведенные выше арифметические операции (кроме деления) хорошо определены и являются непрерывными.

В частности, поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ является локально компактной группой по отношению к операции сложения. Следовательно, существует мера Хаара dx на $\mathbb{Q}_p$. Эта мера является положительной и инвариантной относительно сдвигов, т.е. $d(x+a) = dx$, и нормируется с помощью соотношения $\int_{B_1(0)} dx = 1$.

Функция $f: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ является *локально-постоянной*, если для каждой точки x существует шар с ненулевым радиусом, где f является константой. В p -адическом случае локально-постоянные функции являются непрерывными. В некотором смысле они играют ту же роль, что и гладкие функции в вещественном анализе.

Пусть $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ – линейное пространство локально-постоянных $\mathbb{C}$ -значных функций с компактным носителем. Это пространство называется пространством *основных функций Брюа–Шварца*. Это пространство является p -адическим аналогом пространства гладких (бесконечно дифференцируемых) функций с компактным носителем, определенных на вещественной прямой, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Последнее играет фундаментальную роль в теории распределений на вещественной прямой. Таким же образом $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ служит основой теории распределений на $\mathbb{Q}_p$.

Заметим, что мы рассматриваем функциональные пространства комплекснозначных или вещественнозначных функций p -адического аргумента. Это особая часть классического гармонического анализа на локально-компактных группах; особенность связана с дополнительными алгебраическими структурами умножением и делением на $\mathbb{Q}_p$. Во многих применениях использовались функции p -адического аргумента, принимающие значения в $\mathbb{Q}_p$ или в одном из его алгебраических расширений, например в одном из квадратичных расширений – аналогов поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ (см. [10]), включая соответствующую теорию распределений.

Теперь мы обратимся к конструкции теории распределений, основанной на пространстве пробных функций $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$. Это пространство может быть наделено естественной *топологией индуктивного предела*. Обозначим через $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ множество всех непрерывных линейных функционалов, *распределений Брюа–Шварца*, на $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$.

Для пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ ее *преобразование Фурье* определяется следующим образом:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = F[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x) e^{2\pi i \{x\xi\}_p} dx.$$

Оператор преобразования Фурье $F: \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ является топологическим изоморфизмом.

Как и в стандартной теории распределений, преобразование Фурье в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ определяется как оператор, сопряженный с оператором преобразования

Фурье в пространстве пробных функций $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$. Таким образом, для каждой пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$

$$\langle F[f], \varphi \rangle = \langle f, F[\varphi] \rangle.$$

p -Адический дробный дифференциальный оператор D^α (для $\alpha > 0$), известный в физике как *оператор Владимирова*²⁾, определяется с помощью следующего равенства:

$$D^\alpha \varphi(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^\alpha e^{-2\pi i \{\xi x\}_p} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p.$$

Оператор D^α может быть представлен как нелокальный интегральный оператор. Мы также подчеркиваем, что, как было доказано в [10], нельзя определить локальный дифференциальный оператор (имеющий характерные черты обыкновенных дифференциальных операторов).

Как было замечено, оператор Владимирова широко использовался в математической и теоретической физике, особенно в теории комплексных неупорядоченных систем. Недавно его начали применять в некоторых задачах геофизики [5].

3. p -АДИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ: СИСТЕМА КОЗЫРЕВА

Мы применяем формализм p -адических всплесков в разделах 5, 6. Новичок в p -адике может, в принципе, обратиться к концептуальному разделу 4 и затем вновь вернуться в настоящий раздел или продолжить работу без чтения этого раздела и просто узнать, что в случае p -адики существует уже хорошо разработанная теория всплесков. Эта теория подобна теории всплесков на вещественной прямой. Вместо характеристических функций отрезков, как в случае вещественных всплесков Хаара, в p -адическом случае используются характеристические функции шаров. Основной отличительной чертой базиса p -адических всплесков является то, что дробные дифференциальные операторы (операторы Владимирова) диагонализуются в этом базисе. Это делает аппарат всплесков еще более полезным для анализа дробных дифференциальных уравнений, чем соответствующий аппарат с вещественными всплесками.

Пространство функций $\phi: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$, которые являются квадратично-интегрируемыми относительно меры Хаара, обозначается символом $L^2(\mathbb{Q}_p)$.

Следуя пионерской работе Козырева [1], мы вводим следующую систему p -адических всплесков (аналог системы Хаара на вещественной прямой):

$$\psi_{q;mn}(x) = p^{-m/2} e^{2\pi i \{q(p^m x - n)\}_p} \Omega(|p^m x - n|_p), \quad x \in \mathbb{Q}_p,$$

где $q = 1, 2, \dots, p-1$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а n имеет вид $n = \sum_{s=j}^{-1} \alpha_s p^s$, где j является отрицательным целым числом и $\alpha_s = 0, \dots, p-1$. *Локальное окно* представлено математически с помощью функции $\Omega(\cdot)$ – характеристической функции $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. *Оконная функция* $\Omega(|\cdot|_p)$ является характеристической функцией единичного шара с центром в нуле, $B_1(0)$.

Важно заметить, что система p -адических всплесков $(\psi_{q;mn}(x))$ является ортонормированным базисом в $L^2(\mathbb{Q}_p)$.

²⁾Василий Сергеевич Владимирова был одним из основателей p -адической физики. Он активно использовал этот оператор в теории струн и в p -адических квантовых моделях (см., например, монографию [9]).

Как отмечалось выше, система p -адических всплесков диагонализует оператор дробного дифференцирования D^α (оператор Владимирова):

$$D^\alpha \psi_{q;mn}(x) = p^{\alpha(1-m)} \psi_{q;mn}(x). \quad (2)$$

Базис всплесков Козырева, введенный в этом разделе, является естественным аналогом базиса всплесков Хаара. Общая теория p -адических всплесков была представлена в монографии [3] (см. также [34]).

4. p -АДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ ДЛЯ СЕТЕЙ КАПИЛЛЯРОВ И УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ ЖИДКОСТЕЙ

Везде ниже переменная x принадлежит полю p -адических чисел и временная переменная t вещественна. Здесь x является координатой сети капилляров в пористой среде, каждая траектория капилляров в пористой среде выражена с помощью ветви p -адического дерева. Центр этого дерева выбирается как произвольная точка сети капилляров в пористой среде, он играет роль центра координат, т.е. это чисто математический объект; мы не приписываем такому центру никакого геологического смысла. Таким образом, приписывая p -адическое число x системе, мы знаем, в какой траектории капилляров она находится, и ничего больше. Таким образом, p -адическая модель дает схематическое представление сетей капилляров в пористой среде. В частности, размер капилляров не включен в геометрию. (Он может быть введен в модель с помощью коэффициентов уравнения аномальной реакции-диффузии; см., например, раздел 5.)

Исходя из динамики³⁾ мы находим концентрацию жидкости (нефти, воды или водомасляной эмульсии) в капиллярах. Однако мы не можем получить концентрацию жидкости в точно фиксированной точке евклидова физического пространства.

Мы также заметим, что каждый p -адический шар представляет пучок капиллярных траекторий: чем длиннее основание такого пучка, тем меньше радиус шара.

Рассмотрим жидкость, движущуюся в сети капилляров; обозначим ее концентрацию в капиллярах через $\rho(x, t)$. Динамика $\rho(x, t)$ описывается задачей Коши для следующего основного уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) = \int_{\mathbb{Q}_p} [v(x|y)\rho(y, t) - v(y|x)\rho(x, t)] dy, \quad (3)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad (4)$$

где $v(x|y)$ – вероятность перехода (в единицу времени) жидкости из капилляра y в капилляр x .

Если количество жидкости в рассматриваемой древоподобной сети капилляров сохраняется, то должен выполняться закон сохранения

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \rho(x, t) dx = \text{const} = \int_{\mathbb{Q}_p} \rho_0(x) dx. \quad (5)$$

³⁾Напомним, что динамика является вероятностной.

Это эквивалентно условию

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{Q}_p} \rho(x, t) dx = \int_{\mathbb{Q}_p} dx \int_{\mathbb{Q}_p} [v(x|y)\rho(y, t) - v(y|x)\rho(x, t)] dy. \quad (6)$$

И интеграл в правой части равен нулю.

Если вероятность перехода является симметричной,

$$v(x|y) = v(y|x), \quad (7)$$

то динамика существенно проще. Заметим, что для динамики жидкости в сети капилляров эта симметрия вероятностей переходов является естественной. Также естественно считать, что вероятность перехода возрастает с уменьшением p -адического расстояния между двумя капиллярами. Самая простая математическая модель такого поведения задается вероятностями переходов, зависящими от расстояния,

$$v(x|y) = v(|x - y|_p). \quad (8)$$

При моделировании динамики на сложных энергетических ландшафтах считается, что вероятность переходов определяется потенциалом типа Аррениуса, т. е.

$$v(|x - y|_p) = \frac{A(T)}{|x - y|_p} \exp \left\{ \frac{U(|x - y|_p)}{kT} \right\}. \quad (9)$$

Наиболее часто используется вероятность переходов⁴⁾

$$v(|x - y|_p) = \frac{1}{|x - y|_p^{\alpha+1}}.$$

Он приводит к дробным дифференциальным операторам Владимирова. В этом случае мы получаем p -адическую дробную диффузию:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) = D^\alpha \rho(x, t), \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x). \quad (10)$$

Однако, как указывалось в разделе 1, в геофизических применениях нет причин ограничивать вероятности переходов вероятностями, которые приводят к операторам Владимирова. Таким образом, надо разработать теорию для произвольной динамики следующего типа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) = \int_{\mathbb{Q}_p} v(|x - y|_p) [\rho(y, t) - \rho(x, t)] dy, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad (11)$$

(см. соответствующие математические результаты в работах [23], [3], [4], [25], [26]).

Теперь предположим, что имеются несколько типов жидкости в разных состояниях; они обозначены с помощью индекса $i = 1, 2, \dots, N-1$ (здесь мы делаем различие между, например, свободной нефтью и нефтью, связанной с поверхностью капилляров, а также между свободной и связанной водой). Обозначим их концентрации

⁴⁾ Она может быть получена с помощью выбора соответствующего энергетического потенциала $U(x)$.

в капиллярах через $\rho_i(x, t)$. Соответствующее основное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t}(x, t) = \sum_{j \neq i} (k_{ij}(x) \rho_j(x, t) - k_{ji} \rho_i(x, t)) + \int_{\mathbb{Q}_p} v_i(|x - y|_p) [\rho_i(y, t) - \rho_i(x, t)] dy, \quad (12)$$

$$\rho_i(x, 0) = \rho_{0i}(x). \quad (13)$$

Некоторые из коэффициентов переноса k_{ij} равны нулю; строго положительные коэффициенты перехода соответствуют нетривиальным переходам. Например, свободная нефть может быть захвачена поверхностью капилляров, и нефть, связанная с поверхностью капилляров, может покинуть поверхность, двигаясь сквозь капилляр.

Как и выше, мы можем с легкостью получить следующий простой, но важный (для обоснования модели) результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Из уравнений (12) следует закон сохранения полного числа “частиц”:

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \sum_i \rho_i(x, t) d(x) = \text{const} = \int_{\mathbb{Q}_p} \sum_i \rho_{0i}(x) dx. \quad (14)$$

Перечислим математические задачи, связанные с системой основных уравнений:

- 1) существование и единственность решения в классе “гладких” функций, например в пространстве Лизоркина⁵⁾;
- 2) аналитические формулы для решений (например, в виде рядов всплесков);
- 3) стационарные решения и аналитические формулы для них.

Для наших целей стационарные решения и особенно их капиллярные носители являются особенно интересными. Рассмотрим динамику нефти в случайной пористой среде.

Сначала рассмотрим “чистую нефть”, т. е. без водяной компоненты. Обозначим концентрацию нефти в капиллярах символом $\rho_1(x, t)$. Эта нефть не связана с твердыми поверхностями. Концентрация нефти, которая связана с поверхностью капилляров, обозначается символом $\rho_2(x, t)$. В нашей модели нефть течет в капиллярах, затем она может оказаться связанной с поверхностью капилляров и оставаться связанной некоторое время (нефть, связанная с твердым телом), а затем течь дальше и т. д.

Таким же образом мы можем моделировать капиллярную динамику водомасляных эмульсий. Геологически эта динамика означает концентрацию капелек нефти в подпучке сети капилляров в случайных пористых средах. В терминах евклидовой геометрии это не что иное, как описание процесса образования кластера капилляров, где нефтяные капельки концентрируются и растут в размерах, образуя шаг за шагом нефтяной микрорезервуар.

Такой нефтяной резервуар может создаваться не только в природе, в процессе геологической эволюции, но также “искусственно” как часть программы по добыче нефти и особенно при выборе ускоренных методов добычи нефти, где стимулируется поток жидкости из твердых матриц. С помощью соответствующим образом выбранных давлений (которые определяют вероятности переходов $v(x|y)$) можно сконцентрировать нефть в ограниченной подсетке капилляров.

⁵⁾ Решения в пространстве распределений не так интересны, так как $\rho_i(x, t)$ имеет физический смысл плотностей жидкостей.

5. ДИНАМИКА НЕФТИ: СВОБОДНОЙ И СВЯЗАННОЙ С ПОВЕРХНОСТЬЮ КАПИЛЛЯРОВ

Здесь мы кратко представим модель, предложенную в работе [5]. Обозначим концентрацию свободной жидкости в капиллярах через $\rho_1(x, t)$. Эта жидкость не связана с поверхностью капилляров. Концентрация жидкости, которая связана с поверхностью, обозначается через $\rho_2(x, t)$. Мы получаем следующие два уравнения баланса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_1(x, t) = -[K_1(x) + D_x^\lambda e^{\beta U_1(x)}] \rho_1(x, t) + K_2(x) \rho_2(x, t), \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_2(x, t) = K_1(x) \rho_1(x, t) - [K_2(x) + D_x^\lambda e^{\beta U_2(x)}] \rho_2(x, t), \quad (16)$$

где $\lambda > 0$ и $\beta > 0$ – параметры модели, описывающие соответственно степень дробности диффузии и степень связи с потенциалами $U_j(x)$, коэффициент перехода $K_1(x)$ выражает скорость реакции поглощения жидкости поверхностью капилляров, коэффициент перехода $K_2(x)$ выражает скорость реакции высвобождения поглощенной жидкости, $U_1(x)$ – потенциальная функция внутри x -й поры, а $U_2(x)$ – потенциальная функция, описывающая связь жидкости и поверхности капилляров в x -й траектории капилляров.

Можно показать, что в случае некоторых ограничений на коэффициенты переходов и потенциалы эта система имеет стационарное решение, сконцентрированное в p -адическом шаре, радиус которого определяется коэффициентами этой системы уравнений [5].

6. КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ДИФФУЗИЯ

Как указывалось в разделе 1, нелинейные эффекты играют важную роль в моделировании переноса жидкостей в пористых средах. Однако теория нелинейных p -адических уравнений диффузии до сих пор не разработана. Имеется единственный результат [34], который касается следующего уравнения *квазилинейной диффузии*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) = D^\alpha \rho(x, t) + \rho(x, t) f^{2m}(x, t), \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x). \quad (17)$$

Разлагая $\rho(x, t)$ по базису всплесков:

$$\rho(x, t) = \sum_{s,j,a} \Lambda_{s,j,a}(t) \psi_{s,j,a}(x), \quad (18)$$

мы получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов всплесков:

$$\frac{d\Lambda_{s,j,a}(t)}{dt} + p^{\alpha(1-j)} |s|_p \Lambda_{s,j,a}(t) + p^{-mj} \Lambda_{s,j,a}^{2m+1}(t) = 0. \quad (19)$$

Интегрируя (19), мы получаем

$$\frac{\Lambda_{s,j,a}^{2m}(t)}{p^{\alpha(1-j)} |s|_p + p^{-mj} \Lambda_{s,j,a}^{2m}(t)} = E_{s,j,a} e^{-2mp^{\alpha(1-j)} t}, \quad (20)$$

где $E_{s,j,a}$ – константы, которые могут быть найдены из разложения по базису всплесков начальной функции $\rho_0(x)$. Здесь ключевым моментом является то, что всплески являются собственными функциями оператора Владимирова D^α (см. (2)). Таким образом,

$$\Lambda_{s,j,a}(t) = \frac{(E_{s,j,a} p^{\alpha(1-j)} |s|_p)^{1/2m} e^{-2mp^{\alpha(1-j)}t}}{(1 - p^{-mj} E_{s,j,a} e^{-2mp^{\alpha(1-j)}t})^{1/2m}}. \quad (21)$$

Итак, мы можем найти аналитические выражения для всплесковых коэффициентов этого квазилинейного дробно-дифференциального уравнения диффузии. Этот результат (хотя и простой) стимулирует поиск аналитических решений, например с помощью p -адической теории всплесков, для более сложных нелинейных дробно-дифференциальных уравнений диффузии.

Список литературы

- [1] С. В. Козырев, “Теория всплесков как p -адический спектральный анализ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 149–158.
- [2] С. В. Козырев, “ p -Адические псевдодифференциальные операторы и p -адические всплески”, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 383–394.
- [3] S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, *Theory of P-adic Distributions: Linear and Nonlinear Models*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **370**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [4] S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, “The Cauchy problems for evolutionary pseudo-differential equations over p -adic field and the wavelet theory”, *J. Math. Anal. Appl.*, **375**:1 (2011), 82–98.
- [5] A. Khrennikov, K. Oleschko, M. de Jesús Correa López, “Application of p -adic wavelets to model reaction–diffusion dynamics in random porous media”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **22**:4 (2015), 809–822.
- [6] I. V. Volovich, “ p -Adic string”, *Class. Quantum Grav.*, **4**:4 (1987), L83–L87.
- [7] И. В. Волович, “ p -Адическое пространство-время и теория струн”, *ТМФ*, **71**:3 (1987), 337–340.
- [8] I. Ya. Aref’eva, B. G. Dragović, I. V. Volovich, “On the p -adic summability of the anharmonic oscillator”, *Phys. Lett. B*, **200**:4 (1988), 512–514.
- [9] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*, Series on Soviet and East European Mathematics, **1**, World Sci., Singapore, 1994.
- [10] A. Khrennikov, *p-Adic Valued Distributions in Mathematical Physics*, Mathematics and Its Applications, **309**, Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [11] V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, “Application of p -adic analysis to models of breaking of replica symmetry”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**:50 (1999), 8785–8791.
- [12] G. Parisi, N. Sourlas, “ p -Adic numbers and replica symmetry breaking”, *Eur. Phys. J. B*, **14**:3 (2000), 535–542.
- [13] V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov, S. V. Kozyrev, V. A. Osipov, “ p -Adic models of ultrametric diffusion constrained by hierarchical energy landscapes”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**:2 (2002), 177–189.
- [14] С. В. Козырев, “Ультраметрическая динамика как модель межбассейновой кинетики”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **41**:5 (2006), 28–38.
- [15] S. V. Kozyrev, “Ultrametric analysis and interbasin kinetics”, *p-Adic Mathematical Physics* (Belgrade (Serbia) and Montenegro, 15–21 September, 2005), AIP Conference Proceedings, **826**, eds. A. Yu. Khrennikov, Z. Rakic, I. V. Volovich, AIP, Melville, New York, 2006, 121–128.

- [16] S. Albeverio, R. Cianci, A. Yu. Khrennikov, “ p -Adic valued quantization”, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:2 (2009), 91–104.
- [17] S. V. Kozyrev, “Dynamics on rugged landscapes of energy and ultrametric diffusion”, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **2**:2 (2010), 122–132.
- [18] А. Ю. Хренников, *Моделирование процессов мышления в p -адических системах координат*, Физматлит, М., 2004.
- [19] D. Ben-Avraham, S. Havlin, *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [20] B. O’Shaughnessy, I. Procaccia, “Diffusion on fractals”, *Phys. Rev. A*, **32**:5 (1985), 3073–3083.
- [21] B. Berkowitz, R. P. Ewing, “Percolation theory and network modeling applications in soil physics”, *Surv. Geophys.*, **19**:1 (1998), 23–72.
- [22] J.-W. Kim, E. Perfect, H. Choi, “Anomalous diffusion in two-dimensional Euclidean and prefractal geometrical models of heterogeneous porous media”, *Water Resour. Res.*, **43** (2006), W01405.
- [23] A. N. Kochubei, *Pseudo-Differential Equations and Stochastics over Non-Archimedean Fields*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **244**, New York, 2001.
- [24] A. N. Kochubei, “Radial solutions of non-Archimedean pseudo-differential equations”, *Pacific J. Math.*, **269**:2 (2014), 355–369, arXiv: 1302.4850.
- [25] W. A. Zúñiga-Galindo, “Fundamental solutions of pseudo-differential operators over p -adic fields”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **109** (2003), 241–245.
- [26] W. A. Zúñiga-Galindo, “Parabolic equations and Markov processes over p -adic fields”, *Potential Anal.*, **28**:2 (2008), 185–200.
- [27] R. Metzler, J. Klafter, “The random walk’s guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach”, *Phys. Rep.*, **339**:1 (2000), 1–77.
- [28] R. Metzler, J. Klafter, “The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:31 (2004), R161–R208.
- [29] S. Fedotov, S. H. Kim, H. Pitsch, “Anomalous Knudsen diffusion and reactions in disordered porous media”, *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, **323–331** (2007).
- [30] B. I. Henry, T. A. M. Langlands, S. L. Wearne, “Anomalous diffusion with linear reaction dynamics: from continuous time random walks to fractional reaction–diffusion equations”, *Phys. Rev. E*, **74**:3 (2006), 031116, 15 pp.
- [31] K. Malek, M.-O. Coppens, “Knudsen self- and Fickian diffusion in rough nanoporous media”, *J. Chem. Phys.*, **119**:5 (2003), 2801–2811.
- [32] A. J. Dammers, M.-O. Coppens, “Anomalous Knudsen diffusion in simple pore models”, *Diff. Fund.*, **2** (2005), 14.1–14.2.
- [33] A. N. Kochubei, “Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion”, *J. Math. Anal. Appl.*, **340**:1 (2008), 252–281.
- [34] A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, “Non-Haar p -adic wavelets and their application to pseudo-differential operators and equations”, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **28**:1 (2010), 1–23.
- [35] K. Oleschko, J.-F. Parrot, G. Ronquillo, S. Shoba, G. Stoops, V. Marcelino, “Weathering: Toward a fractal quantifying”, *Math. Geology*, **36**:5 (2004), 607–627.
- [36] K. Oleschko, G. Korvin, B. Figueroa, M. A. Vuelas, A. S. Balankin, L. Flores, D. Carreón, “Fractal radar scattering from soil”, *Phys. Rev. E*, **67**:4 (2003), 041403; Erratum, **68**:3 (2003), 039904, 1 pp.