Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Котиков, Свойство максимальной трансцендентности: вычисление интегралов Фейнмана, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 3, 455–467

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9145>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:28:37

© 2017 г.

А. В. Котиков*

СВОЙСТВО МАКСИМАЛЬНОЙ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ: ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ФЕЙНМАНА

Рассмотрены примеры двухпетлевых двух- и трехточечных интегралов Фейнмана, для которых результаты расчетов обладают свойством максимальной трансцендентности.

Ключевые слова: метод уникальностей, многопетлевые вычисления, графен, оптическая проводимость, контрчлены.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9145>

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что популярное свойство максимальной трансцендентности, которое было введено в работах [1] для уравнения Балицкого–Фадына–Кураева–Липатова (БФКЛ) [2], [3] в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной модели Янга–Миллса (СЯМ) [4], применимо также для матриц аномальных размерностей (АР) операторов Вильсона твиста-2 и твиста-3 и для коэффициентной функции “глубоко неупругого рассеяния” (ГНР) в этой модели. Это свойство дает возможность восстановить результаты для АР [1], [5], [6] и для коэффициентных функций [7] без каких-либо прямых расчетов, используя соответствующие значения, полученные в КХД [8].

Подобное свойство проявляется и при вычислении большого класса интегралов Фейнмана (ИФ), в основном так называемых мастер-интегралов [9]. Результаты для большинства из них можно восстановить также без каких-либо прямых расчетов, если мы знаем несколько их коэффициентов разложения по обратной массе [10]. Заметим, что похожими свойствами обладают амплитуды, формфакторы и корреляционные функции (см. работы [11]–[13] и ссылки в них), найденные недавно в рамках $\mathcal{N} = 4$ СЯМ.

В этом кратком обзоре мы покажем, что в результатах для двухпетлевых двух- и трехточечных ИФ имеет место свойство максимальной трансцендентности (или

Работа была поддержана РФФИ (грант № 16-02-00790_a).

*Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: kotikov@theor.jinr.ru

Рис. 1. Примеры обычных и дуальных ИФ.

максимальной сложности); см. также работы [14]. Более того, мы продемонстрируем важность этого свойства для нахождения собственных значений матриц АР операторов Вильсона твиста-2.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИФ

Аргументы, основанные на свойствах максимальной трансцендентности, позволяют рассчитать большой класс ИФ простейшим способом. Рассмотрим результаты расчетов детально.

2.1. Прежде всего отметим, что далее мы будем рассматривать ИФ в импульсном пространстве. Однако удобно также работать и в дуальном координатном пространстве (см., например, работы [15]–[17]), где все импульсы диаграмм заменяются соответствующими координатами. Результаты интегрирования, конечно, не изменятся в результате такой процедуры. Однако графические представления ИФ различны: все петли (треугольники, n -точечные однопетлевые внутренние графы) должны быть заменены соответствующими цепочками (вершинами, n -точечными вершинами). Для некоторых простейших случаев такая замена показана на рис. 1, где тонкие линии соответствуют стандартному ИФ, а жирными показаны соответствующие дуальные графы. Более сложные случаи были рассмотрены, например, в препринте [18]. Интегрирования в дуальных графах проводятся по внутренним точкам. Правила интегрирования, включая процедуру интегрирования по частям (ИПЧ) [19], были рассмотрены в работах [15], [16].

В работах [15], [20] с использованием дуальной техники были вычислены α_s -поправки для продольной структурной функции ГНР. Все расчеты проводились для безмассовых диаграмм. В работах [21] эта техника получила свое обобщение на случай массивных ИФ. Некоторые недавние вычисления массивных дуальных ИФ можно найти также в работе [22].

2.2. Теперь вернемся в импульсное пространство. Применение к внутренним импульсам петель процедуры ИПЧ [19] приводит к соотношениям между различными ИФ и, таким образом, к необходимости вычислять только те из них, которые являются независимыми. Эти независимые диаграммы (которые, конечно, можно выбрать совершенно произвольно) называются мастер-интегралами [9].

Применение процедуры ИПЧ к самим мастер-интегралам приводит [21], [23] к дифференциальным уравнениям (ДУ) с неоднородными членами (НЧ), содержащими менее сложные диаграммы¹⁾. Применение процедуры ИПЧ к диаграммам в НЧ

¹⁾Эти менее сложные диаграммы содержат, как правило, меньшее число пропагаторов. Иногда их можно представить в виде диаграмм с меньшим числом петель, включающих, однако, некоторые “эффективные массы” (см., например, работы [10], [24] и ссылки в них).

Рис. 2. Двухпетлевые двухточечные диаграммы. Безмассовые и массивные пропагаторы показаны штриховыми и сплошными линиями соответственно.

Рис. 3. Двухпетлевые трехточечные диаграммы с независимыми верхними импульсами q_1, q_2 и условиями $q_1^2 = q_2^2 = 0$, $(q_1 + q_2)^2 \equiv q^2 \neq 0$. Определение штриховых и сплошных линий, как на рис. 2.

приводит к новым ДУ с новыми НЧ, содержащими еще менее сложные диаграммы (далее мы будем называть такие диаграммы менее² сложными). Повторив процедуру несколько раз, на последнем этапе можно получить НЧ, содержащие в основном диаграммы типа головастик, которые легко вычисляются (см. также обсуждения ниже в п. 2.3). Таким образом, решая ДУ на последнем этапе, мы воспроизводим диаграммы для НЧ из ДУ на предыдущем шаге. Повторив процедуру несколько раз, получаем результаты для первоначальных ИФ.

Данная схема была успешно использована для расчета двухпетлевых двухточечных [21], [23], [25] и трехточечных [26], [10] диаграмм с одной ненулевой массой. Процедура является мощным, но довольно сложным в использовании средством. Есть, однако, некоторые упрощения, которые основаны на представлении ИФ в виде ряда.

Действительно, разложение по обратной массе двухпетлевых двухточечных (см. рис. 2) и трехточечных (см. рис. 3) диаграмм с одной ненулевой массой (безмассовые и массивные пропагаторы показаны штриховыми и сплошными линиями соот-

ветственно) можно представить как²⁾

$$\text{FI} = \frac{\hat{N}}{q^{2\alpha}} \sum_{n=1} C_n (\eta x)^n \left\{ F_0(n) + \left[\ln(-x) F_{1,1}(n) + \frac{1}{\varepsilon} F_{1,2}(n) \right] + \right. \\ \left. + \left[\ln^2(-x) F_{2,1}(n) + \frac{1}{\varepsilon} \ln(-x) F_{2,2}(n) + \frac{1}{\varepsilon^2} F_{2,3}(n) + \zeta(2) F_{2,4}(n) \right] + \dots \right\}, \quad (1)$$

где $x = q^2/m^2$, $\eta = \pm 1$, а $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ для двухточечных и трехточечных случаев соответственно. В формуле (1) нормировочный множитель $\hat{N} = (\bar{\mu}^2/m^2)^{2\varepsilon}$, где $\bar{\mu} = 4\pi e^{-\gamma_E} \mu$ в стандартной $\overline{\text{MS}}$ -схеме и γ_E – постоянная Эйлера. Кроме того, размерность пространства-времени есть $D = 4 - 2\varepsilon$ и

$$C_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \equiv \hat{C}_n \quad (2)$$

для диаграмм, имеющих разрезы с двумя массивными частями (мы будем называть их диаграммами с $2m$ разрезами). Для диаграмм, имеющих разрезы с одной массивной частицей (диаграмм с m разрезами), $C_n = 1$.

Для диаграмм с m разрезами коэффициенты $F_{N,k}(n)$ должны иметь вид

$$F_{N,k}(n) \sim \frac{S_{\pm a, \dots}}{n^b}, \quad \frac{\zeta(\pm a)}{n^b}, \quad (3)$$

где $S_{\pm a, \dots} \equiv S_{\pm a, \dots}(j-1)$ – гармонические суммы,

$$S_{\pm a}(j) = \sum_{m=1}^j \frac{(\pm 1)^m}{m^a}, \quad S_{\pm a, \pm b, \pm c, \dots}(j) = \sum_{m=1}^j \frac{(\pm 1)^m}{m^a} S_{\pm b, \pm c, \dots}(m), \quad (4)$$

и $\zeta(\pm a)$ – числа Эйлера–Загiera,

$$\zeta(\pm a) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^m}{m^a}, \quad \zeta(\pm a, \pm b, \pm c, \dots) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^m}{m^a} S_{\pm b, \pm c, \dots}(m-1). \quad (5)$$

Для случая диаграмм с $2m$ разрезами коэффициенты $F_{N,k}(n)$ могут быть более сложными:

$$F_{N,k}(n) \sim \frac{S_{\pm a, \dots}}{n^b}, \quad \frac{V_{a, \dots}}{n^b}, \quad \frac{W_{a, \dots}}{n^b}, \quad (6)$$

где $V_{\pm a, \dots} \equiv V_{\pm a, \dots}(j-1)$ и $W_{\pm a, \dots} \equiv W_{\pm a, \dots}(j-1)$ с

$$V_a(j) = \sum_{m=1}^j \frac{\hat{C}_m}{m^a}, \quad V_{a,b,c,\dots}(j) = \sum_{m=1}^j \frac{\hat{C}_m}{m^a} S_{b,c,\dots}(m), \quad (7)$$

$$W_a(j) = \sum_{m=1}^j \frac{\hat{C}_m^{-1}}{m^a}, \quad W_{a,b,c,\dots}(j) = \sum_{m=1}^j \frac{\hat{C}_m^{-1}}{m^a} S_{b,c,\dots}(m). \quad (8)$$

²⁾Диаграммы, показанные на рис. 2 и 3, являются сложными двухпетлевыми ИФ, которые не содержат разрезов с тремя массивными пропагаторами. Таким образом, результаты для них должны быть выражены в виде комбинаций полилогарифмов. Заметим, что мы рассматриваем трехточечные диаграммы с независимыми верхними импульсами q_1 и q_2 , которые подчиняются условиям $q_1^2 = q_2^2 = 0$ и $(q_1 + q_2)^2 \equiv q^2 \neq 0$, где q – нижний импульс.

Коэффициенты, содержащие $V_{a,\dots}$ и $W_{a,\dots}$, могут давать вклад только в случае диаграмм с $2m$ разрезами. Происхождение этих коэффициентов связано с произведением рядов вида (1) с различными множителями $C_n = 1$ и $C_n = \hat{C}_n$.

В качестве примера рассмотрим двухпетлевые двухточечные диаграммы I_1 и I_{12} на рис. 2, изучавшиеся в работах [10]:

$$I_1 = \frac{\hat{N}}{q^2} \sum_{n=1} \frac{x^n}{n} \left\{ \frac{1}{2} \ln^2(-x) - \frac{2}{n} \ln(-x) + \zeta(2) + 2S_2 - 2\frac{S_1}{n} + \frac{3}{n^2} \right\}, \quad (9)$$

$$I_{12} = \frac{\hat{N}}{q^2} \sum_{n=1} \frac{x^n}{n^2} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(n!)^2}{(2n)!} \left(-2 \ln(-x) - 3W_1 + \frac{2}{n} \right) \right\}. \quad (10)$$

Из этих выражений можно видеть, что для соответствующих функций $F_{N,k}(n)$ мы получаем

$$F_{N,k}(n) \sim \frac{1}{n^{3-N}} \quad (N \geq 2), \quad (11)$$

если ввести для сумм $\Phi = (S, V, W)$ следующий уровень сложности:

$$\Phi_{\pm a} \sim \Phi_{\pm a_1, \pm a_2} \sim \Phi_{\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_m} \sim \zeta_a \sim \frac{1}{n^a} \quad \left(\sum_{i=1}^m a_i = a \right). \quad (12)$$

Число $3 - N$ определяет уровень трансцендентности (или сложности, или веса) коэффициентов $F_{N,k}(n)$. Свойство (11) существенно уменьшает количество возможных элементов в $F_{N,k}(n)$. Заметим, что уровень трансцендентности уменьшается для сингулярных частей диаграмм и/или для коэффициентов перед ζ -функциями и перед степенями логарифмов. Таким образом, если мы найдем эти более простые части, то сможем предсказать остальные, используя полученные результаты как анзац для неизвестных коэффициентов, которые должны иметь ту же структуру, но с более высоким уровнем трансцендентности.

Другие интегралы I -типа из работ [10] имеют аналогичную форму. Они были вычислены точно методом ДУ [21], [23].

Теперь рассмотрим двухпетлевые трехточечные диаграммы P_5 и P_{12} на рис. 3 и рассчитанные в работах [10]:

$$P_5 = \frac{\hat{N}}{(q^2)^2} \sum_{n=1} \frac{(-x)^n}{n} \left\{ -6\zeta_3 + 2(S_1\zeta_2 + 6S_3 - 2S_1S_2 + 4\frac{S_2}{n} - \frac{S_1^2}{n} + 2\frac{S_1}{n^2} + \right. \\ \left. + \left(-4S_2 + S_1^2 - 2\frac{S_1}{n} \right) \ln(-x) + S_1 \ln^2(-x) \right\}, \quad (13)$$

$$P_{12} = \frac{\hat{N}}{q^2} \sum_{n=1} \frac{x^n}{n^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \left\{ \frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} \left(S_1 - 3W_1 + \frac{1}{n} - \ln(-x) \right) + 12W_2 - 18W_{1,1} - \right. \\ \left. - 13S_2 + S_1^2 - 6S_1W_1 + 2\frac{S_1}{n} + \frac{2}{n^2} - 2 \left(S_1 + \frac{1}{n} \right) \ln(-x) + \ln^2(-x) \right\}. \quad (14)$$

Теперь коэффициенты $F_{N,k}(n)$ принимают вид [14], [27]

$$F_{N,k}(n) \sim \frac{1}{n^{4-N}} \quad (N \geq 3). \quad (15)$$

Диаграмма P_5 , а также диаграммы P_1 , P_3 и P_6 в [10] были рассчитаны методом ДУ [21], [23]. Чтобы получить результаты для P_{12} (и для всех остальных диаграмм в [10]), мы использовали несколько коэффициентов в разложении (1) этих диаграмм по обратной массе (как правило, нужно менее ста коэффициентов). Также мы использовали следующие аргументы.

- Если двухпетлевая двухточечная диаграмма со “схожей топологией” (например, I_{12} для P_{12}) уже вычислена, мы должны рассмотреть аналогичный набор базовых элементов для соответствующих коэффициентов $F_{N,k}(n)$ двухпетлевой трехточечной диаграммы, но с более высоким уровнем сложности.

- Пусть рассматриваемая диаграмма содержит сингулярности, ζ -функции и/или степени логарифмов. Обычно перед ведущей сингулярностью, самой большой степенью логарифма и самой старшей ζ -функцией коэффициенты очень простые, поэтому их зачастую можно восстановить непосредственно из первых нескольких коэффициентов разложения. Более того, нередко мы можем вычислить сингулярные части, используя другую технику (см. работы [10] для извлечения части, содержащей $W_1(n)$). Тогда мы должны разложить эти сингулярные части, найти основные элементы и использовать их (с соответствующим увеличением уровня сложности) для предсказания регулярной части диаграммы. Если необходимо найти значения ε -подавленных частей, тогда нужно еще раз увеличить уровень сложности для соответствующих базовых элементов.

Далее, используя анзац для $F_{N,k}(n)$ и несколько (как правило, не более ста) коэффициентов его разложения, которые можно вычислить точно, получим систему алгебраических уравнений для параметров анзаца. Решая эту систему, находим аналитические результаты для ИФ без их точных расчетов. Для проверки результатов нужно лишь вычислить еще несколько слагаемых в разложении (1) по обратной массе и сравнить их с предсказаниями нашего анзаца.

Таким образом, рассмотренные аргументы дают возможность найти результаты для многих сложных двухпетлевых трехточечных диаграмм без прямых расчетов. Некоторые вариации этой процедуры были успешно использованы при расчете диаграмм Фейнмана для многих процессов (см. работы [10], [24], [26], [28]).

Заметим, что свойства, подобные (11) и (15), наблюдались недавно [13] в так называемый двойном (операторном) разложении некоторых четырехточечных диаграмм.

2.3. Коэффициенты имеют структуру (11) и (15) с условием (12), которое сильно уменьшает количество возможных гармонических сумм. В свою очередь это ограничение соотносится с определенной формой ДУ для рассматриваемых ИФ. Эти ДУ могут быть записаны как [14], [27]

$$\left((x+a) \frac{d}{dx} - \bar{k}\varepsilon \right) \text{FI} = \text{менее сложные диаграммы} \equiv \text{FI}_1,$$

где a – некоторое число и $\bar{k}(x)$ – некоторая функция. Такая форма ДУ порождается процедурой ИПЧ для диаграмм, содержащих внутренний однопетлевой подграф с n хвостами, который, в свою очередь, может содержать произведение $k^{\mu_1} \dots k^{\mu_m}$ его внутренних импульсов, где $m = n - 3$. Действительно, для обычных степеней $\alpha_i = 1 + a_i\varepsilon$ пропагаторов подграфа с произвольными a_i соотношение ИПЧ дает

коэффициент³⁾ $D - 2\alpha_1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i + m \sim \varepsilon$ для $m = n - 3$. Важными примерами приложения этого правила являются диаграммы на рис. 2, планарная часть на рис. 3 (для случая $n = 3$) и диаграммы в [29]⁴⁾ (для случаев $n = 3$ и $n = 4$). Тем не менее отметим, что результаты для непланарных диаграмм на рис. 3 подчиняются правилу (15), но их подграфы не согласуются с этим правилом. Возможно, данное расхождение связано с тем фактом, что импульс, входящий в вершину подграфа, лежит на массовой поверхности. Прояснение ситуации требует дополнительных исследований.

Выбирая множество менее сложных фейнмановских интегралов FI_1 в виде диаграмм, имеющих внутренние подграфы с n хвостами, мы получим результаты, структура которых похожа на полученную выше в (15), но с уровнем сложности, меньшим на единицу. Следовательно, интегралы FI_1 должны подчиняться уравнению

$$\left((x + a_1) \frac{d}{dx} - \bar{k}_1 \varepsilon \right) \text{FI}_1 = \text{менее}^2 \text{ сложные диаграммы} \equiv \text{FI}_2. \quad (16)$$

Таким образом, мы получаем набор уравнений для всех ИФ FI_n :

$$\left((x + a_n) \frac{d}{dx} - \bar{k}_n \varepsilon \right) \text{FI}_n = \text{менее}^{n+1} \text{ сложные диаграммы} \equiv \text{FI}_{n+1}, \quad (17)$$

при этом последний набор FI_{n+1} содержит в основном головастики.

Более того, следуя статье [30], мы можем представить полученное выше множество неоднородных уравнений как однородное матричное уравнение

$$\frac{d}{dx} \widehat{\text{FI}} - \varepsilon \widehat{K} \widehat{\text{FI}} = 0 \quad (18)$$

для вектора

$$\widehat{\text{FI}} = \begin{pmatrix} \text{FI} \\ \text{FI}_1/\varepsilon \\ \vdots \\ \text{FI}_n/\varepsilon^n \end{pmatrix},$$

где матрица $\widehat{K}$ содержит функции $\bar{k}_j/(x + a_j)$ как элементы. Форма (18) очень популярна в настоящее время (см. недавний обзор [31] и обсуждения в нем).

Заметим, что в реальных расчетах для FI_n удобно сделать следующую замену:

$$\text{FI}_n = \widetilde{\text{FI}}_n \overline{\text{FI}}_n,$$

где член $\overline{\text{FI}}_n$ удовлетворяет соответствующему однородному уравнению

$$\left((x + a_n) \frac{d}{dx} - \bar{k}_n \varepsilon \right) \overline{\text{FI}}_n = 0. \quad (19)$$

³⁾См., например, уравнения (1) и (23) в первой и второй работах в [15] соответственно. Заметим, что эти результаты были получены в координатном пространстве и применялись для дуальных диаграмм. Результаты в импульсном пространстве такие же. Отметим также, что для внутренней петли, соответствующей случаю $n = 2$, удобно взять индекс в виде $\alpha_2 = 2 + a_2 \varepsilon$.

⁴⁾Автор благодарит Рутгера Боелса за информацию о работе [29].

Эта замена упрощает (17), приводя его к уравнению

$$(x + a_n) \frac{d}{dx} \widetilde{\text{FI}}_n = \widetilde{\text{FI}}_{n+1} \frac{\overline{\text{FI}}_{n+1}}{\overline{\text{FI}}_n}, \quad (20)$$

решение которого представимо в виде

$$\widetilde{\text{FI}}_n(x) = \int_0^x \frac{dx_1}{x_1 + a_n} \widetilde{\text{FI}}_{n+1}(x_1) \frac{\overline{\text{FI}}_{n+1}(x_1)}{\overline{\text{FI}}_n(x_1)}. \quad (21)$$

Обычно можно провести некоторые сокращения в отношении $\overline{\text{FI}}_{n+1}/\overline{\text{FI}}_n$, а иногда оно равно единице. В последнем случае уравнение (21) совпадает с определением полилогарифмов Гончарова (см. обзор [32] и ссылки в нем).

Ряды (9), (10) и (13) можно записать в виде комбинации полилогарифмов Нильсона [33] и Ремидди–Вермасерена [34] с весом $4 - N$ (см. работы [10], [26]). Более сложные случаи были рассмотрены в работе [35].

3. $\mathcal{N} = 4$ СЯМ

АР управляют нарушением скейлинга Бьёркена для партонных распределений (т. е. для матричных элементов операторов Вильсона твиста-2) в рамках квантовой хромодинамики (КХД). Уравнения БФКЛ и Докшицера–Грибова–Липатова–Альтарелли–Паризи (ДГЛАП) [36] пересуммируют соответственно вклады, содержащие $\alpha_s \ln(1/x_B)$, и вклады, содержащие $\alpha_s \ln(Q^2/\Lambda^2)$, т. е. наиболее важные вклады в разных кинематических областях переменной Бьёркена x_B и “массы” Q^2 виртуального фотона в лептон-адронном ГНР. Таким образом, они являются краеугольным камнем при анализе экспериментальных данных лептон-нуклонных и нуклон-нуклонных процессов рассеяния. В суперсимметричном обобщении КХД эти уравнения сильно упрощаются [37]. В $\mathcal{N} = 4$ СЯМ собственные значения матрицы АР содержат только одну *универсальную* функцию со сдвинутыми аргументами [38], [1].

3.1. Трехпетлевой результат⁵⁾ для универсальной АР в $\mathcal{N} = 4$ СЯМ имеет вид

$$\gamma_{\text{uni}}(j) = \hat{a} \gamma_{\text{uni}}^{(0)}(j) + \hat{a}^2 \gamma_{\text{uni}}^{(1)}(j) + \hat{a}^3 \gamma_{\text{uni}}^{(2)}(j) + \dots, \quad \hat{a} = \frac{\alpha N_c}{4\pi}, \quad (22)$$

где

$$\frac{1}{4} \gamma_{\text{uni}}^{(0)}(j+2) = -S_1, \quad (23)$$

$$\frac{1}{8} \gamma_{\text{uni}}^{(1)}(j+2) = (S_3 + \bar{S}_{-3}) - 2\bar{S}_{-2,1} + 2S_1(S_2 + \bar{S}_{-2}), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{32} \gamma_{\text{uni}}^{(2)}(j+2) = & 2\bar{S}_{-3}S_2 - S_5 - 2\bar{S}_{-2}S_3 - 3\bar{S}_{-5} + 24\bar{S}_{-2,1,1,1} + \\ & + 6(\bar{S}_{-4,1} + \bar{S}_{-3,2} + \bar{S}_{-2,3}) - 12(\bar{S}_{-3,1,1} + \bar{S}_{-2,1,2} + \bar{S}_{-2,2,1}) - \\ & - (S_2 + 2S_1^2)(3\bar{S}_{-3} + S_3 - 2\bar{S}_{-2,1}) - S_1(8\bar{S}_{-4} + \bar{S}_{-2}^2 + \\ & + 4S_2\bar{S}_{-2} + 2S_2^2 + 3S_4 - 12\bar{S}_{-3,1} - 10\bar{S}_{-2,2} + 16\bar{S}_{-2,1,1}) \end{aligned} \quad (25)$$

⁵⁾Заметим, что в соответствии с [3] наша нормировка величины $\gamma(j)$ содержит дополнительный множитель $-1/2$ по сравнению со стандартной [1] и отличается знаком от АР из работы [8].

с $S_{\pm a, \pm b, \pm c, \dots} \equiv S_{\pm a, \pm b, \pm c, \dots}(j)$ и

$$\bar{S}_{-a, b, c, \dots}(j) = (-1)^j S_{-a, b, c, \dots}(j) + S_{-a, b, c, \dots}(\infty)(1 - (-1)^j). \quad (26)$$

Выражение (26) является аналитическим продолжением (на действительные и даже комплексные j) [39] гармонических сумм $S_{-a, b, c, \dots}(j)$.

Результаты для $\gamma_{\text{uni}}^{(3)}(j)$ [40], [41], $\gamma_{\text{uni}}^{(4)}(j)$ [42] и $\gamma_{\text{uni}}^{(5)}(j)$ [43] были получены из асимптотических уравнений Бете для операторов твиста-2 [44] и дополнительного вклада от так называемых обертывающих (wrapping) поправок. Аналогичные расчеты для операторов твиста-3 можно найти в [45].

3.2. Подобно уравнениям (11) и (15) введем уровень трансцендентности i для гармонических сумм $S_{\pm a}(j)$ и для констант Эйлера–Загира $\zeta(\pm a)$:

$$S_{\pm a, \pm b, \pm c, \dots}(j) \sim \zeta(\pm a, \pm b, \pm c, \dots) \sim \frac{1}{j^i} \quad (i = a + b + c + \dots). \quad (27)$$

Тогда базисные функции $\gamma_{\text{uni}}^{(0)}(j)$, $\gamma_{\text{uni}}^{(1)}(j)$ и $\gamma_{\text{uni}}^{(2)}(j)$ ведут себя, как $1/j^i$ с $i = 1$, $i = 3$ и $i = 5$ соответственно. Нарушение этого свойства могло бы происходить за счет вкладов в данный порядок теории возмущений из предыдущих порядков. Такие вклады можно генерировать и/или удалять с помощью соответствующих конечных перенормировок и/или путем переопределения константы связи. Такие вклады, однако, не появляются в рамках $\overline{\text{DR}}$ -схемы [46].

Известно, что в первом, втором и третьем порядках теории возмущений (с суперсимметричными соотношениями $C_F = C_A = N_c$ для цветовых факторов КХД) самые сложные вклады (с $i = 1$, $i = 3$ и $i = 5$ соответственно) являются такими же, как в КХД [8]. Это свойство позволяет найти универсальные АР $\gamma_{\text{uni}}^{(0)}(j)$, $\gamma_{\text{uni}}^{(1)}(j)$ и $\gamma_{\text{uni}}^{(2)}(j)$, не зная всех элементов матрицы АР [1], что было проверено точно для $\gamma_{\text{uni}}^{(1)}(j)$ в работе [5].

Заметим, что в $\mathcal{N} = 4$ СЯМ в некоторых частных случаях АР известны и для больших констант связи из струнных расчетов и так называемого соответствия AdS/QFT [47]. Хотелось бы отметить, что если свойство максимальной трансцендентности существует при малых константах связи, то иногда оно появляется и при больших (см., например, результаты для так называемых касповых АР при малых [48] и больших [49] константах взаимодействия; в обеих работах результаты получены из уравнения Бейсера–Идена–Штаудахера [50]). Такое соответствие отсутствует, однако, для интереспта померона, для которого результаты не обладают свойством максимальной трансцендентности при больших константах связи (см. работы [6], [51], [52]). Причина разницы в этих результатах для АР и интереспта померона неясна и нуждается в дополнительных исследованиях.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части этого краткого обзора мы рассмотрели диаграммы Фейнмана (в основном, мастер-интегралы), подчиняющиеся принципу максимальной трансцендентности (11), (12) и (15). Его применение дает возможность получить результаты для большинства интегралов без прямых расчетов.

Вторая часть посвящена универсальной АР $\gamma_{\text{uni}}(j)$ для $\mathcal{N} = 4$ СЯМ в первых трех порядках теории возмущений. Все результаты были получены с использованием принципа максимальной трансцендентности (27). Для первых трех порядков универсальные АР были извлечены непосредственно из соответствующих АР в КХД. Результаты для четырех, пяти и шести петель были получены из асимптотического уравнения Бете [44] вместе с некоторыми дополнительными вкладами (обертывающими поправками), приходящими из подхода Люшера.

Благодарности. Автор благодарит Оргкомитет V Международной конференции “Модели квантовой теории поля” (MQFT–2015) за приглашение.

Список литературы

- [1] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, “DGLAP and BFKL equations in the $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric gauge theory”, *Nucl. Phys. B*, **661**:1–2 (2003), 19–61; Erratum, **685**:1–3 (2004), 405–407, arXiv: hep-ph/0112346.
- [2] Л. Н. Липатов, “Реджезация векторного мезона и вакуумная особенность в неабелевых калибровочных теориях”, *ЯФ*, **23**:3 (1976), 642–656; V. S. Fadin, E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, “On the Pomeron singularity in asymptotically free theories”, *Phys. Lett. B*, **60**:1 (1975), 50–52; Е. А. Кураев, Л. Н. Липатов, В. С. Фадин, “Мультиреджевские процессы в теории Янга–Миллса”, *ЖЭТФ*, **71**:3 (1976), 840–855; “Сингулярность Померанчука в неабелевых калибровочных теориях”, **72**:2 (1977), 377–389; **45** (1977), 199; Я. Я. Балицкий, Л. Н. Липатов, “О померанчуковской особенности в квантовой хромодинамике”, *ЯФ*, **28**:2 (1978), 1597–1611; “Вычисление сечения мезон-мезонного взаимодействия в квантовой хромодинамике”, *Письма в ЖЭТФ*, **30**:6 (1979), 383–386.
- [3] V. S. Fadin, L. N. Lipatov, “BFKL pomeron in the next-to-leading approximation”, *Phys. Lett. B*, **429**:1–2 (1998), 127–134; M. Ciafaloni, G. Camici, “Energy scale(s) and next-to-leading BFKL equation”, *Phys. Lett. B*, **430**:3–4 (1998), 349–354.
- [4] L. Brink, J. H. Schwarz, J. Scherk, “Supersymmetric Yang–Mills theories”, *Nucl. Phys. B*, **121**:1 (1977), 77–92; F. Gliozzi, J. Scherk, D. I. Olive, “Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model”, *Nucl. Phys. B*, **122**:3 (1977), 253–290.
- [5] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, V. N. Velizhanin, “Anomalous dimensions of Wilson operators in $N = 4$ SYM theory”, *Phys. Lett. B*, **557**:1–2 (2003), 114–120.
- [6] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. I. Onishchenko, V. N. Velizhanin, “Three-loop universal anomalous dimension of the Wilson operators in $N = 4$ SUSY Yang–Mills model”, *Phys. Lett. B*, **595**:1–4 (2004), 521–529.
- [7] L. Bianchi, V. Forini, A. V. Kotikov, “On DIS Wilson coefficients in $\mathcal{N} = 4$ super Yang–Mills theory”, *Phys. Lett. B*, **725**:4–5 (2013), 394–401.
- [8] S. Moch, J. A. M. Vermaseren, A. Vogt, “The three-loop splitting functions in QCD: the non-singlet case”, *Nucl. Phys. B*, **688**:1–2 (2004), 101–134; J. A. M. Vermaseren, A. Vogt, S. Moch, “The third-order QCD corrections to deep-inelastic scattering by photon exchange”, *Nucl. Phys. B*, **724**:1–2 (2005), 3–182.
- [9] D. J. Broadhurst, “The master two loop diagram with masses”, *Z. Phys. C*, **47**:1 (1990), 115–124.
- [10] J. Fleischer, A. V. Kotikov, O. L. Veretin, “Analytic two-loop results for self-energy- and vertex-type diagrams with one non-zero mass”, *Nucl. Phys. B*, **547**:1–2 (1999), 343–374; “Applications of the large mass expansion”, *Acta Phys. Polon. B*, **29**:10 (1998), 2611–2625.
- [11] B. Eden, P. Heslop, G. P. Korchemsky, E. Sokatchev, “Hidden symmetry of four-point correlation functions and amplitudes in $\mathcal{N} = 4$ SYM”, *Nucl. Phys. B*, **862**:1 (2012), 193–231;

- L. J. Dixon, “Scattering amplitudes: the most perfect microscopic structures in the universe”, *J. Phys. A*, **44**:45 (2011), 454001; L. J. Dixon, J. M. Drummond, J. M. Henn, “Analytic result for the two-loop six-point NMHV amplitude in $\mathcal{N} = 4$ super Yang–Mills theory”, *JHEP*, **01** (2012), 024, 49 pp.; T. Gehrmann, J. M. Henn, T. Huber, “The three-loop form factor in $\mathcal{N} = 4$ super Yang–Mills”, *JHEP*, **03** (2012), 101, 35 pp.; A. Brandhuber, G. Travaglini, G. Yang, “Analytic two-loop form factors in $\mathcal{N} = 4$ SYM”, *JHEP*, **05** (2012), 082, 32 pp.; J. M. Henn, S. Moch, S. G. Naculich, “Form factors and scattering amplitudes in $\mathcal{N} = 4$ SYM in dimensional and massive regularizations”, *JHEP*, **12** (2011), 024, 29 pp.
- [12] O. Schlotterer, S. Stieberger, “Motivic multiple zeta values and superstring amplitudes”, *J. Phys. A*, **46**:47 (2013), 475401, 37 pp.; J. Broedel, O. Schlotterer, S. Stieberger, “Polylogarithms, multiple zeta values and superstring amplitudes”, *Fortsch. Phys.*, **61**:9 (2013), 812–870; S. Stieberger, T. R. Taylor, “Maximally helicity violating disk amplitudes, twistors and transcendental integrals”, *Phys. Lett. B*, **716**:1 (2012), 236–239.
- [13] B. Eden, *Three-loop universal structure constants in $\mathcal{N} = 4$ SYM Yang–Mills theory*, arXiv:1207.3112; R. G. Ambrosio, B. Eden, T. Goddard, P. Heslop, C. Taylor, “Local integrands for the five-point amplitude in planar $\mathcal{N} = 4$ SYM up to five loops”, *JHEP*, **01** (2015), 116, 34 pp.; D. Chicherin, R. Doobary, B. Eden, P. Heslop, G. P. Korchemsky, E. Sokatchev, “Bootstrapping correlation functions in $\mathcal{N} = 4$ SYM”, *JHEP*, **03** (2016), 031, 24 pp., arXiv:1506.04983; B. Eden, A. Sfondrini, “Three-point functions in $\mathcal{N} = 4$ SYM: the hexagon proposal at three loops”, *JHEP*, **02** (2016), 165, 18 pp., arXiv:1510.01242.
- [14] A. V. Kotikov, “The property of maximal transcendentality in the $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang–Mills”, *Subtleties in Quantum Field Theory: Lev Lipatov Festschrift*, ed. D. Diakonov, Petersburg Nuclear Physics Institute, Gatchina, 2010, 150–174, arXiv:1005.5029; “The property of maximal transcendentality: calculation of anomalous dimensions in the $\mathcal{N} = 4$ SYM and master integrals”, *ЭЧАЯ*, **44**:2 (2013), 719–743.
- [15] Д. И. Казаков, А. В. Котиков, “Метод уникальностей: многопетлевые вычисления в квантовой хромодинамике”, *ТМФ*, **73**:3 (1987), 348–361; D. I. Kazakov, A. V. Kotikov, “Total α_s correction to the deep-inelastic scattering cross-sections ratio $R = \sigma_L/\sigma_T$ in QCD”, *Nucl. Phys. B*, **307**:4 (1988), 721–762; Erratum, **345**:1 (1990), 299–300.
- [16] А. В. Котиков, “Метод вычисления моментов структурных функций глубоконеупругого рассеяния в квантовой хромодинамике”, *ТМФ*, **78**:2 (1989), 187–199.
- [17] A. V. Kotikov, “The Gegenbauer polynomial technique: the evaluation of a class of Feynman diagrams”, *Phys. Lett. B*, **375**:1–4 (1996), 240–248.
- [18] D. I. Kazakov, *Analytical methods for multiloop calculations: two lectures on the method of uniqueness*, Preprint JINR E2-84-410, JINR, Dubna, 1984.
- [19] K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov, “Integration by parts: The algorithm to calculate β -functions in 4 loops”, *Nucl. Phys. B*, **192**:1 (1981), 159–204; F. V. Tkachov, “A theorem on analytical calculability of 4-loop renormalization group functions”, *Phys. Lett. B*, **100**:1 (1981), 65–68; А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, Ю. Р. Хонконен, “ $1/n$ -Разложение: расчет индексов η и ν в порядке $1/n^2$ для произвольной размерности”, *ТМФ*, **47**:3 (1981), 291–306.
- [20] D. I. Kazakov, A. V. Kotikov, “On the value of the α_s -correction to the Callan–Gross relation”, *Phys. Lett. B*, **291**:1–2 (1992), 171–176.
- [21] A. V. Kotikov, “New method of massive Feynman diagrams calculation”, *Modern Phys. Lett. A*, **6**:8 (1991), 677–692; “New method of massive Feynman diagrams calculation. Vertex type functions”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **7**:9 (1992), 1977–1991.
- [22] J. M. Henn, J. C. Plefka, *Scattering Amplitudes in Gauge Theories*, Lecture Notes in Physics, **883**, Springer, Berlin, 2014.
- [23] A. V. Kotikov, “Differential equations method. New technique for massive Feynman diagrams calculation”, *Phys. Lett. B*, **254**:1–2 (1991), 158–164; “Differential equations method: the calculation of vertex type Feynman diagrams”, *Phys. Lett. B*, **259**:3 (1991), 314–322; “Differential equation method: the calculation of N point Feynman diagrams”,

- Phys. Lett. B*, **267**:1 (1991), 123–127; “New method of massive N point Feynman diagrams calculation”, *Modern Phys. Lett. A*, **6**:34 (1991), 3133–3141; E. Remiddi, “Differential equations for Feynman graph amplitudes”, *Nuovo Cimento A*, **110**:12 (1997), 1435–1452.
- [24] B. A. Kniehl, A. V. Kotikov, A. I. Onishchenko, O. L. Veretin, “Two-loop sunset diagrams with three massive lines”, *Nucl. Phys. B*, **738**:1–2 (2006), 306–316; B. A. Kniehl, A. V. Kotikov, “Calculating four-loop tadpoles with one non-zero mass”, *Phys. Lett. B*, **638**:5–6 (2006), 531–537; “Counting master integrals: integration-by-parts procedure with effective mass”, *Phys. Lett. B*, **712**:3 (2012), 233–234.
- [25] J. Fleischer, M. Yu. Kalmykov, A. V. Kotikov, “Two-loop self-energy master integrals on shell”, *Phys. Lett. B*, **462**:1–2 (1999), 169–177.
- [26] J. Fleischer, A. V. Kotikov, O. L. Veretin, “The differential equation method: calculation of vertex-type diagrams with one non-zero mass”, *Phys. Lett. B*, **417**:1–2 (1998), 163–172; A. Kotikov, J. H. Kühn, O. Veretin, “Two-loop formfactors in theories with mass gap and Z-boson production”, *Nucl. Phys. B*, **788**:1–2 (2008), 47–62.
- [27] А. В. Котиков, “Свойство максимальной трансцендентности: вычисление мастер-интегралов”, *ТМФ*, **176**:1 (2013), 98–108, arXiv:1212.3732.
- [28] B. A. Kniehl, A. V. Kotikov, Z. V. Merebashvili, O. L. Veretin, “Strong-coupling constant with flavor thresholds at five loops in the modified minimal-subtraction scheme”, *Phys. Rev. Lett.*, **97**:4 (2006), 042001, 4 pp.; “Heavy-quark pair production in polarized photon-photon collisions at next-to-leading order: Fully integrated total cross sections”, *Phys. Rev. D*, **79**:11 (2009), 114032, 9 pp.; B. A. Kniehl, A. V. Kotikov, O. L. Veretin, “Orthopositronium lifetime: analytic results in $\mathcal{O}(\alpha)$ and $\mathcal{O}(\alpha^3 \ln(\alpha))$ ”, *Phys. Rev. Lett.*, **101**:19 (2008), 193401, 4 pp.; “Orthopositronium lifetime at $\mathcal{O}(\alpha)$ and $\mathcal{O}(\alpha^3 \ln(\alpha))$ in closed form”, *Phys. Rev. A*, **80**:5 (2009), 052501, 11 pp.
- [29] T. Gehrmann, J. M. Henn, T. Huber, “The three-loop form factor in $\mathcal{N} = 4$ super Yang–Mills”, *JHEP*, **03** (2012), 101, 35 pp.
- [30] J. M. Henn, “Multiloop integrals in dimensional regularization made simple”, *Phys. Rev. Lett.*, **110**:25 (2013), 251601, 4 pp.; Erratum, **111**:3 (2013), 039902, 1 pp.
- [31] J. M. Henn, “Lectures on differential equations for Feynman integrals”, *J. Phys. A*, **48**:15 (2015), 153001, 35 pp.
- [32] C. Duhr, *Mathematical aspects of scattering amplitudes*, arXiv:1411.7538.
- [33] A. Devoto, D. W. Duke, “Table of integrals and formulae for Feynman diagram calculations”, *Riv. Nuovo Cimento*, **7**:6 (1984), 1–39.
- [34] E. Remiddi, J. A. M. Vermaseren, “Harmonic polylogarithms”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **15**:5 (2000), 725–754.
- [35] A. I. Davydychev, M. Yu. Kalmykov, “Massive Feynman diagrams and inverse binomial sums”, *Nucl. Phys. B*, **699**:1–2 (2004), 3–64.
- [36] В. Н. Грибов, Л. Н. Липатов, “Глубоко неупругое ер-рассеяние в теории возмущений”, *ЯФ*, **15**:4 (1972), 781–807; Л. Н. Липатов, “Партонная модель и теория возмущений”, *ЯФ*, **20**:1, 181–198; G. Altarelli, G. Parisi, “Asymptotic freedom in parton language”, *Nucl. Phys. B*, **126**:2 (1977), 298–318; Ю. Л. Докшицер, “Вычисление структурных функций для глубоко неупругого рассеяния и e^+e^- аннигиляция в теории возмущений квантовой хромодинамики.”, *ЖЭТФ*, **73**:4, 1216–1240.
- [37] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, “NLO corrections to the BFKL equation in QCD and in supersymmetric gauge theories”, *Nucl. Phys. B*, **582**:1–3 (2000), 19–43.
- [38] L. N. Lipatov, “Next-to-leading corrections to the BFKL equation and the effective action for high energy processes in QCD”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl. A*, **99**:1–2 (2001), 175–179.
- [39] А. В. Котиков, “Глубоко неупругое рассеяние: Q^2 -зависимость структурных функций”, *ЭЧАЯ*, **38**:1 (2007), 5–82; A. V. Kotikov, V. N. Velizhanin, *Analytic continuation of the Mellin moments of deep inelastic structure functions*, arXiv:hep-ph/0501274.

- [40] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. Rej, M. Staudacher, V. N. Velizhanin, “Dressing and wrapping”, *J. Stat. Mech.*, **2007**:10 (2007), P10003, 75 pp.; Z. Bajnok, R. A. Janik, T. Lukowski, “Four loop twist two, BFKL, wrapping and strings”, *Nucl. Phys. B*, **816**:3 (2009), 376–398.
- [41] A. V. Kotikov, A. Rej, S. Zieme, “Analytic three-loop solutions for image $\mathcal{N} = 4$ SYM twist operators”, *Nucl. Phys. B*, **813**:3 (2009), 460–483; M. Beccaria, A. V. Belitsky, A. V. Kotikov, S. Zieme, “Analytic solution of the multiloop Baxter equation”, *Nucl. Phys. B*, **827**:3 (2010), 565–606.
- [42] T. Lukowski, A. Rej, V. N. Velizhanin, “Five-loop anomalous dimension of twist-two operators”, *Nucl. Phys. B*, **831**:1–2 (2010), 105–132.
- [43] C. Marboe, V. Velizhanin, D. Volin, “Six-loop anomalous dimension of twist-two operators in planar $\mathcal{N} = 4$ SYM theory”, *JHEP*, **07** (2015), 084, 30 pp.
- [44] M. Staudacher, *JHEP*, **05** (2005), 054, 35 pp.; N. Beisert, M. Staudacher, “Long-range $\mathfrak{psu}(2,2|4)$ image Bethe ansätze for gauge theory and strings”, *Nucl. Phys. B*, **727**:1–2 (2005), 1–62.
- [45] M. Beccaria, “Three loop anomalous dimensions of twist-3 gauge operators in $\mathcal{N} = 4$ SYM”, *JHEP*, **09** (2007), 023, 21 pp.; M. Beccaria, V. Forini, T. Lukowski, S. Zieme, “Twist-three at five loops, Bethe ansatz and wrapping”, *JHEP*, **03** (2009), 129, 22 pp.; V. N. Velizhanin, “Six-Loop anomalous dimension of twist-three operators in $\mathcal{N} = 4$ SYM”, *JHEP*, **11** (2010), 129, 20 pp.
- [46] W. Siegel, “Supersymmetric dimensional regularization via dimensional reduction”, *Phys. Lett. B*, **84**:2 (1979), 193–196.
- [47] J. M. Maldacena, “The Large- N limit of superconformal field theories and supergravity”, *Internat. J. Theor. Phys.*, **38**:4 (1999), 1113–1133; *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**:2 (1998), 231–252; S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from non-critical string theory”, *Phys. Lett. B*, **428**:1–2 (1998), 105–114; E. Witten, “Anti de Sitter space and holography”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**:2 (1998), 253–291.
- [48] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, “On the highest transcendentality in $\mathcal{N} = 4$ SUSY”, *Nucl. Phys. B*, **769**:3 (2007), 217–255; M. K. Benna, S. Benvenuti, I. R. Klebanov, A. Scardicchio, “A test of the AdS/CFT correspondence using high-spin operators”, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:13 (2007), 131603, 4 pp.
- [49] B. Basso, G. P. Korchemsky, J. Kotanski, “Cusp anomalous dimension in maximally supersymmetric Yang–Mills theory at strong coupling”, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:9 (2008), 091601, 4 pp.; “Embedding nonlinear $O(6)$ sigma model into $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory”, *Nucl. Phys. B*, **807**:3 (2009), 397–423.
- [50] N. Beisert, B. Eden, M. Staudacher, “Transcendentality and crossing”, *J. Stat. Mech.*, **2007**:01 (2007), P01021, 31 pp., arXiv: hep-th/0610251.
- [51] R. C. Brower, J. Polchinski, M. J. Strassler, C. I. Tan, “The Pomeron and gauge/string duality”, *JHEP*, **12** (2007), 005, 62 pp.
- [52] M. S. Costa, V. Goncalves, J. Penedones, “Conformal Regge theory”, *JHEP*, **12** (2012), 091, 49 pp.; A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, “Pomeron in the $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric gauge model at strong couplings”, *Nucl. Phys. B*, **874**:3 (2013), 889–904; N. Gromov, F. Levkovich-Maslyuk, G. Sizov, S. Valatka, “Quantum spectral curve at work: from small spin to strong coupling in $\mathcal{N}=4$ SYM”, *JHEP*, **07** (2014), 156, 31 pp.