Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Вечернин, Асимптотика коэффициентов корреляции поперечных импульсов в модели со слиянием струн, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 2, 293–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:00:28

© 2017 г.

В. В. Вечернин*

АСИМПТОТИКА КОЭФФИЦИЕНТОВ КОРРЕЛЯЦИИ ПОПЕРЕЧНЫХ ИМПУЛЬСОВ В МОДЕЛИ СО СЛИЯНИЕМ СТРУН

В рамках модели со слиянием кварк-глюонных струн на поперечной решетке найдены асимптотики коэффициентов корреляции между наблюдаемыми в разнесенных быстрой интервалах при большой плотности струн для реалистического случая с неоднородным распределением струн в плоскости прицельного параметра. Асимптотики рассчитаны для трех типов корреляций: для корреляции между средними поперечными импульсами частиц с быстрой в этих интервалах, для корреляции между средним поперечным импульсом частиц в одном быстрой интервале и множественностью частиц в другом, а также для корреляции между множественностями заряженных частиц в этих интервалах. Показано, что обнаруженная ранее независимость асимптотики коэффициента корреляции между средними поперечными импульсами от величины дисперсии по числу частиц, образующихся при фрагментации струны, имеет место только в случае равномерного распределения струн в поперечной плоскости. Показано также, что найденные общие выражения для коэффициентов дальних корреляций, в частном случае с равномерным распределением струн в поперечной плоскости, переходят в формулы, полученные ранее другим методом, применимым только в этом простом случае.

Ключевые слова: взаимодействия адронов, высокие энергии, множественное рождение, кварк-глюонные струны, корреляции поперечного импульса.

DOI: 10.4213/tmf9146

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в рамках квантовой хромодинамики (КХД) не удастся получить количественное описание процессов множественного рождения частиц в мягкой области, которые доминируют при взаимодействии адронов высоких энергий, поскольку в этой области не выполняются условия применимости теории возмущений.

Работа поддержана РФФИ (грант № 15-02-02097) и Санкт-Петербургским государственным университетом (грант № 11.42.1055.2016).

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: v.vechernin@spbu.ru

Для количественного описания мягких процессов, в том числе и во всех существующих монтекарловских генераторах событий, таких как PYTHIA, VENUS, HIJING, AMPT, EPOS и др., используется имеющая качественное обоснование в рамках КХД модель кварк-глюонных (цветных) струн [1], [2].

Эта модель предполагает, что на первом этапе сильного взаимодействия между партонами сталкивающихся адронов происходит формирование некоторого количества протяженных объектов, которые в первом приближении можно рассматривать как одномерные струны. Последующая фрагментация этих струн в адроны позволяет описать процессы множественного рождения частиц при высоких энергиях [3]. В частности, удается воспроизвести экспериментально наблюдаемое равномерное распределение вторичных частиц по специальной переменной – быстрой

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{p_+}{p_-} = \frac{1}{2} \ln \frac{p_0 + p_z}{p_0 - p_z}, \quad (1)$$

используемой вместо продольной компоненты p_z импульса частицы в центральной области быстрого.

Более детальный анализ [3], [4] показывает, что частицы, образующиеся при фрагментации соседних сегментов струны, в среднем имеют и близкие значения скорости. Это наблюдение позволяет с помощью исследований корреляции между выходами частиц с импульсами в соседних или разнесенных быстрых интервалах (наблюдательных окнах) изучать корреляции между частицами, образующимися от распада соседних или пространственно удаленных сегментов струны. Изучение таких корреляций между двумя величинами F и B , измеренными для частиц с скоростями в двух разделенных окнах δy_F и δy_B , условно называемых передним и задним окнами наблюдения, – так называемых корреляций вперед–назад (FBC) – позволяет выделить вклады двух механизмов [5], [6], приводящих к их возникновению.

Одной из причин возникновения корреляций вперед–назад является процесс образования частиц от одного и того же или от соседних сегментов одной струны, что, как было отмечено выше, приводит лишь к корреляциям между выходами частиц с близкими значениями скорости (отличающимися не более, чем на $1.5 \div 2$ единицы), которые обычно называют ближними корреляциями (SRC). Ясно, что вклад этих корреляций будет исчезать при разнесении окон наблюдения по скорости.

Другой причиной возникновения корреляций вперед–назад являются флуктуации числа и характеристик (см. более подробно далее) образующихся источников (струн) от события к событию. Вклад этого механизма не зависит от величины зазора по скорости между окнами наблюдения и не убывает при их разнесении (в предположении, что при высоких энергиях образуются достаточно протяженные струны, дающие вклад в широкую область скоростей), поэтому он получил название дальних корреляций (LRC). В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением вклада только этого механизма.

Актуальность изучения именно дальних корреляций объясняется тем, что при переходе от рассеяния протонов к столкновениям тяжелых ядер при высоких энергиях можно ожидать образования конфигураций с большой плотностью струн в поперечной плоскости. Становится необходимым учитывать эффекты наложения и взаимодействия первичных струн с возможным их слиянием и образованием струнных кластеров, а также анализ влияния этих процессов на фрагментацию струн в наблюдаемые адроны. Определенные выше дальние корреляции как раз и позволяют

получить информацию об этих изменениях в числе и характеристиках образующихся струн [7].

В качестве величин F и B , между которыми изучаются корреляции, обычно выбирают [8] числа заряженных частиц n_F и n_B с быстрой частотой в интервалах δy_F и δy_B или их средние поперечные импульсы в данном событии

$$p_t^F \equiv \frac{1}{n_F} \sum_{i=1}^M p_t^{iF}, \quad p_t^B \equiv \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^M p_t^{iB}, \quad (2)$$

где $p_t^i = |\mathbf{p}_t^i|$. В этом случае возможно изучение корреляций трех типов: $n-n$, p_t-n и p_t-p_t .

Отметим, что для изучения возможных эффектов от слияния струн наиболее перспективным является изучение корреляций между средними событийными импульсами p_t^F и p_t^B . Это связано с тем, что средний поперечный импульс является интенсивной переменной в отличие от множественности, которая является экстенсивной величиной. Поэтому простые “объемные” флуктуации числа струн от события к событию (без их слияния), возникающие, например, из-за флуктуаций прицельного параметра, приводят к коррелированному изменению множественностей – чисел регистрируемых частиц n_F и n_B в этих окнах, но не приводят к корреляциям между средними поперечными импульсами p_t^F и p_t^B . Для возникновения последних необходимо синхронное изменение качества источников в интервалах δy_F и δy_B , например вследствие различного слияния струн в каждом конкретном событии [9].

Настоящая работа является непосредственным продолжением работы [10], в которой мы нашли асимптотику коэффициента (p_t-p_t) -корреляций при большой плотности струн для случая их равномерного распределения в плоскости прицельного параметра. В настоящей работе мы рассматриваем случай с произвольным распределением струн в поперечной плоскости, который гораздо ближе к ситуации, наблюдающейся в реальных столкновениях ядер высоких энергий. Этот случай существенно отличается от рассмотренного ранее, так как метод, который мы использовали в работе [10] для нахождения асимптотик коэффициентов корреляции, не допускает прямого обобщения на случай с неоднородным распределением струн.

Причина заключается в том, что в случае с однородным распределением струн в работе [10] мы сначала получали асимптотическое выражение для корреляционной функции $\langle p_t^B \rangle_{p_t^F}$, а затем, дифференцируя это выражение по p_t^F , находили коэффициент корреляции между поперечными импульсами p_t^F и p_t^B . При этом при расчете корреляционной функции $\langle p_t^B \rangle_{p_t^F}$ суммирование по всевозможным струнным конфигурациям приближенно вычислялось методом перевала путем нахождения симметричной перевальной точки. Принципиальное отличие случая с неоднородным распределением струн состоит в том, что предположение о наличии симметричной перевальной точки больше не применимо.

Поэтому в настоящей работе для нахождения асимптотик корреляционных коэффициентов используется альтернативный подход, основанный на расчете этих коэффициентов непосредственно через средние значения $\langle FB \rangle$, $\langle F^2 \rangle$, $\langle F \rangle$ и $\langle B \rangle$. Этим методом мы находим асимптотики коэффициентов всех упомянутых выше типов корреляций: $n-n$, p_t-n и p_t-p_t для случая с неоднородным распределением струн в поперечной плоскости. Мы также проверяем, что для частного случая с равномерным распределением струн найденные общие выражения переходят в формулы,

полученные методом перевала в работе [10] для $b_{p_t p_t}$ и в работах [11]–[14] для b_{nn} и $b_{p_t n}$.

Используемый в предлагаемой работе метод расчета корреляционных коэффициентов является обобщением метода, применявшегося в работах [6], [15], [16] для расчета коэффициента $(n-n)$ -корреляций в модели с независимыми источниками, на случай учета эффектов от слияния (цветных) струн. Отметим, что попытка учета эффектов слияния струн на величину (p_t-n) -корреляций в рамках развиваемого подхода предпринималась также в работах [17], [18], однако в них допускалась возможность только парного слияния струн и, как следствие, возникали источники только двух типов. В настоящей работе мы вычисляем асимптотики всех корреляционных коэффициентов, учитывая эффекты от слияния произвольного числа струн с возможностью их неоднородного распределения в плоскости прицельного параметра.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Численно величина корреляций между двумя величинами F и B , измеренными для частиц с быстротами, принадлежащими двум разделенным интервалам (окнам) δy_F и δy_B , характеризуется коэффициентом корреляции (см., например, работы [6], [15], [16], [19])

$$b_{FB} \equiv \frac{\langle FB \rangle - \langle F \rangle \langle B \rangle}{\langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2} = \frac{\text{cov}(F, B)}{D_F}, \quad (3)$$

где скобки $\langle \cdot \rangle$ означают усреднение по событиям. Физически бывает удобнее обсуждать величину корреляций не между самими величинами F и B , а между их относительными значениями $F/\langle F \rangle$ и $B/\langle B \rangle$. Коэффициент корреляций b_{FB}^{rel} между этими относительными значениями очевидным образом выражается через b_{FB} :

$$b_{FB}^{\text{rel}} = \frac{\langle F \rangle}{\langle B \rangle} b_{FB}. \quad (4)$$

При нахождении асимптотики коэффициентов корреляции b_{FB} (3) мы будем отдельно находить асимптотики $\text{cov}(F, B)$ и D_F , поскольку они представляют самостоятельный интерес. Так, например, отношение $\text{cov}(n_F, n_B)/\langle n_F \rangle \langle n_B \rangle$ позволяет найти так называемую двухчастичную корреляционную функцию C_2 (см., например, статью [6]).

Для учета эффектов от слияния струн на величину корреляций мы будем использовать метод, состоящий в введении решетки в плоскости прицельного параметра с площадью ячейки порядка поперечного сечения струны, который был предложен в работах [11], [20] и затем успешно использовался при дальнейших исследованиях этого явления в работах [9], [12], [21], [22]. Исходя из общепринятого радиуса струны $r_{\text{str}} = 0.2 \div 0.3$ фм и размеров реальных ядер мы видим, что для описания процесса их столкновения в поперечной плоскости потребуются решетки с большим числом ячеек – порядка 10^3 для случая столкновения тяжелых ядер.

В этом упрощенном подходе предполагается, что происходит слияние всех струн с центрами в данной ячейке поперечной решетки. В результате любая возникающая в событии струнная конфигурация характеризуется набором целых чисел C_η

$$C_\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_M\}, \quad (5)$$

где η_i – число центров струн, попавшее в i -ю ячейку, а M – общее число ячеек. В определение конфигурации C ,

$$C = \{C_\eta, C_n^F, C_n^B, C_p^F, C_p^B\}, \quad (6)$$

характеризующей данное событие, мы включаем также n_i^F и n_i^B – числа частиц, образовавшихся от распада струн i -й ячейки в переднем и заднем быстройных интервалах:

$$C_n^F = \{n_1^F, \dots, n_M^F\}, \quad C_n^B = \{n_1^B, \dots, n_M^B\}, \quad (7)$$

а также значения поперечных импульсов всех этих частиц (ниже мы везде опускаем индекс t):

$$C_p^F = \{p_1^{1F}, \dots, p_1^{n_1^F}; \dots; p_M^{1F}, \dots, p_M^{n_M^F}\} \quad (8)$$

для переднего и C_p^B (записывается аналогично) для заднего быстройного окна. В этих обозначениях введенные выше динамические переменные: число и средний поперечный импульс частиц, образовавшихся в данном событии с быстройными, попадающими в переднее окно, имеют вид

$$n_F = \sum_{i=1}^M n_i^F, \quad p_F \equiv \frac{1}{n_F} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i^F} p_i^{jF}, \quad (9)$$

и аналогично записываются формулы для p_B и n_B .

Предполагается, что в соответствии с физической картиной слияния струн [23] и интенсивным характером переменной, которой является поперечный импульс, обуславливающимся во введении, средний поперечный импульс $\bar{p}_i$ частиц, образующихся при распаде i -й ячейки поперечного пространства, в которой имеется перекрытие η_i струн, не зависит от числа образующихся частиц n_i^F или n_i^B , а зависит только от степени перекрытия струн η_i в этой i -й ячейке поперечного пространства. Поэтому усреднение (9) по конфигурациям C_p^F при фиксированных конфигурациях C_η и C_n^F дает выражение

$$\langle p_F \rangle_{C_\eta C_n^F} = \frac{1}{n_F} \sum_{i=1}^M n_i^F \bar{p}(\eta_i) \quad (10)$$

и аналогичное ему выражение для среднего $\langle p_B \rangle_{C_\eta C_n^B}$.

При вычислении средних, входящих в выражение (3) для коэффициента корреляции, мы будем также предполагать, что флуктуации числа струн в каждой ячейке η_i происходят независимым образом вокруг некоторого заданного среднего значения $\bar{\eta}_i$ с дисперсией, пропорциональной этому значению:

$$d_{\eta_i} = \omega_\eta \bar{\eta}_i, \quad (11)$$

и аналогично для флуктуаций числа частиц, образующихся от данной ячейки в переднем и заднем быстройных окнах, справедливы выражения

$$d_{n_i^F} = \omega_\mu \bar{n}_i^F, \quad d_{n_i^B} = \omega_\mu \bar{n}_i^B. \quad (12)$$

Поскольку мы ограничиваемся вычислением коэффициентов дальних корреляций, мы можем считать, что флуктуации n_i^F и n_i^B происходят независимым образом. Отметим, что данное приближение позволяет изучить влияние на коэффициенты корреляции характерного для реальных ядро-ядерных столкновений [24] отклонения распределений (11) и (12) от распределения Пуассона (для которого $\omega_\eta = \omega_\mu = 1$).

При нахождении асимптотик коэффициентов корреляции мы будем также предполагать, что все $\bar{\eta}_i \gg 1$. Как показывают оценки из статьи [25], это является неплохим приближением для случая столкновения тяжелых ядер при энергиях ЛНС, в которых достигаются значения $\bar{\eta} \approx 10$. Поэтому ниже при вычислениях мы будем использовать наличие в задаче двух малых параметров: $1/M \sim 10^{-3}$ и $1/\bar{\eta} \sim 10^{-1}$.

Мы также будем использовать конкретные зависимости среднего числа частиц $\bar{n}_i^F$ и $\bar{n}_i^B$, а также среднего поперечного импульса $\bar{p}(\eta_i)$ от степени перекрытия струн η_i в данной ячейке, которые ожидаемы в рамках картины, основанной на КХД [23], [26]–[28]:

$$\bar{n}_i^F = \mu_F \bar{n}(\eta_i) = \mu_F \sqrt{\eta_i}, \quad \bar{p}(\eta_i) = p_0 \sqrt[4]{\eta_i}, \quad (13)$$

и аналогичные зависимости для $\bar{n}_i^B$. Обобщение на случай другого вида этих зависимостей не представляет труда.

Наконец, для дисперсии d_{p_i} импульса отдельной частицы, рождающейся при распаде струнной конфигурации в i -й ячейке поперечного пространства, мы используем, основываясь на соображениях, приведенных после формулы (9), следующее выражение:

$$d_{p_i}(\eta_i) = \gamma \bar{p}^2(\eta_i). \quad (14)$$

Отметим, что для обычно используемых распределений $\rho(p)$ по абсолютной величине поперечного импульса частиц с одним размерным параметром, таких как $pe^{-p/\bar{p}}$, $pe^{-p^2/\bar{p}^2}$, $p(1 + p/\bar{p})^{-m}$, соотношение (14) всегда выполняется в силу соображений размерности. Безразмерный коэффициент γ зависит только от вида распределения и имеет величину порядка единицы. При этом согласно (13) размерный параметр $\bar{p}$, входящий в эти распределения, пропорционален $\sqrt[4]{\eta_i}$ [14], [23].

3. КОРРЕЛЯЦИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВЕННОСТЯМИ

Мы начинаем поиск асимптотик коэффициентов корреляции при большой плотности струн с учетом их неоднородного распределения в плоскости прицельного параметра с наиболее простого случая $(n-n)$ -корреляций между множествами частиц n_F и n_B в разнесенных быструх окнах. В этом случае согласно (3) мы должны вычислить в рамках описанной в предыдущем разделе модели следующие средние: $\langle n_F n_B \rangle$, $\langle n_F^2 \rangle$, $\langle n_F \rangle$ и $\langle n_B \rangle$.

Очевидным образом для среднего $\langle n_F \rangle$ имеем выражение

$$\langle n_F \rangle = \sum_{i=1}^M \langle n_i^F \rangle = \sum_{i=1}^M \langle \langle n_i^F \rangle^{C_n^F} \rangle^{C_\eta} = \mu_F \sum_{i=1}^M \langle \bar{n}(\eta_i) \rangle^{C_\eta} = \mu_F \sum_{i=1}^M \langle \bar{n}(\eta_i) \rangle^{\eta_i} \quad (15)$$

и аналогичное выражение для $\langle n_B \rangle$. Здесь и далее мы используем сокращенное обозначение для суммирования по всевозможным конфигурациям C :

$$\langle X \rangle^C = \sum_C P(C) X, \quad \langle X \rangle_{C_2}^{C_1} = \sum_{C_1} P_{C_2}(C_1) X, \quad (16)$$

где последнее равенство означает усреднение величины X по всевозможным конфигурациям C_1 при какой-то фиксированной конфигурации C_2 .

Для $\langle n_F n_B \rangle$ получаем формулу (везде ниже суммирование по индексам i и k ведется от 1 до M):

$$\begin{aligned} \langle n_F n_B \rangle &= \left\langle \left[\sum_i n_i^F \right] \left[\sum_k n_k^B \right] \right\rangle = \sum_{i,k} \langle \langle n_i^F \rangle^{C_n^F} \langle n_k^B \rangle^{C_n^B} \rangle^{C_\eta} = \mu_F \mu_B \sum_{i,k} \langle \bar{n}(\eta_i) \bar{n}(\eta_k) \rangle^{C_\eta} = \\ &= \mu_F \mu_B \left[\sum_i \langle \bar{n}^2(\eta_i) \rangle^{\eta_i} + \sum_{i \neq k} \langle \bar{n}(\eta_i) \rangle^{\eta_i} \langle \bar{n}(\eta_k) \rangle^{\eta_k} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая выражения (15) и (17), записываем для коррелятора равенство

$$\text{cov}(n_F, n_B) = \mu_F \mu_B \sum_i [\langle \bar{n}^2(\eta_i) \rangle^{\eta_i} - [\langle \bar{n}(\eta_i) \rangle^{\eta_i}]^2] = \mu_F \mu_B \sum_i d_{\bar{n}_i}, \quad (18)$$

где мы обозначили через $d_{\bar{n}_i}$ дисперсию $\bar{n}(\eta_i)$ (13), возникающую при флуктуациях η_i вокруг $\bar{\eta}_i$:

$$d_{\bar{n}_i} = \langle \bar{n}^2(\eta_i) \rangle^{\eta_i} - [\langle \bar{n}(\eta_i) \rangle^{\eta_i}]^2. \quad (19)$$

Отметим, что $\text{cov}(n_F, n_B) \sim M$, тогда как $\langle n_F n_B \rangle \sim M^2$.

При вычислении $\langle n_F^2 \rangle$ необходимо учесть, что

$$\begin{aligned} \langle n_F^2 \rangle &= \left\langle \left[\sum_i n_i^F \right]^2 \right\rangle = \sum_i \langle (n_i^F)^2 \rangle + \sum_{i \neq k} \langle n_i^F n_k^F \rangle = \sum_i \langle \langle [n_i^F]^2 \rangle^{C_n^F} \rangle^{C_\eta} + \\ &+ \sum_{i \neq k} \langle \langle n_i^F n_k^F \rangle^{C_n^F} \rangle^{C_\eta} = \sum_i \langle [\langle n_i^F \rangle^{C_n^F}]^2 + d_{n_F^i} \rangle^{C_\eta} + \sum_{i \neq k} \langle \langle n_i^F \rangle^{C_n^F} \langle n_k^F \rangle^{C_n^F} \rangle^{C_\eta}. \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь можно использовать формулы (12) и (13), что приводит к выражению

$$\langle n_F^2 \rangle = \sum_i \langle \mu_F^2 \bar{n}^2(\eta_i) + \omega_\mu \mu_F \bar{n}(\eta_i) \rangle^{\eta_i} + \mu_F^2 \sum_{i \neq k} \langle \bar{n}(\eta_i) \rangle^{\eta_i} \langle \bar{n}(\eta_k) \rangle^{\eta_k}. \quad (21)$$

Принимая во внимание (15) и (19), записываем для дисперсии равенство

$$D_{n_F} = \omega_\mu \mu_F \sum_i \langle \bar{n}(\eta_i) \rangle^{\eta_i} + \mu_F^2 \sum_i d_{\bar{n}_i} = \omega_\mu \langle n_F \rangle + \mu_F^2 \sum_i d_{\bar{n}_i}. \quad (22)$$

Наконец, используя определения (3) и (4), находим коэффициент $(n-n)$ -корреляции в относительных переменных с учетом слияния струн и их неоднородного распределения в плоскости прицельного параметра:

$$b_{nn}^{\text{rel}} = \frac{\mu_F^2 \sum_i d_{\bar{n}_i}}{\omega_\mu \langle n_F \rangle + \mu_F^2 \sum_i d_{\bar{n}_i}} = \frac{\mu_F \sum_i d_{\bar{n}_i}}{\omega_\mu \sum_i \langle \bar{n}(\eta_i) \rangle^{\eta_i} + \mu_F \sum_i d_{\bar{n}_i}}. \quad (23)$$

В заключение этого раздела убедимся, что полученное выражение (23) в случае с равномерным распределением струн в поперечной плоскости переходит в выражение, полученное другим методом в работах [11], [12] при большой плотности струн.

При больших значениях $\bar{\eta}_i \gg 1$ и дисперсиях d_{η_i} , удовлетворяющих соотношению (11), можно найти приближенное значение $d_{\bar{n}_i}$ в виде разложения по малому параметру

$$\alpha_i \equiv \frac{d_{\eta_i}}{\bar{\eta}_i^2} = \frac{\omega_{\eta}}{\bar{\eta}_i}. \quad (24)$$

Действительно, вспоминая (13), записываем формулы

$$\langle \bar{n}(\eta_i) \rangle^{\eta_i} = \bar{n}(\bar{\eta}_i) \left(1 - \frac{\alpha_i}{8} \right) = \sqrt{\bar{\eta}_i} - \frac{\omega_{\eta}}{8\sqrt{\bar{\eta}_i}}, \quad \langle \bar{n}^2(\eta_i) \rangle^{\eta_i} = \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) = \bar{\eta}_i, \quad (25)$$

и согласно (19)

$$d_{\bar{n}_i} = \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \frac{\alpha_i}{4} = \frac{\omega_{\eta}}{4}. \quad (26)$$

Мы использовали тот факт, что в первом приближении по α_i

$$\langle \eta_i^{\nu} \rangle^{\eta_i} = \bar{\eta}_i^{\nu} \left(1 - \frac{\nu(\nu-1)}{2} \alpha_i \right). \quad (27)$$

Разложение (27) справедливо для любых распределений по η_i , симметричных относительно $\bar{\eta}_i$: $P(\bar{\eta}_i + \eta_i) = P(\bar{\eta}_i - \eta_i)$, что, конечно, может достигаться только при $\bar{\eta}_i \gg 1$. В частности, этому условию удовлетворяет используемое нами гауссово распределение с $d_{\eta_i} = \omega_{\eta} \bar{\eta}_i \gg 1$ (11), для которого $\sigma_{\eta_i} = \sqrt{d_{\eta_i}} \ll \bar{\eta}_i$.

Подставляя теперь (25) и (26) в (23), получаем, что

$$b_{nn}^{\text{rel}} = \frac{M \mu_F \omega_{\eta} / 4}{\omega_{\mu} \sum_i [\sqrt{\bar{\eta}_i} + \omega_{\eta} / 8\sqrt{\bar{\eta}_i}] + M \mu_F \omega_{\eta} / 4}. \quad (28)$$

При равномерном распределении струн в поперечной плоскости $\sum_i \sqrt{\bar{\eta}_i} = M \sqrt{\bar{\eta}}$ в пределе $\bar{\eta}_i \rightarrow \infty$ формула (28) переходит в выражение

$$b_{nn}^{\text{rel}} = \frac{\omega_{\eta} \mu_F}{\omega_{\eta} \mu_F + 4 \omega_{\mu} \sqrt{\bar{\eta}}}, \quad (29)$$

полученное ранее в работах [11], [12].

4. КОРРЕЛЯЦИЯ МЕЖДУ ПОПЕРЕЧНЫМ ИМПУЛЬСОМ И МНОЖЕСТВЕННОСТЬЮ

Согласно (3) и (9), чтобы найти коэффициент корреляции

$$b_{p_n} = \frac{\text{cov}(p_B, n_F)}{D_{n_F}} \quad (30)$$

между множественностью n_F в переднем окне и поперечным импульсом p_B в заднем окне, необходимо найти также средние $\langle p_B \rangle$ и $\langle p_B n_F \rangle$.

Начнем с вычисления $\langle p_B \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle p_B \rangle &= \left\langle \frac{1}{n_B} \sum_i \sum_{j=1}^{n_i^B} p_i^{j_B} \right\rangle = \sum_i \left\langle \left\langle \frac{1}{n_B} \sum_{j=1}^{n_i^B} p_i^{j_B} \right\rangle^{C_p^B} \right\rangle^{C_n^B} = \\ &= \sum_i \left\langle \left\langle \frac{1}{n_B} n_i^B \bar{p}(\eta_i) \right\rangle^{C_n^B} \right\rangle^{C_{\eta}} = \sum_i \langle \langle p_i^B \rangle^{C_n^B} \bar{p}(\eta_i) \rangle^{C_{\eta}}, \end{aligned} \quad (31)$$

где мы использовали формулу, аналогичную (10), и обозначили возникающие весовые коэффициенты через ρ_i^B :

$$\rho_i^B \equiv \frac{n_i^B}{n_B} = \frac{n_i^B}{\sum_k n_k^B}. \quad (32)$$

В приложении A показано, что при $n_i^B \gg 1$ для гауссовых распределений с дисперсией, пропорциональной среднему (см. (12)), усреднение весового множителя ρ_i^B по конфигурациям C_n^B приводит к замене $n_i^B \rightarrow \bar{n}_i^B$. Отметим, что в работе [12] этот факт был доказан для пуассоновых распределений. Учитывая также (13), получаем, что

$$\langle \rho_i^B \rangle^{C_n^B} = \frac{\bar{n}_i^B}{\sum_k \bar{n}_k^B} = \frac{\bar{n}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)}, \quad (33)$$

что дает равенство

$$\langle p_B \rangle = \left\langle \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)} \right\rangle^{C_\eta}. \quad (34)$$

Усреднение этой дроби по струнным конфигурациям C_η рассмотрено в приложении B. В результате в рамках описанного в разделе 2 приближения мы находим, что

$$\langle p_B \rangle = \left(S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2} \right)^{-1} \sum_i \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \left[1 - \frac{3\omega_\eta}{32 \bar{\eta}_i} + \frac{\omega_\eta M}{4 S_{1/2}^2} - \frac{3\omega_\eta}{8 \sqrt{\bar{\eta}_i} S_{1/2}} \right], \quad (35)$$

где мы ввели сокращенные обозначения для сумм:

$$S_\nu = \sum_i \bar{\eta}_i^\nu, \quad S_0 = M, \quad S_{1/2} = \sum_i \bar{n}(\bar{\eta}_i). \quad (36)$$

Мы учли явный вид $\bar{n}(\bar{\eta}_i)$, обычно используемый для усредненного описания процесса слияния струн (13). Второй член в квадратной скобке имеет порядок $1/\bar{\eta}_i$ (мы предполагаем, что все $1/\bar{\eta}_i$ имеют одинаковый порядок малости), третий и четвертый пропорциональны $1/(M\bar{\eta}_i)$, все члены более высокого порядка по $1/\bar{\eta}_i$ и $1/M$ отброшены.

Процедура вычисления среднего $\langle p_B n_F \rangle$ проще. Проводя вычисления, аналогичные (15) и (31), получаем выражение

$$\langle p_B n_F \rangle = \left\langle \sum_i \langle \rho_i^B \rangle^{C_n^B} \bar{p}(\eta_i) \sum_k \langle n_k^F \rangle^{C_n^F} \right\rangle^{C_\eta}. \quad (37)$$

Используя теперь (33), находим, что

$$\langle p_B n_F \rangle = \left\langle \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)} \mu_F \sum_k \bar{n}(\eta_k) \right\rangle^{C_\eta} = \mu_F \sum_i \langle \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \rangle^{\eta_i}. \quad (38)$$

Далее проводим вычисления аналогично формулам (25). С учетом (13) приходим к выражению

$$\langle p_B n_F \rangle = \mu_F \sum_i \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \left(1 - \frac{3\omega_\eta}{32 \bar{\eta}_i} \right) = p_0 \mu_F \left(S_{3/4} - \frac{3\omega_\eta}{32} S_{-1/4} \right), \quad (39)$$

так как в этом случае в формуле (27) $\nu = 3/4$. Применяя далее найденное в предыдущем разделе выражение для $\langle n_F \rangle$ (см. формулы (15) и (25)):

$$\langle n_F \rangle = \mu_F \left(S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2} \right), \quad (40)$$

мы можем найти ковариацию $\text{cov}(p_B, n_F)$, стоящую в числителе формулы (30) для коэффициента $(p_t - n)$ -корреляции $b_{p_t n}$:

$$\text{cov}(p_B, n_F) = \langle p_B n_F \rangle - \langle p_B \rangle \langle n_F \rangle = p_0 \mu_F \omega_\eta \left(\frac{3 S_{1/4}}{8 S_{1/2}} - \frac{M S_{3/4}}{4 S_{1/2}^2} \right), \quad (41)$$

где мы использовали введенные выше обозначения для сумм (36). В знаменателе формулы (30) для коэффициента $(p_t - n)$ -корреляции $b_{p_t n}$ стоит дисперсия D_{n_F} , уже вычисленная нами в предыдущем разделе (см. формулу (22)), которую в новых обозначениях можно переписать как

$$D_{n_F} = \mu_F \omega_\mu \left(S_{1/2} - \omega_\eta \frac{S_{-1/2}}{8} \right) + \frac{M \mu_F^2 \omega_\eta}{4}. \quad (42)$$

Зная (41) и (42), согласно выражению (30) получаем, что

$$b_{p_t n} = \frac{\text{cov}(p_B, n_F)}{D_{n_F}} = \frac{p_0 \omega_\eta \left(\frac{3 S_{1/4}}{8 S_{1/2}} - \frac{M S_{3/4}}{4 S_{1/2}^2} \right)}{\omega_\mu \left(S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2} \right) + M \mu_F \frac{\omega_\eta}{4}}. \quad (43)$$

Для пересчета к относительным переменным (4) достаточно использовать значения для средних $\langle n_F \rangle$ (21) и $\langle p_B \rangle$ (35) в нулевом приближении:

$$\langle n_F \rangle = \mu_F S_{1/2}$$

и

$$\langle p_B \rangle = p_0 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}.$$

В результате приходим к равенству

$$b_{p_t n}^{\text{rel}} = \frac{\mu_F \omega_\eta \left(\frac{3 S_{1/4}}{8 S_{3/4}} S_{1/2} - \frac{M}{4} \right)}{\omega_\mu \left(S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2} \right) + M \mu_F \frac{\omega_\eta}{4}}. \quad (44)$$

При равномерном распределении струн в поперечной плоскости в пределе, когда $\bar{\eta}_i = \bar{\eta} \rightarrow \infty$, $S_\nu = M \bar{\eta}^\nu$ и формула (44) переходит в выражение

$$b_{p_t n}^{\text{rel}} = \frac{\omega_\eta \mu_F}{2(\omega_\eta \mu_F + 4\omega_\mu \sqrt{\bar{\eta}})}, \quad (45)$$

что согласуется с результатами, полученными ранее другим методом в [11]–[13] при большой плотности струн.

В заключение заметим, что этот результат можно также получить с использованием приближения, предложенного в работах [17], [18] для расчета коэффициента $(p_t - n)$ -корреляции в модели с двумя типами источников. Приближение состоит в замене весовых коэффициентов $\langle \rho_i^B \rangle^{C_n^B}$ (33) на их средние значения $\bar{\rho}_i$:

$$\langle \rho_i^B \rangle^{C_n^B} \rightarrow \bar{\rho}_i = \frac{\bar{n}(\bar{\eta}_i)}{\sum_k \bar{n}(\bar{\eta}_k)}. \quad (46)$$

Корректность этого приближения была подтверждена в статье [18] численными монтекарловскими расчетами.

В рассматриваемом приближении из (15), (31) и (37) мы получаем, что

$$\begin{aligned} \text{cov}(p_B, n_F) &= \mu_F \left\langle \sum_i \bar{\rho}_i \bar{p}(\eta_i) \sum_k \bar{n}(\eta_k) \right\rangle^{C_\eta} - \sum_i \bar{\rho}_i \langle \bar{p}(\eta_i) \rangle^{\eta_i} \mu_F \sum_k \langle \bar{n}(\eta_k) \rangle^{\eta_k} = \\ &= \mu_F \sum_i \bar{\rho}_i [\langle \bar{p}(\eta_i) \bar{n}(\eta_i) \rangle^{\eta_i} - \langle \bar{p}(\eta_i) \rangle^{\eta_i} \langle \bar{n}(\eta_i) \rangle^{\eta_i}], \end{aligned} \quad (47)$$

где учтено, что все члены при $i \neq k$ сокращаются. Используя теперь формулу (27) с $\nu = 3/4$, $\nu = 1/4$ и $\nu = 1/2$, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \text{cov}(p_B, n_F) &= \mu_F p_0 \sum_i \bar{\rho}_i \bar{\eta}_i^{3/4} \left[\left(1 - \frac{3\alpha_i}{32}\right) - \left(1 - \frac{3\alpha_i}{32}\right) \left(1 - \frac{\alpha_i}{8}\right) \right] = \\ &= \mu_F p_0 \sum_i \bar{\rho}_i \bar{\eta}_i^{3/4} \frac{\alpha_i}{8} = \mu_F p_0 \omega_\eta \sum_i \bar{\rho}_i \frac{\bar{\eta}_i^{-1/4}}{8}. \end{aligned} \quad (48)$$

В случае с равномерным распределением струн в плоскости прицельного параметра $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}$ и $\bar{\rho}_i = \bar{\rho} = 1/M$, поэтому

$$\text{cov}(p_B, n_F) = p_0 \mu_F \omega_\eta \frac{\bar{\eta}^{-1/4}}{8}, \quad (49)$$

что совпадает с (41), если учесть, что в этом пределе $S_\nu = M\bar{\eta}^\nu$.

5. КОРРЕЛЯЦИЯ МЕЖДУ ПОПЕРЕЧНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

Согласно выражениям (3) и (9) коэффициент корреляции между средним поперечным импульсом p_B частиц, зарегистрированных в данном событии в заднем окне, и средним поперечным импульсом p_F частиц в переднем окне определяется следующим образом:

$$b_{p_t p_t} = \frac{\text{cov}(p_F, p_B)}{D_{p_F}} = \frac{\langle p_F p_B \rangle - \langle p_F \rangle \langle p_B \rangle}{\langle p_F^2 \rangle - \langle p_F \rangle^2}. \quad (50)$$

Для его вычисления кроме найденного в предыдущем разделе значения $\langle p_B \rangle = \langle p_F \rangle$ нам необходимо найти также средние $\langle p_F p_B \rangle$ и $\langle p_F^2 \rangle$.

Поскольку конфигурации C_p^F , C_n^F в переднем и C_p^B , C_n^B в заднем быстротных интервалах флуктуируют независимым образом, усреднение по ним в $\langle p_F p_B \rangle$ производится так же, как и для $\langle p_B \rangle$ (31)–(34). В результате получаем, что

$$\langle p_F p_B \rangle = \left\langle \left[\frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)} \right]^2 \right\rangle^{C_\eta}. \quad (51)$$

Для $\langle p_F^2 \rangle$ вычисления несколько сложнее (для компактности записи мы пока будем опускать индекс F):

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle = & \left\langle \left[\frac{1}{n} \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} p_i^j \right]^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{n^2} \left[\sum_i \left(\sum_{j=1}^{n_i} (p_i^j)^2 + \sum_{j \neq j'}^{n_i} p_i^j p_i^{j'} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i \neq k} \left(\sum_{j=1}^{n_i} p_i^j \right) \left(\sum_{j'=1}^{n_k} p_k^{j'} \right) \right] \right\rangle. \end{aligned}$$

Теперь, выполняя усреднение по конфигурациям C_p , имеем

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle = & \left\langle \left\langle \frac{1}{n^2} \left[\sum_i (n_i \bar{p}^2(\eta_i) + n_i(n_i - 1) \bar{p}^2(\eta_i)) + \sum_{i \neq k} n_i n_k \bar{p}(\eta_i) \bar{p}(\eta_k) \right] \right\rangle^{C_n} \right\rangle^{C_\eta} = \\ = & \left\langle \left\langle \frac{1}{n^2} \left[\sum_i n_i d_{p_i}(\eta_i) + \left(\sum_i n_i \bar{p}(\eta_i) \right)^2 \right] \right\rangle^{C_n} \right\rangle^{C_\eta}, \end{aligned} \quad (52)$$

где для дисперсий $d_{p_i}(\eta_i) \equiv \bar{p}^2(\eta_i) - \bar{p}^2(\eta_i)$ согласно выражению (14) справедливы равенства $d_{p_i}(\eta_i) = \gamma \bar{p}^2(\eta_i)$. Из формулы (52) следует, что для усреднения по конфигурациям C_n вместо усреднения весового множителя $\rho_i = n_i/n$ (32), рассмотренного в предыдущем разделе, необходимо вычислить средние по конфигурациям C_n для факторов

$$\rho'_i = \frac{n_i}{n^2}, \quad \rho_i^2 = \frac{n_i^2}{n^2}, \quad \rho_{ik} = \frac{n_i n_k}{n^2}, \quad (53)$$

где $n \equiv \sum_k n_k$. Вычисления, аналогичные описанным в приложении A, приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} \langle p_F^2 \rangle = & \left(1 - \frac{\omega_\mu}{\mu_F \sum_k \bar{n}(\eta_k)} \right) \left\langle \left[\frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)} \right]^2 \right\rangle^{C_\eta} + \\ & + (\gamma + \omega_\mu) \left\langle \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\mu_F [\sum_k \bar{n}(\eta_k)]^2} \right\rangle^{C_\eta}, \end{aligned} \quad (54)$$

который, как мы видим, не сводится к простой замене $n_i \rightarrow \bar{n}(\eta_i)$, как это имело место выше при вычислении $\langle p_F p_B \rangle$ (51) и в предыдущем разделе при вычислении $\langle p_B \rangle$ (33).

Убедимся, что полученные формулы (51) для $\langle p_F p_B \rangle$ и (54) для $\langle p_F^2 \rangle$ при подстановке их в выражение для коэффициента $(p_t - p_t)$ -корреляций $b_{p_t p_t}$ (50) в случае с однородным распределением струн в поперечной плоскости приводят к выражению, полученному ранее в работе [10]. Для этого мы используем сформулированное в предыдущем разделе приближение (46). Для случая с однородным распределением струн, когда $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}$, при расчете $(p_t - p_t)$ -корреляций оно приводит к замене $\bar{n}(\eta_i) \rightarrow \bar{n}(\bar{\eta}_i) \equiv \bar{n} = \sqrt{\bar{\eta}}$.

В этом приближении исходя из формул (34) и (51) получаем выражение

$$\begin{aligned} \text{cov}(p_F, p_B) = & \frac{1}{M^2} \left\langle \left[\sum_i \bar{p}(\eta_i) \right]^2 \right\rangle^{C_\eta} - \frac{1}{M^2} \left[\left\langle \sum_i \bar{p}(\eta_i) \right\rangle^{C_\eta} \right]^2 = \\ = & \frac{1}{M^2} \sum_i [\langle \bar{p}^2(\eta_i) \rangle^{\eta_i} - (\langle \bar{p}(\eta_i) \rangle^{\eta_i})^2] = \frac{1}{M^2} \sum_i d_{\bar{p}_i} = \frac{p_0^2 \omega_\eta}{16 M \sqrt{\bar{\eta}}}, \end{aligned} \quad (55)$$

где аналогично $d_{\bar{n}_i}$ в (19) мы ввели дисперсии $d_{\bar{p}_i}$, которые согласно (27) равны

$$d_{\bar{p}_i} = p_0^2 (\langle \eta_i^{1/2} \rangle_{\eta_i} - (\langle \eta_i^{1/4} \rangle_{\eta_i})^2) = p_0^2 \sqrt{\bar{\eta}_i} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} = \frac{p_0^2 \omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i}}. \quad (56)$$

Для D_{p_F} в этом приближении, используя формулы (34), (51) и (54), получаем равенство

$$\begin{aligned} D_{p_F} &= \text{cov}(p_F, p_B) - \frac{\omega_\mu}{\mu \sum_k \bar{n}(\bar{\eta}_k)} \left[\frac{\sum_i \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i)}{\sum_k \bar{n}(\bar{\eta}_k)} \right]^2 + (\gamma + \omega_\mu) \frac{\sum_i \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i)}{\mu [\sum_k \bar{n}(\bar{\eta}_k)]^2} = \\ &= \frac{p_0^2 \omega_\eta}{16M \sqrt{\bar{\eta}}} - \omega_\mu \frac{\bar{p}^2}{\mu M \bar{n}} + (\gamma + \omega_\mu) \frac{\bar{p}^2}{\mu M \bar{n}} = \frac{p_0^2 \omega_\eta}{16M \sqrt{\bar{\eta}}} + \frac{\gamma p_0^2}{\mu M}, \end{aligned} \quad (57)$$

где мы воспользовались тем, что во втором и третьем слагаемых достаточно учесть $\bar{n}(\eta_i)$ и $\bar{p}(\eta_i)$ лишь в нулевом приближении: $\bar{p}(\eta_i) \rightarrow \bar{p}(\bar{\eta}_i) \equiv \bar{p} = p_0 \sqrt[4]{\bar{\eta}}$, так как поправки имеют порядок $(M\bar{\eta})^{-1}$ и малы по сравнению с сохраненными членами.

Из (55) и (57) получаем, что для случая с однородным распределением струн в плоскости прицельного параметра асимптотика коэффициента корреляции между поперечными импульсами $b_{p_t p_t}$ (50) принимает следующий вид (поскольку $\langle p_F \rangle = \langle p_B \rangle$, то $b_{p_t p_t} = b_{p_t p_t}^{\text{rel}}$):

$$b_{p_t p_t}^{\text{rel}} = \frac{\omega_\eta \mu_F}{\omega_\eta \mu_F + 16\gamma \sqrt{\bar{\eta}}}, \quad (58)$$

который совпадает с асимптотикой, полученной для этого случая другим методом в работе [10]. Из равенства (57) мы видим, что зависимость $b_{p_t p_t}$ от параметра ω_μ исчезает только для однородного распределения струн в поперечной плоскости.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках модели, учитывающей эффекты слияния цветных струн [28], найдены асимптотики коэффициентов дальних быстротных корреляций b_{FB} между наблюдаемыми F и B при большой плотности струн в случае их неоднородного распределения в плоскости прицельного параметра. Асимптотики рассчитаны для всех трех типов корреляций [8]: n - n , когда в качестве наблюдаемых берутся множественности заряженных частиц n_B и n_F в разнесенных быстротных интервалах, p_t - n , когда изучается корреляция между средним поперечным импульсом p_B частиц в одном интервале и их множественностью n_F в другом, и p_t - p_t , когда рассматривается корреляция между средними поперечными импульсами p_B и p_F в этих интервалах.

Для нахождения асимптотик корреляционных коэффициентов b_{FB} мы используем новый подход, основанный на расчете этих коэффициентов непосредственно через средние значения $\langle FB \rangle$, $\langle F^2 \rangle$, $\langle F \rangle$ и $\langle B \rangle$ ввиду невозможности обобщения метода, использовавшегося ранее для расчета асимптотики $b_{p_t p_t}$ в работе [10] и асимптотик b_{nn} и $b_{p_t n}$ в работах [11]–[14], на случай с неоднородным распределением струн в поперечной плоскости. Предлагаемый подход является обобщением метода, применявшегося в работах [6], [15], [16] для расчета коэффициента $(n$ - n)-корреляций в модели с независимыми источниками (струнами), на случай учета эффектов от их слияния. Учет слияния струн проводится методом, предложенным в работах [11], [20] и затем использовавшимся в работах [9], [12], [21], [22], посредством введения решетки в плоскости прицельного параметра с площадью ячейки порядка поперечного сечения струны.

Основные параметры построенной модели можно сгруппировать следующим образом. Во-первых, это задаваемые геометрией столкновения средние значения числа струн $\bar{\eta}_i$ в каждой из M ячеек решетки в плоскости прицельного параметра, а также параметр ω_η (11), характеризующий величину флуктуаций числа сливающихся струн η_i вокруг этих средних значений. Во-вторых, это среднее число μ_F частиц, образующихся от распада одиночной струны в переднем быстротном интервале, и параметр ω_μ (12), характеризующий величину флуктуаций этого числа частиц от события к событию. В-третьих, это параметры p_0 и γ , задающие соответственно средний поперечный импульс частиц (13), образующихся от распада одиночной струны, и его дисперсию (14).

Здесь также необходимо напомнить, что для случае слияния η_i струн в одной ячейке мы использовали конкретные зависимости (13) от η_i для среднего числа образующихся частиц $\bar{n}(\eta_i)$ и их среднего поперечного импульса $\bar{p}(\eta_i)$, ожидаемые в рамках картины, основанной на КХД [23], [26]–[28], хотя, как мы отмечали, обобщение полученных результатов на случай другого вида этих зависимостей не представляет труда.

В результате расчетов показано, что обнаруженная в работе [10] независимость асимптотики коэффициента корреляции $b_{p_t p_t}$ между средними поперечными импульсами при большой плотности струн от параметра ω_μ , характеризующего величину флуктуаций числа частиц, образующихся при фрагментации струны, имеет место только в случае равномерного распределения струн в поперечной плоскости.

С другой стороны, для рассмотренного случая с неоднородным распределением струн подтвержден характер зависимостей коэффициентов корреляций от величины переднего и заднего быстротных окон и средней плотности струн, полученных ранее для равномерного распределения струн. Так, показано, что величина коэффициентов корреляций всех типов в относительных переменных (4) не зависит от величины заднего быстротного интервала и возрастает с увеличением переднего. Эта зависимость проявляется через пропорциональность параметра μ_F ширине переднего быстротного интервала δy_F : $\mu_F = \mu_0 \delta y_F$, где μ_0 – средняя плотность числа частиц, рождающихся на единицу быстроты при фрагментации одиночной струны. Возрастание величины коэффициентов корреляции в относительных переменных с увеличением ширины переднего быстротного окна, подтвержденное для корреляций множественности экспериментально [19], отражает большой объем информации, получаемый при классификации событий с использованием более широкого переднего окна (см. подробнее статью [20]).

Также показано, что как и в случае с равномерным распределением струн, асимптотики коэффициентов корреляций всех типов при большой плотности струн убывают с ростом их средней плотности. Физической причиной уменьшения корреляций является ослабление флуктуаций наблюдаемых величин при учете эффекта слияния струн. Экспериментально это может приводить к неожиданному уменьшению величины коэффициентов корреляции для самых центральных столкновений тяжелых ядер при высоких энергиях, в которых достигается наибольшая плотность струн и максимально влияние эффектов их слияния (см. подробнее работу [29]).

Кроме того, показано, что в относительных переменных, как и в случае с равномерным распределением струн, коэффициенты корреляций всех типов, включая

$b_{p_t p_t}^{\text{rel}}$, стремятся к некоторым постоянным значениям при увеличении общего числа ячеек M , а следовательно – и общего среднего числа струн $\bar{N} = \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i$. Это делает перспективным их экспериментальное изучение с целью обнаружения возможных эффектов от слияния цветных струн на коллайдерах RHIC и LHC [8], где в центральных ядро-ядерных столкновениях число образующихся струн достигает нескольких тысяч.

Мы также проверили, что найденные общие выражения для коэффициентов дальних корреляций в частном случае с равномерным распределением струн в поперечной плоскости переходят в формулы, полученные другим методом в работе [10] для $(p_t - p_t)$ -корреляций и в работах [11]–[14] для $(n - n)$ и $(p_t - n)$ -корреляций.

Полученные асимптотические оценки коэффициентов дальних корреляций, как мы видим, оказываются полезными для качественного анализа зависимости величины корреляции от параметров модели, значения которых в свою очередь определяются условиями отбора и анализа экспериментальных данных. Их также можно использовать для отладки и контроля монтекарловских вариантов модели со слиянием струн, позволяющих рассчитывать значения коэффициентов корреляции с учетом всех экспериментальных условий (см. работу [29]). В этой же работе [29] изложено сравнение результатов, полученных в рамках развиваемого подхода, с доступными экспериментальными данными.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Усреднение по конфигурациям C_n

Рассмотрим усреднение весового коэффициента $\rho_i = n_i/n$ (32), где $n = \sum_i n_i$, по флуктуациям числа частиц, образующихся при распаде данной струнной конфигурации C_η (индекс B мы опускаем). При большой средней плотности струн $\bar{\eta}_i \gg 1$ согласно (13) среднее число частиц с быстротами в переднем или заднем наблюдательных окнах, образующихся от распада η_i струн данной ячейки, будет также велико. Мы будем поэтому аппроксимировать вероятность $P(n_i)$ образования n_i частиц непрерывным гауссовым распределением

$$P(n_i) = (2\pi d_{n_i})^{-1/2} \exp\left(-\frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{2d_{n_i}}\right) \quad (\text{A.1})$$

с параметрами $\bar{n}_i$ и d_{n_i} , задаваемыми соотношениями (13). В этом случае

$$\langle \rho_i \rangle^{C_n} = \prod_{j=1}^M \int dn_j P(n_j) \frac{n_i}{\sum_k n_k}. \quad (\text{A.2})$$

Подставляя под этот интеграл единицу и представляя ее в виде

$$1 = \int dn \int \frac{d\alpha}{2\pi} \exp\left[-i\alpha\left(n - \sum_k n_k\right)\right], \quad (\text{A.3})$$

можно выполнить интегрирования по всем n_j и α , что дает

$$\langle \rho_i \rangle^{C_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_i d_{n_i}}} \int \frac{dn}{n} \left[\bar{n}_i + \frac{d_{n_i}}{\sum_k d_{n_k}} \left(n - \sum_k \bar{n}_k \right) \right] \exp\left(-\frac{(n - \sum_k \bar{n}_k)^2}{2 \sum_k d_{n_k}}\right). \quad (\text{A.4})$$

Для случая, когда все дисперсии пропорциональны средним значениям, $d_{n_i} = \omega_\mu \bar{n}_i$ (см. формулу (12)), этот интеграл вычисляется точно, и мы получаем

$$\langle \rho_i \rangle^{C_n} = \left\langle \frac{n_i}{\sum_k n_k} \right\rangle^{C_n} = \frac{\bar{n}_i}{\sum_k \bar{n}_k} = \frac{\bar{n}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)}. \quad (\text{A.5})$$

То есть в этом случае усреднение весового множителя ρ_i по конфигурациям C_n сводится к простой замене $n_i \rightarrow \bar{n}(\eta_i)$. Заметим, что в работе [12] этот же факт был доказан для пуассоновых распределений.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Усреднение по конфигурациям C_η

В этом приложении мы проводим усреднение среднего поперечного импульса (34) по струнным конфигурациям (5), заданным на поперечной решетке с M ячейками (индекс B мы опять опускаем). Как и в приложении А, мы предполагаем, что при большой средней плотности струн флуктуации числа струн η_i около своих средних значений $\bar{\eta}_i \gg 1$ можно аппроксимировать непрерывным гауссовым распределением

$$P(\eta_i) = (2\pi d_{\eta_i})^{-1/2} \exp\left(-\frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2d_{\eta_i}}\right) \quad (\text{B.1})$$

с параметрами $\bar{\eta}_i$ и d_{η_i} , связанными соотношением (11). В этом случае

$$\langle p \rangle = \left\langle \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)} \right\rangle^{C_\eta} = \prod_{j=1}^M \int d\eta_j P(\eta_j) \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)}. \quad (\text{B.2})$$

Для того чтобы факторизовать зависимость от η_j , опять вводим под интеграл единицу, представленную как

$$1 = \int dr \int \frac{d\beta}{2\pi} \exp\left(-i\beta \left[r - \sum_k \bar{n}(\eta_k)\right]\right), \quad (\text{B.3})$$

что приводит к выражению

$$\langle p \rangle = \int \frac{dr}{r} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} \prod_{j=1}^M \int d\eta_j P(\eta_j) e^{-i\beta \bar{n}(\eta_j)} \sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i). \quad (\text{B.4})$$

Видим, что интегралы по η_j сводятся к двум типам интегралов:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int dy \exp\left(-\frac{y^2}{2a} + i\beta \bar{n}((1+y)\bar{\eta})\right) \quad (\text{B.5})$$

и

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int dy \exp\left(-\frac{y^2}{2a} + i\beta \bar{n}((1+y)\bar{\eta})\right) \bar{n}((1+y)\bar{\eta}) \bar{p}((1+y)\bar{\eta}), \quad (\text{B.6})$$

где мы временно опустили индексы и ввели сокращенные обозначения

$$y = \frac{\eta}{\bar{\eta}} - 1, \quad a = \frac{d_\eta}{\bar{\eta}^2} = \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}} \ll 1. \quad (\text{B.7})$$

Если использовать явный вид (13) для $\bar{n}(\eta)$ и $\bar{p}(\eta)$, обычно применяемый для усредненного описания процесса слияния струн, то, учитывая малость a , можно получить для этих интегралов следующие приближенные выражения:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + iab/4}} e^{-ab^2/8 + ib} \quad (\text{Б.8})$$

и

$$I_2 = I_1 \bar{n}(\bar{\eta}) \bar{p}(\bar{\eta}) \left[1 - \frac{3}{32}a + i\frac{3}{8}ab + \frac{15}{128}a^2b^2 \right], \quad (\text{Б.9})$$

где мы также ввели обозначение

$$b = \beta \bar{n}(\bar{\eta}) = \beta \sqrt{\bar{\eta}}. \quad (\text{Б.10})$$

Это позволяет представить (Б.4) в виде

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int \frac{dr}{r} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} \prod_{j=1}^M \frac{1}{\sqrt{1 + ia_j b_j/4}} e^{-a_j b_j^2/8 + ib_j} \times \\ &\times \sum_i \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \left[1 - \frac{3}{32}a_i + i\frac{3}{8}a_i b_i + \frac{15}{128}a_i^2 b_i^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

Учитывая введенные обозначения (Б.7) и (Б.10), получаем равенства

$$a_i b_i = \omega_\eta \frac{\bar{n}(\bar{\eta}_i)}{\bar{\eta}_i} \beta = \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i}} \beta, \quad a_i b_i^2 = \omega_\eta \frac{\bar{n}^2(\bar{\eta}_i)}{\bar{\eta}_i} \beta^2 = \omega_\eta \beta^2, \quad (\text{Б.12})$$

которые позволяют переписать (Б.11) следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int \frac{dr}{r} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} \prod_{j=1}^M \left(1 + i \frac{\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right)^{-1/2} \exp \left(-\frac{\omega_\eta}{8} M \beta^2 + i\beta \sum_k \bar{n}(\bar{\eta}_k) \right) \times \\ &\times \sum_i \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \left[1 - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} + i\frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i}} \beta + \frac{15}{128} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{\eta}_i} \beta^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

Из этого выражения мы видим, что основной вклад вносит область $\beta \sim 1/\sqrt{M}$, поэтому в квадратных скобках добавки к единице имеют соответственно следующие порядки малости: $1/\bar{\eta}$, $1/\sqrt{\bar{\eta}M}$, $1/\bar{\eta}M$. Все члены более высокого порядка по $1/\bar{\eta}$ или $1/M$ отброшены.

Для произведения перед экспонентой в (Б.13), учитывая, что добавка к единице мала (порядка $1/\sqrt{\bar{\eta}M}$), получаем равенство

$$\prod_{j=1}^M \left(1 + i \frac{\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right)^{-1/2} = \exp \left(-i\beta \frac{\omega_\eta}{8} \sum_k \bar{\eta}_k^{-1/2} - \beta^2 \frac{\omega_\eta^2}{64} \sum_k \bar{\eta}_k^{-1} \right). \quad (\text{Б.14})$$

После чего, выполняя в (Б.13) интегрирование по β , приходим к выражению

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int \frac{dr}{r} \frac{1}{\sqrt{\pi M'}} \exp \left(-\frac{(r - \Sigma')^2}{M'} \right) \times \\ &\times \sum_i \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \left[1 - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i}} \frac{r - \Sigma'}{M'} + \frac{15}{32} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{\eta}_i M'} \left(\frac{1}{2} - \frac{(r - \Sigma')^2}{M'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Б.15})$$

Здесь

$$M' \equiv \frac{\omega_\eta}{2} \left(M + \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1} \right), \quad \Sigma' \equiv S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2}, \quad (\text{Б.16})$$

где мы использовали обозначения (36) для сумм.

Чтобы выполнить оставшееся интегрирование по r , мы разлагаем $1/r$ по степеням $(r - \Sigma')/\Sigma'$, учитывая, что согласно (Б.15) $r - \Sigma' \sim \sqrt{M}$, а $r \sim \Sigma' \sim M$:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\Sigma'} \left(1 - \frac{r - \Sigma'}{\Sigma'} + \frac{(r - \Sigma')^2}{\Sigma'^2} \right). \quad (\text{Б.17})$$

Подставляя (Б.17) в (Б.15), интегрируя по r и отбрасывая члены более высокого порядка малости, чем $1/\bar{\eta}_i$ и $1/M$, приходим к формуле (35). Отметим, что как видно из сравнения (40) и (Б.16), $\langle n_F \rangle = \mu_F \Sigma'$, что упрощает вычисление $\text{cov}(p_B, n_F)$ (см. формулу (41)).

Благодарности. Автор благодарен организаторам V Международной конференции “Модели квантовой теории поля” (MQFT–2015), посвященной А. Н. Васильеву.

Список литературы

- [1] A. B. Kaidalov, “The quark–gluon structure of the pomeron and the rise of inclusive spectra at high energies”, *Phys. Lett. B*, **116**:6 (1982), 459–463.
- [2] A. Capella, U. Sukhatme, C.-I. Tan, J. Tran Thanh Van, “Jets in small- p_T hadronic collisions, universality of quark fragmentation, and rising rapidity plateaus”, *Phys. Lett. B*, **81**:1 (1979), 68–74.
- [3] X. Artru, “Classical string phenomenology. How strings work”, *Phys. Rep.*, **97**:2–3 (1983), 147–171.
- [4] V. V. Vechernin, “Space-time picture of the string fragmentation and the fusion of colour strings”, *Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics*, v. 1, Proceedings of the XIX International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems (ISHEPP XIX) (September 29 – October 4, 2008), JINR, Dubna, 2008, 276–281, [arXiv:0812.0604](#).
- [5] A. Capella, A. Krzywicki, “Unitarity corrections to short-range order: long-range rapidity correlations”, *Phys. Rev. D*, **18**:11 (1978), 4120–4133.
- [6] V. Vechernin, “Forward-backward correlations between multiplicities in windows separated in azimuth and rapidity”, *Nucl. Phys. A*, **939** (2015), 21–45, [arXiv:1210.7588](#).
- [7] N. S. Amelin, N. Armesto, M. A. Braun, E. G. Ferreira, C. Pajares, “Long and short range correlations: a signature of string fusion”, *Phys. Rev. Lett.*, **73**:21 (1994), 2813–2816.
- [8] B. Alessandro, F. Antinori, J. A. Belikov et al. [ALICE Collab.], “ALICE: physics performance report, volume II”, *J. Phys. G*, **32**:10 (2006), 1295–2040.
- [9] M. A. Braun, C. Pajares, V. V. Vechernin, “Ridge from strings”, *Eur. Phys. J. A*, **51** (2015), 44.
- [10] В. В. Вечернин, “Корреляция между поперечными импульсами в модели со слиянием струн”, *ТМФ*, **184**:3 (2015), 437–448.
- [11] В. В. Вечернин, Р. С. Колеватов, “Дискретный подход к описанию дальних корреляций множественности и p_t в модели слияния струн”, *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4. Физика. Химия*, **4** (2004), 11–27, [arXiv:hep-ph/0305136](#).
- [12] M. A. Braun, R. S. Kolevatov, C. Pajares, V. V. Vechernin, “Correlations between multiplicities and average transverse momentum in the percolating color strings approach”, *Eur. Phys. J. C*, **32**:4 (2004), 535–546, [arXiv:hep-ph/0307056](#).

- [13] В. В. Вечернин, Р. С. Колеватов, “О корреляциях множественности и p_t в столкновениях ультрарелятивистских ионов”, *ЯФ*, **70**:10 (2007), 1846–1857.
- [14] В. В. Вечернин, Р. С. Колеватов, “Дальние корреляции между поперечными импульсами заряженных частиц в релятивистских ядерных столкновениях”, *ЯФ*, **70**:10, 1858–1867.
- [15] M. A. Braun, C. Pajares, V. V. Vechernin, *Phys. Lett. B*, **493**:1–2 (2000), 54–64, arXiv: hep-ph/0007241.
- [16] V. V. Vechernin, “Long-range rapidity correlations in the model with independent emitters”, *Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics*, v. 2, Proceedings of the XX International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems (ISHEPP XX), JINR, Dubna, 2011, 10–14, arXiv: 1012.0214.
- [17] E. Andronov, V. Vechernin, “The correlation between transverse momentum and multiplicity of charged particles in a two-component model”, *PoS (QFTHEP 2013)*, 2014, 054, 7 pp.
- [18] Е. В. Андронов, “Влияние механизма слияния кварк-глюонных струн на дальние быстрые корреляции и флуктуации”, *ТМФ*, **185**:1 (2015), 28–36.
- [19] J. Adam, D. Adamova, M. M. Aggarwal et al. [ALICE Collab.], “Forward-backward multiplicity correlations in pp collisions at $\sqrt{s} = 0.9, 2.76$ and 7 TeV”, *JHEP*, **05** (2015), 097, 28 pp., arXiv: 1502.00230.
- [20] В. В. Вечернин, Р. С. Колеватов, “Простая дискретная модель дальних корреляций множественности и p_t при столкновениях ядер высоких энергий”, *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4. Физика. Химия*, **2** (2004), 12–23, arXiv: hep-ph/0304295.
- [21] M. A. Braun, C. Pajares, “Elliptic flow from colour strings”, *Eur. Phys. J. C*, **71**:2 (2011), 1558.
- [22] M. A. Braun, C. Pajares, V. V. Vechernin, “Anisotropic flows from colour strings: Monte Carlo simulations”, *Nucl. Phys. A*, **906** (2013), 14–27.
- [23] M. A. Braun, C. Pajares, “Transverse momentum distributions and their forward-backward correlations in the percolating color string approach”, *Phys. Rev. Lett.*, **85**:23 (2000), 4864–4867.
- [24] V. V. Vechernin, H. S. Nguyen, “Fluctuations of the number of participants and binary collisions in AA interactions at fixed centrality in the Glauber approach”, *Phys. Rev. C*, **84**:5 (2011), 054909, 12 pp., arXiv: 1102.2582.
- [25] J. Dias de Deus, A. S. Hirsch, C. Pajares, R. P. Scharenberg, B. K. Srivastava, “Clustering of color sources and the shear viscosity of the QGP in heavy ion collisions at RHIC and LHC energies”, *Eur. Phys. J. C*, **72** (2012), 2123, 6 pp.
- [26] T. S. Biro, H. B. Nielsen, J. Knoll, “Colour rope model for extreme relativistic heavy ion collisions”, *Nucl. Phys. B*, **245** (1984), 449–468.
- [27] A. Bialas, W. Czyz, “Conversion of color field into qq matter in the central region of high-energy heavy ion collisions”, *Nucl. Phys. B*, **267**:1 (1986), 242–252.
- [28] M. A. Braun, C. Pajares, “A probabilistic model of interacting strings”, *Nucl. Phys. B*, **390**:2 (1993), 542–558.
- [29] V. Kovalenko, V. Vechernin, “Model of pp and AA collisions for the description of long-range correlations”, *PoS (Baldin ISHEPP XXI)*, 2012, 077, 20 pp.