Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Антонов, П. И. Какинъ, Скейлинг в эрозии ландшафтов: ренормгрупповой анализ бесконечнозарядной модели, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 2, 226–238

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:51:12

© 2017 г.

Н. В. Антонов, П. И. Какинъ*

СКЕЙЛИНГ В ЭРОЗИИ ЛАНДШАФТОВ: РЕНОРМГРУППОВОЙ АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНОЗАРЯДНОЙ МОДЕЛИ

Применение стандартной квантово-полевой ренормгруппы к модели эрозии ландшафтов, разработанной Пастор-Саторрасом и Ротманом, приводит к неожиданным результатам: модель оказывается мультипликативно-перенормируемой, только когда она содержит бесконечное число констант связи, т. е. соответствующие уравнения ренормгруппы содержат бесконечное число β -функций. Показано, что тем не менее однопетлевой контрчлен удается формально выразить через известную функцию $V(h)$, входящую в исходное стохастическое уравнение, и ее производные по полю h высоты профиля. Из разложения этой функции в ряд Тейлора можно получить весь бесконечный набор однопетлевых перенормировочных констант, β -функций и аномальных размерностей. Вместо отдельных неподвижных точек возникает их двухмерная поверхность, которая, весьма вероятно, содержит инфракрасно-притягивающие области. В этом случае модель демонстрирует скейлинговое поведение в инфракрасном диапазоне. Соответствующие критические экспоненты оказываются неуниверсальными, поскольку они зависят от координат неподвижной точки на поверхности, но удовлетворяют определенным точным соотношениям.

Ключевые слова: турбулентность, критическое поведение, скейлинг, ренормализационная группа.

DOI: 10.4213/tmf9147

1. ВВЕДЕНИЕ И ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Эрозия ландшафтов, происходящая под влиянием воздушных и водных течений, привлекала постоянный интерес исследователей на протяжении последних десятилетий, как и связанные с ней задачи, например гранулярные потоки (см. работы [1]–[18] и приведенную в них литературу). Разумеется, данная проблематика

Авторы благодарны Санкт-Петербургскому государственному университету за финансовую поддержку (исследовательский грант № 11.38.185.2014). П. И. Какинъ благодарит РФФИ за финансовую поддержку (грант № 16-32-00086.)

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: n.antonov@spbu.ru, p.kakin@spbu.ru

затрагивает широкий диапазон физических явлений; существуют разные точки зрения на лежащие в основе этих задач динамические модели [4]–[17]. Тем не менее можно надеяться, что по аналогии с критическими явлениями универсальные свойства эрозии ландшафтов (экспоненты в скейлинговых законах) могут быть описаны в рамках сравнительно простых полуфеноменологических моделей, построенных на основе соображений размерности и симметрии (см., например, обсуждение в работах [14], [15] и литературу в них).

Схожая ситуация наблюдается и в связанных с упомянутыми выше задачах кинетического огрубления поверхностей или границ раздела, описываемых хорошо известной моделью Кардара–Паризи–Жанга [19] и ее модификациями [20]–[22]. Другой пример – задачи самоорганизующейся критичности, которая в непрерывном случае описывается стохастической моделью Хуа–Кардара [23] и ее модификациями [24], [25]. В работах [14], [15] была предложена схожая модель эрозии поверхности с заданным средним наклоном. Начнем с описания этой модели.

Пусть $\mathbf{n}$ – постоянный единичный вектор, определяющий выбранное направление (направление наклона) и, таким образом, задающий внутреннюю анизотропию модели. Тогда любой вектор можно разложить на компоненты, ортогональные и параллельные вектору $\mathbf{n}$. В частности, для d -мерной горизонтальной координаты $\mathbf{x}$ имеем $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{n}x_\parallel$, где $\mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{n} = 0$. В дальнейшем мы будем обозначать производную в полном d -мерном $\mathbf{x}$ -пространстве как $\partial = \partial/\partial x_i$, где $i = 1, \dots, d$, а производную в подпространстве, ортогональном к $\mathbf{n}$, – как $\partial_\perp = \partial/\partial x_{\perp i}$, где $i = 1, \dots, d-1$. Тогда производная вдоль параллельного направления записывается как $\partial_\parallel = \mathbf{n} \cdot \partial$.

Стохастическое дифференциальное уравнение для высоты профиля, т. е. для поля скорости $h(\mathbf{x}) = h(t, \mathbf{x})$, предложенное в работах [14], [15], принимает вид

$$\partial_t h = \nu_\perp \partial_\perp^2 h + \nu_\parallel \partial_\parallel^2 h + \partial_\parallel^2 V(h) + f. \quad (1.1)$$

Здесь $\partial_t = \partial/\partial t$, $\nu_\parallel$ и $\nu_\perp$ – топографические коэффициенты диффузии, $V(h)$ – некоторая функция, которая зависит только от поля $h(\mathbf{x})$ (и не зависит от его производных), и $f(\mathbf{x})$ – гауссов случайный шум с нулевым средним и заданной парной корреляционной функцией

$$\langle f(\mathbf{x})f(\mathbf{x}') \rangle = D\delta(t-t')\delta^{(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \quad (1.2)$$

с некоторой положительной амплитудой D . Детальное обсуждение вывода модели (1.1), (1.2) и ее связи с другими моделям эрозии и самоорганизующейся критичности можно найти в работах [14], [15].

Функция $V(h)$ понимается как ряд по степеням h . В работах [14], [15] она полагалась нечетной по h , и это было продиктовано симметрией $h, f \rightarrow -h, -f$; еще одна симметрия модели – это $x_\parallel \rightarrow -x_\parallel$. Авторы работ [14], [15] обрезали ряд Тейлора $V(h)$, оставив ведущий член порядка h^3 (член, линейный по h , выписан в (1.1) отдельно), и затем применили к получившейся модели динамическую ренормгруппу (РГ) Вильсона и разложение по $4-d$, т. е. по отклонению размерности d от ее предполагаемого верхнего критического значения $d = 4$. Они установили наличие инфракрасной (ИК) притягивающей неподвижной точки в ведущем однопетельном порядке и вычислили соответствующие критические индексы (грубость), которые, как оказалось, хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными из измерений морского дна.

В настоящей работе мы применяем стандартную теоретическую РГ к модели из работ [14], [15] и получаем совершенно другие результаты. План работы следующий.

В разделе 2 мы представляем квантово-полевую формулировку стохастической задачи (1.1), (1.2) для произвольной (не обязательно нечетной) полномасштабной (не обрезанной) функции $V(h)$.

В разделе 3 обсуждается ультрафиолетовая (УФ) расходимость и процедура ренормировки возникающей теории поля. Мы показываем, что верхнее критическое значение на самом деле есть $d = 2$. Это приводит к значительным изменениям в РГ-анализе модели. А именно, оказывается, что нельзя отбрасывать вклады старших порядков разложения Тейлора функции $V(h)$, так как они неизбежно возникают как контрчлены при правильной процедуре ренормировки. Другими словами, любая обрезанная модель не является мультипликативно-ренормируемой. Это означает, что правильно построенная ренормируемая модель обязательно содержит бесконечно много констант связи, а соответствующие РГ-уравнения содержат бесконечно много β -функций. Это также означает, что РГ-анализ, проведенный в [14], [15] для обрезанной модели, не является последовательным и его нельзя считать надежным. Мы также выписываем соответствующее ренормированное действие, ренормировочные соотношения для полей и параметров, РГ-уравнения и РГ-функции (β -функции и аномальные размерности).

В разделе 4 мы в явном виде проводим процедуру ренормировки в однопетлевом приближении. Ключевой момент состоит в том, что, несмотря на наличие бесконечного числа констант связи, однопетлевой контрчлен можно выписать формально, выразив его через функцию $V(h)$ и ее производные. Ее разложение в ряд Тейлора позволяет получить весь бесконечный набор однопетлевых ренормировочных констант и, таким образом, всех β -функций и аномальных размерностей. Для получения этого результата мы используем функциональный метод, примененный ранее А. Н. Васильевым и одним из авторов в работе [27] к изотропной модели поверхностного огрубления, предложенной в [26] в качестве возможной модификации уравнения Кардара–Паризи–Жанга (см. также статьи [28], [29]).

В разделе 5 мы анализируем аттракторы полученных РГ-уравнений в бесконечномерном пространстве констант связи. Оказывается, что вместо набора неподвижных точек (что типично для большинства моделей со многими константами связи) имеется двумерная поверхность неподвижных точек. Для нечетной функции $V(h)$, т. е. для модели из работ [14], [15], она переходит в кривую. Весьма вероятно, что эта поверхность содержит ИК-притягивающую область (области). В этом случае модель проявляет скейлинговое поведение в ИК-диапазоне. Соответствующие критические индексы оказываются неуниверсальными из-за того, что они зависят от координат неподвижной точки на поверхности (кривой), но удовлетворяют определенным точным соотношениям.

Возможность сравнения с экспериментом и остающиеся проблемы кратко обсуждаются в разделе 6.

2. КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Согласно общим утверждениям (см., например, монографии [30], [31] и литературу в них) стохастическая задача (1.1), (1.2) эквивалентна квантово-полевой модели двух полей $\Phi = \{h, h'\}$ с функционалом действия

$$\mathcal{S}(\Phi) = h'h' + h' \left\{ -\partial_t h + \nu_{0\perp} \partial_{\perp 0}^2 h + \nu_{\parallel 0} \partial_{\parallel 0}^2 h + \partial_{\parallel}^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_{n0} h^n}{n!} \right\} \quad (2.1)$$

(где D_0 и другие коэффициенты при $h'h'$ убираются путем изменения значений λ_{n0}). Здесь и далее подразумеваются все необходимые интегрирования по $x = (t, \mathbf{x})$ и суммирования по повторяющимся тензорным индексам, например

$$h'h' = \int dt \int d\mathbf{x} h'(t, \mathbf{x}) h'(t, \mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Индекс 0 указывает, что параметры в (2.1) еще не ренормированы (затравочные).

Квантово-полевая формулировка означает, что корреляционные функции и функции отклика стохастической задачи (1.1), (1.2) могут быть соотнесены с различными функциями Грина квантово-полевой модели с действием (2.1). Иными словами, они представляются функциональными средними по полному набору полей $\Phi = \{h, h'\}$ с весом $\exp \mathcal{S}(\Phi)$.

3. УФ-РАСХОДИМОСТИ И РЕНОРМИРОВКА

Для исследования УФ-расходимостей мы используем анализ канонических размерностей (см., например, монографии [30], [31]). Обычно динамические модели типа (2.1) имеют два масштаба и их размерности описываются двумя числами: частотной размерностью d_F^ω и импульсной размерностью d_F^k . Они полностью определяют каноническую размерность величины F (поля или параметра) и определяются так, чтобы $[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L]^{-d_F^k}$, где L – типичный масштаб длины и T – временной масштаб (см., например, гл. 5 в [31]). Для рассматриваемой задачи, однако, из-за анизотропии возникают два независимых импульсных масштаба, соответствующих перпендикулярному и параллельному к вектору $\mathbf{n}$ направлениям, поэтому нам потребуется более детальное определение. А именно, нужно ввести два независимых импульсных канонических масштаба $d_F^\perp$ и $d_F^\parallel$ так, чтобы было выполнено соотношение

$$[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L_\perp]^{-d_F^\perp} [L_\parallel]^{-d_F^\parallel},$$

где $L_\perp$ и $L_\parallel$ – независимые масштабы длины в соответствующих подпространствах. Очевидны условия нормировки: $d_{k_\perp}^\perp = -d_{\mathbf{x}_\perp}^\perp = 1$, $d_{k_\perp}^\parallel = -d_{\mathbf{x}_\perp}^\parallel = 0$, $d_{k_\perp}^\omega = d_{k_\parallel}^\omega = 0$, $d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1$ и т. д.; остальные размерности определяются из требования, чтобы каждый член функционала действия (2.1) был безразмерным (по отношению ко всем трем размерностям по отдельности). Исходную импульсную размерность можно найти из соотношения $d_F^k = d_F^\perp + d_F^\parallel$. Тогда, основываясь на d_F^k и d_F^ω , можно ввести полную каноническую размерность $d_F = d_F^k + 2d_F^\omega = d_F^\perp + d_F^\parallel + 2d_F^\omega$ (в свободной теории $\partial_t \propto \partial_\perp^2 \propto \partial_\parallel^2$), которая играет ту же роль, что и привычная (импульсная) размерность в статических задачах (см. [31], гл. 5).

Канонические размерности полей и параметров в модели с действием (2.1) представлены в табл. 1. Ренормированные параметры (без нижнего индекса 0) и ренормировочная масса μ будут определены ниже.

Как видно из табл. 1, все константы взаимодействия g_{n0} одновременно становятся безразмерными при $d = 2$. Это означает, что $d = 2$ – верхнее критическое значение размерности в полномасштабной модели. При этом значении d полная каноническая размерность поля h равна нулю. Как будет показано ниже, это приводит к значительным изменениям в процедуре ренормировки. Это также означает, что

ТАБЛИЦА 1. Канонические размерности полей и параметров в модели (2.1).

F	h'	h	$\nu_{\perp}$	$\nu_{\parallel}$	λ_{n0}	g_{n0}	g_n	μ
d_F^{ω}	$\frac{1}{2}$	$-1/2$	1	1	$\frac{n+1}{2}$	0	0	0
$d_F^{\parallel}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-2	$-\frac{n+3}{2}$	0	0	0
$d_F^{\perp}$	$\frac{d-1}{2}$	$\frac{d-1}{2}$	-2	0	$\frac{(d-1)(1-n)}{2}$	$\frac{(2-d)(n-1)}{2}$	0	1
d_F	$\frac{2+d}{2}$	$-\frac{2-d}{2}$	0	0	$\frac{(2-d)(n-1)}{2}$	$\frac{(2-d)(n-1)}{2}$	0	1

УФ-расходимости в функциях Грина полиномасштабной модели предстают в виде полюсов по $\varepsilon = 2 - d$, при этом ε играет роль малого параметра в РГ-разложениях.

Полная каноническая размерность произвольной 1-неприводимой функции Грина $\Gamma = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{1\text{-ir}}$ с $\Phi = \{h, h'\}$ в частотно-импульсном представлении дается соотношением

$$d_{\Gamma} = d + 2 - d_h N_h - d_{h'} N_{h'}, \quad (3.1)$$

где $N_h, N_{h'}$ – число соответствующих полей, входящих в функцию Γ [31].

Полная размерность d_{Γ} в логарифмической теории (т. е. при $\varepsilon = 0$) – это формальный индекс УФ-расходимости: $\delta_{\Gamma} = d_{\Gamma}|_{\varepsilon=0}$. Поверхностная УФ-расходимость, для исключения которой нужны контрчлены, может присутствовать только в тех функциях Γ , для которых δ_{Γ} – неотрицательное целое число. Контрчлен есть полином по частотам и импульсам степени δ_{Γ} (при условии, что подразумевается $\omega \propto k^2$).

Если по какой-либо причине некоторое число внешних импульсов выделяется как общий множитель во всех диаграммах данной функции Грина, то реальный индекс расходимости δ'_{Γ} оказывается меньше, чем δ_{Γ} , на соответствующее число единиц. Именно это и происходит в нашей модели: с помощью интегрирования по частям производная в вершине $h' \partial_{\parallel}^2 V(h)$ переносится на h' . Это означает, что любое появление h' в какой-либо функции Γ приводит к появлению внешних импульсов, и реальный индекс расходимости оказывается равным $\delta'_{\Gamma} = \delta_{\Gamma} - 2N_{h'}$. Более того, h' возникает в соответствующем контрчлене только в форме производной $\partial_{\parallel}^2 h'$.

Из табл. 1 и выражения (3.1) получаем

$$\delta'_{\Gamma} = \delta_{\Gamma} - 2N_{h'} = 4 - 4N_{h'}. \quad (3.2)$$

Достаточно рассмотреть только случай $N_{h'} > 0$, так как в динамических моделях все 1-неприводимые функции без полей отклика тождественно равны нулю (их диаграммы всегда содержат замкнутые циклы запаздывающих линий) [31].

Простой анализ выражения (3.2) показывает, что поверхностные УФ-расходимости могут присутствовать только в 1-неприводимых функциях вида $\langle h'h \dots h \rangle_{1\text{-ir}}$ с контрчленами $(\partial_{\parallel}^2 h')h^n$ (для любого $n \geq 1$). Действительно, все прочие контрчлены (например, $h'h'$, $h'\partial_t h$, $h'\partial_{\perp}^2 h$) не нужны, так как соответствующие 1-неприводимые функции конечны.

Поскольку все члены вида $(\partial_{\parallel}^2 h')h^n$ присутствуют в действии (2.1), полномасштабная модель мультипликативно-ренормируема. Ренормированное действие может быть записано в форме

$$\mathcal{S}_R(\Phi) = h'h' + h' \left\{ -\partial_t h + Z_{\perp} \nu_{\perp} \partial_{\perp}^2 h + Z_{\parallel} \nu_{\parallel} \partial_{\parallel}^2 h + \partial_{\parallel}^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Z_n \lambda_n h^n}{n!} \right\}, \quad (3.3)$$

где $\nu_{\perp}$, $\nu_{\parallel}$ и λ_n – ренормированные аналоги затравочных параметров (с нижним индексом 0). Константы ренормировки $Z_{\perp}$, $Z_{\parallel}$ и Z_n зависят только от полностью безразмерных параметров g_n и поглощают все полюсы по ε . Затравочные заряды $g_0 = \{g_{n0}\}$ и полностью безразмерные ренормированные заряды $g = \{g_n\}$ ($n = 2, 3, \dots$) выражаются через затравочные параметры λ_{n0} и ренормированные параметры λ_n следующим образом:

$$\lambda_{n0} = g_{n0} \nu_{\parallel 0}^{(n+3)/4} \nu_{\perp 0}^{(n-1)/4}, \quad \lambda_n = g_n \nu_{\parallel}^{(n+3)/4} \nu_{\perp}^{(n-1)/4} \mu^{\varepsilon(n-1)/2}, \quad (3.4)$$

где ренормировочная масса μ является добавочным параметром ренормированной теории; ее канонические размерности показаны в табл. 1.

Ренормированное действие (3.3) получается из исходного (2.1) путем ренормировки параметров (ренормировка полей h , h' не требуется)

$$\nu_{\parallel 0} = \nu_{\parallel} Z_{\parallel}, \quad \nu_{\perp 0} = \nu_{\perp} Z_{\perp}, \quad g_{n0} = \mu^{\varepsilon(n-1)/2} g_n Z_{g_n}, \quad \lambda_{n0} = \lambda_n Z_n. \quad (3.5)$$

Константы ренормировки в уравнениях (3.3) и (3.5) связаны следующим образом:

$$Z_{g_n} = Z_n Z_{\parallel}^{-(n+3)/4} Z_{\perp}^{-(n-1)/4}. \quad (3.6)$$

Рассмотрим простой вывод РГ-уравнений [30], [31]. РГ-уравнения пишутся для перенормированных функций Грина $G_R = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_R$. В нашем случае они не отличаются от исходных (неренормированных) функций Грина G : $G(e_0, \dots) = G_R(e, \mu, \dots)$ (так как отсутствует ренормировка полей) и поэтому также могут быть использованы для анализа критического поведения. Здесь $e_0 = \{g_{n0}, \nu_{\parallel 0}, \nu_{\perp 0}, \dots\}$ – полный набор затравочных параметров и $e = \{g_n, \nu_{\parallel}, \nu_{\perp}, \dots\}$ – их ренормированные эквиваленты; многоточием обозначены остальные аргументы (время, координаты, импульсы).

Обозначим через $\tilde{\mathcal{D}}_{\mu}$ дифференциальный оператор $\mu \partial_{\mu}|_{e_0}$. Если выразить его через ренормированные переменные, он примет вид

$$\mathcal{D}_{RG} \equiv \mathcal{D}_{\mu} + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \partial_{g_n} - \sum_{F=\nu_{\parallel}, \nu_{\perp}} \gamma_F \mathcal{D}_F, \quad (3.7)$$

где $\mathcal{D}_x \equiv x \partial_x$ для любой переменной x . Аномальная размерность γ_F для какой-либо величины F определяется как

$$\gamma_F \equiv \tilde{\mathcal{D}}_{\mu} \ln Z_F, \quad (3.8)$$

в то время как β -функции для безразмерных констант взаимодействия g_n выглядят следующим образом:

$$\beta_n \equiv \tilde{\mathcal{D}}_{\mu} g_n = g_n \left[-\varepsilon \frac{n-1}{2} - \gamma_{g_n} \right]. \quad (3.9)$$

4. ОДНОПЕТЛЕВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОНТРЧЛЕНА, КОНСТАНТ РЕНОРМИРОВКИ И РГ-ФУНКЦИЙ

Обратимся к вычислению констант ренормировки Z в однопетлевом приближении. Несмотря на то что полномасштабная модель содержит бесконечно много констант взаимодействия, однопетлевое выражение для контрчлена можно получить в явном виде, выразив его формально через функцию $V(h)$.

Рассмотрим разложение производящего функционала $\Gamma_R(\Phi)$ 1-неприводимой функции Грина нашей модели в p петлях:

$$\Gamma_R(\Phi) = \sum_{p=0}^{\infty} \Gamma^{(p)}(\Phi), \quad \Gamma^{(0)}(\Phi) = S_R(\Phi). \quad (4.1)$$

Беспетлевой (древесный) вклад – это просто действие, тогда как однопетлевой вклад можно найти с помощью следующего соотношения [32]:

$$\Gamma^{(1)}(\Phi) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln(WW_0^{-1}), \quad (4.2)$$

где W – линейный оператор с ядром

$$W(x, y) = -\frac{\delta^2 S_R(\Phi)}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)} \quad (4.3)$$

и W_0 – аналогичное выражение для свободной части действия; W и W_0 – матрицы размера 2×2 для пары полей $\Phi = \{h, h'\}$.

Требование, чтобы в выражении (4.1) не было УФ-расходимостей, вместе со схемой минимальных вычитаний приводит к однозначно определенным значениям для констант Z . Мы полагаем $Z = 1$ в (4.2) в однопетлевом приближении, одновременно удерживая вклады ведущего порядка в константах взаимодействия g_n в беспетлевом вкладе в константы Z ; для внутренней согласованности мы полагаем $g_n \simeq g_2^{n-1}$.

Рассмотрим ряд Тейлора для функции $V(h)$:

$$V(h) = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{h^n(x)}{n!}, \quad V_R(h) = \sum_{n=2}^{\infty} Z_n \lambda_n \frac{h^n(x)}{n!}. \quad (4.4)$$

В дальнейшем мы будем интерпретировать подобные объекты как функции единственной переменной $h(x)$, а V' , V'' и т. д. – как соответствующие производные по этой переменной. В этих обозначениях матрицу W (при условии, что $Z = 1$) можно формально записать как

$$W = \begin{pmatrix} -\partial_{\parallel}^2 h' \cdot V'' & L^T \\ L & -2 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где $L \equiv \partial_t - \nu_{\parallel} \partial_{\parallel}^2 - \nu_{\perp} \partial_{\perp}^2 - \partial_{\parallel}^2 V'$ и $L^T \equiv -\partial_t - \nu_{\parallel} \partial_{\parallel}^2 - \nu_{\perp} \partial_{\perp}^2 - V' \partial_{\parallel}^2$ – транспонированный оператор.

Чтобы найти константы Z , нам потребуется только расходящаяся часть выражения (4.1), которая, как было установлено ранее, имеет вид

$$\int dx \partial^2 h'(x) R(h(x)),$$

где функция $R(h)$ аналогична $V(h)$. Это значит, что след логарифма в (4.2) с матрицей (4.5) нужно вычислить только в первом порядке по ее hh -элементу $-\partial_{\parallel}^2 h' \cdot V''$. Это можно сделать с помощью хорошо известной формулы $\delta(\text{Tr} \ln K) = \text{Tr}(K^{-1} \delta K)$, справедливой для любой вариации δK . Варьируя только hh -элемент матрицы W , получаем

$$\int dx \partial^2 h'(x) R(h(x)) \simeq -\text{Tr}[D_{hh} V'' \partial_{\parallel}^2 h'] = -\int dx D^{(hh)}(x, x) V''(h(x)) \partial_{\parallel}^2 h'(x), \quad (4.6)$$

где $D_{hh} = (W^{-1})_{hh}$ при $h' = 0$. По определению $D^{(hh)}$ – обыкновенный пропагатор $\langle hh \rangle$ модели (3.3) с $Z = 1$, в котором вместо $\nu_{\parallel} \partial_{\parallel}^2 + \nu_{\perp} \partial_{\perp}^2$ стоит $\nu_{\parallel} \partial_{\parallel}^2 + \nu_{\perp} \partial_{\perp}^2 + \partial_{\parallel}^2 V'$.

Есть еще одно соображение, которое следует учесть. После того как $\partial_{\parallel}^2$ превращается во внешний множитель для h' , в контрчлене остается только логарифмически расходящаяся часть. Это означает, что при подсчете расходящейся части какой-либо диаграммы все внешние импульсы можно положить равными нулю (ИК-регуляризация обеспечивается обрезанием). В свою очередь это приводит к тому, что в (4.6) можно игнорировать неоднородность функций $\partial_{\parallel}^2 h'(x)$ и $h(x)$ (оба поля можно считать константами), когда мы отбираем полюсы по ε . Тогда можно легко вычислить $D^{(hh)}(x, x)$, перейдя к частотно-импульсному представлению:

$$\begin{aligned} D^{(hh)}(x, x) &= \iint \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{2}{\omega^2 + (\nu_{\parallel} k_{\parallel}^2 + \nu_{\perp} k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2 V')^2} = \\ &= \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\nu_{\perp}(\nu_{\parallel} + V')}} + \dots, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где многоточие означает УФ-конечную часть. Подставляя выражения (4.6) и (4.7) в (4.2), получаем следующее выражение для расходящейся части $\Gamma_1(\Phi)$ с необходимой точностью:

$$\Gamma_1(\Phi) = \frac{S_d}{2(2\pi)^d} \frac{\mu^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \int dx \frac{V''(h(x))}{\sqrt{\nu_{\perp}(\nu_{\parallel} + V'(h(x)))}} \partial^2 h'(x). \quad (4.8)$$

Найти однопетлевые вклады порядка $1/\varepsilon$ во всех константах Z можно из требования, что сумма $\Gamma_1(\Phi)$ из (4.8) и беспетлевых вкладов в (4.2) не имеет полюса по ε (полюсы сокращаются).

Введем представление

$$\frac{V''(h(x))}{\sqrt{\nu_{\perp}(\nu_{\parallel} + V'(h(x)))}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{\varepsilon(n+1)/2} \nu_{\perp}^{(n-1)/4} \nu_{\parallel}^{(n+3)/4} \frac{r_n h^n}{n!} \quad (4.9)$$

для ряда Тейлора подынтегральной функции в (4.8). Тогда r_n – полностью безразмерные коэффициенты, являющиеся полиномами по зарядам g_n . Объединяя описанное выше условие сокращения полюсов по ε и формулы (3.4), получаем

$$Z_{\perp} = 1, \quad Z_{\parallel} = 1 - \frac{r_1 S_d}{2(2\pi)^d \varepsilon} + \dots, \quad Z_n = 1 - \frac{r_n}{g_n} \frac{S_d}{2(2\pi)^d \varepsilon} + \dots \quad (4.10)$$

Оператор $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ в (3.9) принимает вид

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu = \sum_n (\tilde{\mathcal{D}}_\mu g_n) \partial_{g_n} = \sum_n \beta_n \partial_{g_n}.$$

Поэтому, для того чтобы получить необходимую точность, достаточно использовать только первые вклады в β -функции (3.9). Это дает

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu \simeq -\frac{\varepsilon}{2} \mathcal{D}_g, \quad \mathcal{D}_g = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) g_n \partial_{g_n}. \quad (4.11)$$

Данное соображение вместе с соотношениями (4.10), (3.6) и (3.9) приводит к следующему выражению для однопетлевых РГ-функций:

$$\gamma_{\parallel} = a \frac{\mathcal{D}_g r_1}{2}, \quad a \equiv \frac{S_d}{2(2\pi)^d}, \quad (4.12)$$

$$\beta_n = -\varepsilon \frac{n-1}{2} g_n + \frac{n+3}{4} g_n \gamma_{\parallel} - \frac{a}{2} (\mathcal{D}_g - n+1) r_n. \quad (4.13)$$

Явные выражения для первых четырех коэффициентов r_n (первый член r_0 в (4.9) не дает вклада в (4.8)) находятся из определений (4.9), (4.4), (3.4):

$$\begin{aligned} r_1 &= g_3 - \frac{1}{2} g_2^2, & r_2 &= g_4 - \frac{3}{2} g_2 g_3 + \frac{3}{4} g_2^3, \\ r_3 &= g_5 - 2g_2 g_4 - \frac{3}{2} g_3^2 + \frac{9}{2} g_2^2 g_3 - \frac{15}{8} g_2^4, \\ r_4 &= g_6 - \frac{5}{2} g_2 g_5 + \frac{15}{2} g_2^2 g_4 - 5g_3 g_4 + \frac{45}{4} g_2 g_3^2 - \frac{75}{4} g_2^3 g_3 + \frac{105}{16} g_2^5; \end{aligned}$$

при подстановке в (4.12) они дают

$$\gamma_{\parallel} = \frac{a}{2} (2g_3 - g_2^2), \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= -\frac{\varepsilon}{2} g_2 + a(-g_4 + \frac{11}{4} g_2 g_3 - \frac{1}{8} g_2^3), \\ \beta_3 &= -\varepsilon g_3 + a(-g_5 + 2g_2 g_4 + 3g_3^2 - \frac{21}{4} g_2^2 g_3 + \frac{15}{8} g_2^4). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Напомним, что мы положили $g_n \sim g_2^{n-1}$ для внутренней согласованности приближения.

5. АТТРАКТОРЫ И КРИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ

Обратимся к полной системе (4.15) β -функций. Неподвижные точки РГ-уравнений находятся из условия $\beta_n(g_*) = 0$, $n = 2, 3, \dots$. Явный вид β -функций (4.15) показывает, что мы можем выбрать координаты g_{2*} и g_{3*} произвольно, тогда все g_{n*} с $n \geq 4$ однозначно определяются через них с помощью уравнений $\beta_k(g_*) = 0$ для $k \geq 3$. Это означает, что в бесконечномерном пространстве констант взаимодействия $g \equiv \{g_n\}$ РГ-уравнения (3.7) имеют двумерную поверхность неподвижных точек, параметризованную значениями g_{2*} и g_{3*} .

В общем случае анализ этих точек – непростая задача. Тем не менее согласно общему правилу [30] точка g_* ИК-устойчива, если все действительные части собственных чисел матрицы с элементами $\omega_{nm} = \partial\beta_n(g_*)/\partial g_m$ строго положительны. Для этого необходимо, чтобы все диагональные элементы ω_{nn} были положительны. Из уравнения (4.13) можно получить эти элементы для всех значений n :

$$\omega_{22} = -\frac{\varepsilon}{2} + a \left[\frac{11}{4} g_{3*} - \frac{3}{8} g_{2*}^2 \right], \quad \omega_{33} = -\varepsilon + a \left[6g_{3*} - \frac{21}{4} g_{2*}^2 \right],$$

а для $n \geq 4$ имеем

$$\omega_{nn} = -\varepsilon \frac{n-1}{2} + a \frac{(n+1)^2 + 2}{4} g_{3*} - \frac{a}{8} (n(3n+4) + 3) g_{2*}^2.$$

В области $g_{3*} \geq 7g_{2*}^2/8 + \varepsilon/6$ все эти величины положительны. Конечно, это только необходимое условие, тем не менее мы можем предположить, что поверхность неподвижных точек g_* содержит область ИК-устойчивости. Если это действительно так, модель может проявлять ИК-скейлинг с неуниверсальными критическими размерностями (т. е. с размерностями, не зависящими от параметров g_{2*} и g_{3*}).

В динамических моделях типа (2.1) критическая размерность Δ_F произвольной величины F (поля или параметры) задается следующими выражениями:

$$\Delta_F = d_F^\perp + d_F^\parallel \Delta_\parallel + d_F^\omega \Delta_\omega + \gamma_F^*, \quad \Delta_\omega = 2 - \gamma_\perp^*, \quad \Delta_\parallel = 1 + \frac{\gamma_\parallel^*}{2}. \quad (5.1)$$

В нашем случае для $F = h$ имеем $\gamma_h^* = 0$ и $\gamma_\perp^* = 0$ (поля и параметр $\nu_\perp$ не ренормируются). Из соотношений (5.1), используя табл. 1, получаем точный результат $2\Delta_h = d - 1 + \Delta_\parallel - \Delta_\omega$; из выражения (4.14) мы находим в однопетлевом приближении

$$\Delta_\parallel = 1 + a \frac{2g_{3*} - g_{2*}^2}{4}, \quad \Delta_h = a \frac{2g_{3*} - g_{2*}^2}{8}.$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы применили к модифицированной модели из работ [14], [15] стандартную квантово-полевую РГ. Оказалось, что эта модель может быть переформулирована как ренормируемая квантово-полевая модель с бесконечным числом независимых констант ренормировки (и, таким образом, с бесконечным числом констант взаимодействия). Действительно, для того чтобы построить ренормируемую модель, необходимо включить бесконечно много констант взаимодействия, вследствие чего соответствующие РГ-уравнения содержат бесконечно много β -функций. Несмотря на это, оказывается возможным получить однопетлевой контрчлен, используя метод, предложенный ранее в работе [27] для изотропной модели поверхностного огрубления. Метод дает двухмерную поверхность неподвижных точек, которая, вероятно, содержит область или области ИК-устойчивости. Действительно, результаты экспериментов (см. обсуждение в работе [15]) свидетельствуют о наличии двух широких диапазонов значений критического индекса огрубления, что может объясняться наличием двух разных областей ИК-устойчивости.

Модель, для того чтобы быть ренормируемой, должна содержать бесконечное число констант взаимодействия, поэтому “укороченные” модели типа моделей из работ [14], [15] или моделей с нечетной $V(h)$ могут не подходить для РГ-анализа.

Наивный способ сравнения результатов для модели из [14], [15] с результатами настоящей статьи путем приравнивания к нулю соответствующих констант взаимодействия в $V(h)$ показывает, что согласия нет. Чтобы сравнить критические индексы двух моделей, нужно положить $z_{\perp} = \Delta_{\omega}$, $\zeta_{\perp} = \Delta_{\parallel}$, $\alpha_{\perp} = \Delta_h$. Очевидный подсчет показывает, что в случае $\lambda_n = 0$ для всех n кроме $n = 3$ критические индексы равны $\Delta_{\omega} = 2$, $\Delta_{\parallel} = 1 + (2 - d)/6$ и $\Delta_h = (2 - d)/12$. Последние два значения отличаются от полученных в [14], [15].

Для нечетной функции $V(h)$ двумерная поверхность неподвижных точек переходит в кривую. Из соображений симметрии и из явного выражения (4.8) для кон- трчлена видно, что эта модель ренормируема. Нужно просто положить все нечетные константы взаимодействия g_{2n+1} и соответствующие β -функции в (4.13) равными нулю.

Если поверхность неподвижных точек действительно содержит области ИК-устойчивости, то модель проявляет скейлинговое поведение. Соответствующие критические индексы оказываются неуниверсальными, так как они зависят от координат неподвижной точки на поверхности (кривой). Тем не менее критические индексы удовлетворяют определенным точным соотношениям.

В дальнейшем было бы интересно исследовать поведение модели в случае, когда в нее включено турбулентное поле скорости (изотропный случай см. в работе [28]).

С более теоретической точки зрения хотелось бы выписать РГ-уравнения и найти неподвижные точки в терминах функции $V(h)$, чтобы вместо бесконечного числа β -функций для бесконечного числа констант взаимодействия g_n иметь только один функционал $\beta(V)$ с одним аргументом $V(h)$ (см. обсуждение в статье [33] для общего случая). Эта работа уже ведется, но еще не завершена.

Благодарности. Авторы выражают признательность Л. Ц. Аджемьяну, М. Гнатичу, Ю. Хонконену и М. Ю. Налимову за полезные обсуждения. Авторы благодарят организаторов V Международной конференции “Модели квантовой теории поля” (MQFT–2015) за возможность представить результаты данного исследования.

Список литературы

- [1] M. J. Kirkby, “Hillslope process-response models based on the continuity equation”, *Slopes: Form and Process*, ed. D. Brunnsden, Institute of British Geographers, London, 1971, 15–29.
- [2] A. E. Scheidegger, *Theoretical Geomorphology*, Springer, New York, 1991.
- [3] I. Rodríguez-Iturbe, A. Rinaldo, *Fractal River Basins: Chance and Self-Organization*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [4] A. D. Howard, G. Kerby, “Channel changes in badlands”, *Geol. Soc. Am. Bull.*, **94**:6 (1983), 739–752.
- [5] J. W. Kirchner, “Statistical inevitability of Horton’s laws and the apparent randomness of stream channel networks”, *Geology*, **21**:7 (1993), 591–594.
- [6] G. Willgoose, R. L. Bras, I. Rodríguez-Iturbe, “A coupled channel network growth and hillslope evolution model: 1. Theory”, *Water Resour. Res.*, **27**:7 (1991), 1671–1684.
- [7] D. S. Loewenherz, “Stability and the initiation of channelized surface drainage: A reassessment of the short wavelength limit”, *J. Geophys. Res.: Solid Earth*, **96**:B5 (1991), 8453–8464.
- [8] A. D. Howard, “A detachment-limited model of drainage basin evolution”, *Water Resour. Res.*, **30**:7 (1994), 2261–2285; A. D. Howard, W. E. Dietrich, M. A. Seidl, “Modeling fluvial

- erosion on regional to continental scales”, *J. Geophys. Res.: Solid Earth*, **99**:B7 (1994), 13971–13986.
- [9] N. Izumi, G. Parker, “Inception of channelization and drainage basin formation: upstream-driven theory”, *J. Fluid Mech.*, **283** (1995), 341–363.
 - [10] A. Giacometti, A. Maritan, J. R. Banavar, “Continuum model for river networks”, *Phys. Rev. Lett.*, **75**:3 (1995), 577–580; J. R. Banavar, F. Colaiori, A. Flammini, A. Giacometti, A. Maritan, A. Rinaldo, “Sculpting of a fractal river basin”, *Phys. Rev. Lett.*, **78**:23 (1997), 4522–4525.
 - [11] E. Somfai, L. M. Sander, “Scaling and river networks: a Landau theory for erosion”, *Phys. Rev. E*, **56**:1 (1997), R5–R8.
 - [12] S. Kramer, M. Marder, “Evolution of river networks”, *Phys. Rev. Lett.*, **68**:2 (1992), 205–208.
 - [13] D. Sornette, Y.-C. Zhang, “Non-linear Langevin model of geomorphic erosion processes”, *Geophys. J. Internat.*, **113**:2 (1993), 382–386.
 - [14] R. Pastor-Satorras, D. H. Rothman, “Stochastic equation for the erosion of inclined topography”, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:19 (1998), 4349–4352.
 - [15] R. Pastor-Satorras, D. H. Rothman, “Scaling of a slope: the erosion of tilted landscapes”, *J. Stat. Phys.*, **93**:3–4 (1998), 477–500.
 - [16] P. S. Dodds, D. H. Rothman, “Scaling, universality, and geomorphology”, *Annu. Rev. Earth Planet Sci.*, **28** (2000), 571–610.
 - [17] A. Giacometti, “Local minimal energy landscapes in river networks”, *Phys. Rev. E*, **62**:5 (2000), 6042–6051.
 - [18] K. K. Chan, D. H. Rothman, “Coupled length scales in eroding landscapes”, *Phys. Rev. E*, **63**:5 (2001), 055102, 4 pp.
 - [19] M. Kardar, G. Parisi, Y.-C. Zhang, “Dynamic scaling of growing interfaces”, *Phys. Rev. Lett.*, **56**:9 (1986), 889–892.
 - [20] H. Jeong, B. Kahng, D. Kim, “Anisotropic surface growth model in disordered media”, *Phys. Rev. Lett.*, **77**:25 (1996), 5094–5097; H.-J. Kim, I.-M. Kim, J. M. Kim, “Hybridized discrete model for the anisotropic Kardar–Parisi–Zhang equation”, *Phys. Rev. E*, **58**:1 (1998), 1144–1147.
 - [21] E. Vivo, M. Nicoli, R. Cuerno, “Strong anisotropy in two-dimensional surfaces with generic scale invariance: Gaussian and related models”, *Phys. Rev. E*, **86**:5 (2012), 051611, 12 pp.; “Strong anisotropy in two-dimensional surfaces with generic scale invariance: Nonlinear effects”, *Phys. Rev. E*, **89**:4 (2014), 042407, 21 pp.; E. Vivo, M. Nicoli, M. Engler, T. Michely, L. Vázquez, R. Cuerno, “Strong anisotropy in surface kinetic roughening: Analysis and experiments”, *Phys. Rev. B*, **86**:24 (2012), 245427, 8 pp.
 - [22] Н. В. Антонов, П. И. Какинъ, “Случайный рост границы раздела фаз в случайной среде: ренормгрупповой анализ простой модели”, *ТМФ*, **185**:1 (2015), 37–56.
 - [23] T. Hwa, M. Kardar, “Dissipative transport in open systems: an investigation of self-organized criticality”, *Phys. Rev. Lett.*, **62**:16 (1989), 1813–1816; “Avalanches, hydrodynamics, and discharge events in models of sandpiles”, *Phys. Rev. A*, **45**:10 (1992), 7002–7023.
 - [24] B. Tadić, “Disorder-induced critical behavior in driven diffusive systems”, *Phys. Rev. E*, **58**:1 (1998), 168–173.
 - [25] N. V. Antonov, P. I. Kakin, “Effects of random environment on a self-organized critical system: renormalization group analysis of a continuous model”, *Eur. Phys. J: Web Conf.*, **108** (2016), 02009, 6 pp.
 - [26] С. И. Павлик, “Скейлинг для растущей границы раздела с нелинейной диффузией”, *ЖЭТФ*, **106**:2 (1994), 553–559.
 - [27] Н. В. Антонов, Ал. Н. Васильев, “Квантово-полевая ренормгруппа в задаче о растущей границе раздела”, *ЖЭТФ*, **108**:3 (1995), 885–893.

- [28] Н. В. Антонов, “Ренормализационная группа в задаче о турбулентной конвекции пассивной примеси в случае нелинейной диффузии”, *ЖЭТФ*, **112**:5(11) (1997), 1649–1663.
- [29] N. V. Antonov, *Nuclear and Particle Physics. Theoretical Physics*, Proceedings of the XLVII Winter School of PNPI NRC KI (25 February – 2 March, 2013), ed. V. T. Kim, St. Petersburg Nucl. Phys. Inst., St. Petersburg, 2014, 147.
- [30] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, International Series of Monographs on Physics, **77**, Clarendon Press, Oxford, 1989.
- [31] А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.
- [32] А. Н. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике*, ЛГУ, Л., 1976.
- [33] Д. И. Казаков, “Об одном обобщении уравнений ренормгруппы для квантово-полевых теорий произвольного вида”, *ТМФ*, **75**:1 (1988), 157–160.