Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Али, Т. Ферозе, Пространство-время типа гравитационной волны с цилиндрической симметрией, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 2, 343–355

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9148>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:11:12

© 2017 г.

Ф. Али*, Т. Ферозе†

ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ ТИПА ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Представлены симметрии Нётер для лагранжиана, задающего геодезические, в пространстве-времени с цилиндрической симметрией в конформном времени. Временной конформный фактор вводится в общее цилиндрически-симметричное пространство-время, чтобы сделать его нестатическим и затем найти приближенные симметрии Нётер действия, соответствующего лагранжиану. В первом приближении теории возмущений найдены все лагранжианы для цилиндрически-симметричных пространств-времен, для которых существуют приближенные симметрии Нётер.

Ключевые слова: симметрии Нётер, теорема Нётер, первые интегралы, полевые уравнения Эйнштейна, гравитационная волна.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9148>

1. ВВЕДЕНИЕ

Гравитационные волны являются распространяющимися флуктуациями гравитационных полей, т. е. возмущениями в пространстве-времени, порождаемыми в основном движениями массивных тел. Эти возмущения пространства-времени распространяются со скоростью света [1]–[5]. Каждое тело на пути такой волны ощущает воздействие приливно-отливной гравитационной силы, которая действует в направлении, перпендикулярном направлению распространения волн; эти силы изменяют расстояние между точками пространства-времени, и величина этих изменений пропорциональна расстоянию между точками. Гравитационные волны могут быть обнаружены приборами, которые измеряют индуцированные изменения длины. Частоты и амплитуды волн связаны с движением рассматриваемых масс. Таким образом, анализ гравитационных волн позволяет изучать источники, создающие эти волны. Эти волны являются полезным инструментом получения информации об источниках, которые производят эти волны.

*Department of Mathematics, Kohat University of Science and Technology, Kohat, Pakistan.
E-mail: farhadmardan@gmail.com

†School of Natural Sciences, National University of Sciences and Technology, Islamabad, Pakistan

Энергия и импульс являются важными величинами, определение которых было фокусом многих исследований в области общей теории относительности. К сожалению, до сих пор нет общепринятого определения энергии и импульса в общей теории относительности, и эти величины, вообще говоря, не сохраняются [6]–[8]. Были сделаны различные попытки определить эти величины. Эйнштейн и Розен [9] показали, что гравитационные волны забирают энергию из источника; возникает основной вопрос, как определить эту энергию, которая передается гравитационной волной от источника. Симметрии Нётер играют важную роль в этом отношении [10], [11], так как существует однозначное соответствие между этими симметриями и законами сохранения [7], [12]. Симметрии Нётер используются для определения законов сохранения в цилиндрически-симметричном статическом пространстве-времени, в некоторых классах пространства-времени типа pp-волн, в пространстве-времени типа Годеля и для $f(R)$ -гравитации [13]–[16]. Они также используются в расширенной гравитации и квантовой космологии [17], [18].

В последнее время приближенные симметрии Нётер использовались для определения приближенных законов сохранения в хаотичной гамильтоновой системе и в динамической системе [19]–[23]. Мы применили метод приближенных симметрий Нётер для нахождения цилиндрически-симметричных нестатических пространств-времен, которые не являются в точности пространствами-временами гравитационных волн, но являются приближенно пространствами-временами типа гравитационных волн, для которых $R_{\mu\nu} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Пространства-времена Леви-Чивиты – цилиндрически-симметричные пространства-времена, которые являются плоскими пространствами-временами Риччи, но статическими [24] (не зависящими от времени), однако пространство-время гравитационной волны должно быть нестатическим. В настоящей работе мы рассматриваем цилиндрически-симметричное пространство-время, которое в результате воздействия со стороны временного конформного фактора становится нестатическим пространством-временем, т.е. оно не соответствует пространству-времени типа гравитационных волн. Это пространство-время рассматривается как приближенное пространство-время гравитационных волн, что дает нам информацию о поведении точного пространства-времени типа гравитационных волн.

Приближенные симметрии Нётер для лагранжиана общего цилиндрически-симметричного пространства-времени получены в первом приближении теории возмущений для изучения энергии и импульса. Мы рассматриваем цилиндрически-симметричные статические пространства-времена, так как они играют важную роль в изучении гравитационных волн [25], статическая часть которых обеспечивает сохранение энергии. Так как волны не могут быть статическими, мы вводим общий зависящий от времени конформный фактор $e^{\epsilon f(t)}$, где ϵ – малый произвольный параметр, а $f(t)$ – обобщенная функция t , для того чтобы сделать пространство-время нестатическим. С помощью разложения Тейлора получаем приближенную (возмущенную) в первом порядке цилиндрически-симметричную метрику и соответствующий приближенный лагранжиан. Этот приближенный лагранжиан затем используется для нахождения приближенных симметрий Нётер. Мы исследовали много случаев, в которых точные симметрии для статических пространств-времен появляются вместе с приближенными частями. Среди них времениподобный бесконечно

малый производящий оператор $\partial/\partial t$ является основным фокусом нашей работы, который соответствует энергии материи в соответствующих пространствах-времени. Мы также находим некоторые другие приближенные симметрии Нётер, соответствующие другим законам сохранения, которые пропадают при формировании гравитационной волны.

Черные дыры являются одним из источников гравитационных волн. Возмущение, которое мы используем в этой статье, может быть применено в теории черных дыр. Мы исследовали этот тип возмущения в случае черной дыры Шварцшильда [26] и собираемся исследовать этот тип возмущения в случае обобщенных цилиндрически-симметричных пространств-времен, так как они связаны с теорией черных дыр. В настоящей работе мы находим все те цилиндрически-симметричные пространства-времена, которые допускают конформный фактор, зависящий от времени. Мы надеемся, что эта работа будет полезна для понимания теории черных дыр. Наша будущая цель заключается в том, чтобы найти конформные при всех временах сферически-симметричные пространства-времена, которые непосредственно связаны с теорией черных дыр, так как черная дыра считается сферически-симметричной.

2. ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЕ СТАТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ, ЕГО ЛАГРАНЖИАН И ВОЗМУЩЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Обобщенное цилиндрически-симметричное статическое пространство-время и соответствующий лагранжиан даются следующими выражениями [27]:

$$\begin{aligned} ds_e^2 &= e^{\nu(r)} dt^2 - dr^2 - e^{\mu(r)} d\theta^2 - e^{\lambda(r)} dz^2, \\ \mathcal{L}_e &= e^{\nu(r)} \dot{t}^2 - \dot{r}^2 - e^{\mu(r)} \dot{\theta}^2 - e^{\lambda(r)} \dot{z}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Теперь, вводя обобщенный зависящий от времени конформный фактор $e^{\epsilon f(t)}$, мы имеем

$$ds^2 = e^{\epsilon f(t)} ds_e^2, \quad \mathcal{L} = e^{\epsilon f(t)} \mathcal{L}_e. \quad (2)$$

В первом приближении возмущенная метрика и лагранжиан в развернутой форме записываются как

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{\nu(r)} dt^2 - dr^2 - e^{\mu(r)} d\theta^2 - e^{\lambda(r)} dz^2 + \\ &\quad + \epsilon f(t)(e^{\nu(r)} dt^2 - dr^2 - e^{\mu(r)} d\theta^2 - e^{\lambda(r)} dz^2), \\ \mathcal{L} &= e^{\nu(r)} \dot{t}^2 - \dot{r}^2 - e^{\mu(r)} \dot{\theta}^2 - e^{\lambda(r)} \dot{z}^2 + \epsilon f(t)(e^{\nu(r)} \dot{t}^2 - \dot{r}^2 - e^{\mu(r)} \dot{\theta}^2 - e^{\lambda(r)} \dot{z}^2) = \\ &= \mathcal{L}_e + \epsilon \mathcal{L}_a, \end{aligned}$$

где $\mathcal{L}_e$ и $\mathcal{L}_a$ – точная и возмущенная части лагранжиана соответственно. Эта процедура дает приближенные части в симметриях Нётер, которые будут соответствовать приближенным законам сохранения в соответствующих пространствах-времени.

3. ПРИБЛИЖЕННАЯ СИММЕТРИЯ НЁТЕР

Оператор $\mathbf{X}$ называется производящим оператором приближенных симметрий Нётер, если он удовлетворяет условию [7]

$$\mathbf{X}^1 \mathcal{L} + (D\xi) \mathcal{L} = DA, \quad (3)$$

где $\mathbf{X}^1$ является продолжением первого порядка первого же порядка приближенной симметрии Нётер $\mathbf{X} = \mathbf{X}_e + \epsilon \mathbf{X}_a$,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_e &= \xi_e \frac{\partial}{\partial s} + \eta_e^0 \frac{\partial}{\partial t} + \eta_e^1 \frac{\partial}{\partial r} + \eta_e^2 \frac{\partial}{\partial \theta} + \eta_e^3 \frac{\partial}{\partial z}, \\ \mathbf{X}_a &= \xi_a \frac{\partial}{\partial s} + \eta_a^0 \frac{\partial}{\partial t} + \eta_a^1 \frac{\partial}{\partial r} + \eta_a^2 \frac{\partial}{\partial \theta} + \eta_a^3 \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

являются точной и приближенной частями $\mathbf{X}$ соответственно, а D – дифференциальный оператор вида

$$D = \frac{\partial}{\partial s} + \dot{t} \frac{\partial}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (5)$$

$A = A_e + \epsilon A_a$, где A_e и A_a – точная и приближенная части калибровочной функции A . Уравнение (3) разбивается на две части следующим образом:

$$\mathbf{X}_e \mathcal{L}_e + (D\xi_e) \mathcal{L}_e = DA_e, \quad (6)$$

$$\mathbf{X}_a^1 \mathcal{L}_e + \mathbf{X}_e^1 \mathcal{L}_a + (D\xi_e) \mathcal{L}_a + (D\xi_a) \mathcal{L}_e = DA_a. \quad (7)$$

Здесь, η_e^i , η_a^i , ξ_e , ξ_a , A_e и A_a являются функциями s, t, r, θ, z , а $\dot{\eta}_e^i$, $\dot{\eta}_a^i$ – функциями $s, t, r, \theta, z, \dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}$, и точка над буквой означает дифференцирование по s . В настоящей работе мы ищем решения уравнения (7), так как эти решения дают все цилиндрически-симметричные пространства-времена, лагранжианы которых допускают приближенные симметрии Нётер. Из уравнения (7) мы получаем систему 19 симметрий Нётер, определяющих дифференциальные уравнения в частных производных, решения которых обеспечивают необходимые результаты.

4. СИСТЕМА СИММЕТРИЙ НЁТЕР, УПРАВЛЯЮЩАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Из уравнения (7) мы получаем систему 19 дифференциальных уравнений в частных производных, которая приводится в приложении. Мы решаем эту систему с помощью точных решений цилиндрически-симметричного статического пространства-времени [28]. В настоящем разделе мы перечислим все те классы, для которых существуют приближенные симметрии Нётер.

4.1. Приближенные симметрии Нётер из лагранжиана цилиндрически-симметричного пространства-времени. Пространство-время вида

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - dr^2 - e^{\mu(r)} d\theta^2 - e^{\lambda(r)} dz^2 + \frac{\epsilon t}{\alpha} (e^{\nu(r)} dt^2 - dr^2 - e^{\mu(r)} d\theta^2 - e^{\lambda(r)} dz^2) \quad (8)$$

ТАБЛИЦА 1

Симметрии	Первые интегралы
$\mathbf{X}_1$	$E = -2e^{\nu(x)}\dot{t} - \frac{\epsilon}{\alpha}(2t\dot{t}e^{\nu(x)} - \tilde{\mathcal{L}}s)$
$\mathbf{X}_2$	$P_\theta = 2\left(1 + \frac{\epsilon t}{\alpha}\right)e^{\mu(r)}\dot{\theta}$
$\mathbf{X}_3$	$P_z = 2\left(1 + \frac{\epsilon t}{\alpha}\right)e^{\lambda(r)}\dot{z}$
$\mathbf{X}_4$	$\tilde{\mathcal{L}} = \left(1 + \frac{\epsilon t}{\alpha}\right)(e^{\nu(x)}\dot{t}^2 - \dot{r}^2 - e^{\mu(x)}\dot{\theta}^2 - e^{\lambda(r)}\dot{z}^2)$

допускает только четыре симметрии Нётер для функций $\nu(r)$, $\mu(r)$ и $\lambda(r)$ общего вида, которые записываются как

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\epsilon s}{\alpha} \frac{\partial}{\partial s}, \quad \mathbf{X}_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \mathbf{X}_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{X}_4 = \frac{\partial}{\partial s}. \quad (9)$$

Первые интегралы, соответствующие этим симметриям, приведены в табл. 1. Интегралы P_θ , P_z и $\tilde{\mathcal{L}}$, приведенные в табл. 1, остаются одинаковыми во всех классах, приведенных в этой статье; изменяются только функции $\nu(r)$, $\mu(r)$ и $\lambda(r)$.

Мы имеем следующие классы для шести симметрий Нётер.

1. Первый класс шести симметрий Нётер:

$$ds^2 = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a dt^2 - dr^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a d\theta^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 dz^2 + \\ + \frac{\epsilon t}{\alpha} \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a dt^2 - dr^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a d\theta^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 dz^2 \right), \quad a \neq 2. \quad (10)$$

Симметрии Нётер, соответствующие лагранжиану пространства-времени в уравнении (10), записываются как

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad \mathbf{X}_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \mathbf{X}_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \\ \mathbf{X}_4 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\epsilon}{4\alpha} \left((2-k)t \frac{\partial}{\partial t} + 2r \frac{\partial}{\partial r} + (2-k)\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \\ \mathbf{X}_5 = s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2-a}{4} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2-a}{4} z \frac{\partial}{\partial z} - \\ - \frac{\epsilon}{32\alpha} \left(4r^2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{-a} + t^2(2-a)^2 + \theta^2(2-a)^2 \frac{\partial}{\partial t} + \right. \\ \left. + 4rt(2-a)^2 \frac{\partial}{\partial r} + 2t\theta(2-k)^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \\ \mathbf{X}_6 = \theta \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\epsilon}{4\alpha} \left(t\theta(2-a) \frac{\partial}{\partial t} + 2r\theta \frac{\partial}{\partial r} + \right. \\ \left. + \left(\frac{2r^2}{a-2} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{-a} + \frac{t^2(2-a)}{2} + \frac{\theta^2(2-a)}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (11)$$

ТАБЛИЦА 2

Симметрии	Первые интегралы
$\mathbf{X}_4$	$\phi_4 = 2\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \dot{t} + \frac{\epsilon}{2\alpha} \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a t\dot{t}(2-a) + 2r\dot{r} + \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \theta\dot{\theta}(2-a) \right)$
$\mathbf{X}_5$	$\phi_5 = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \frac{(2-a)t\dot{t}}{2} - r\dot{r} - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \frac{(2-a)\theta\dot{\theta}}{2} + s\mathcal{L} -$ $-\frac{\epsilon}{2\alpha} \left(-t^2\dot{t}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \frac{2-a}{2} + 2r\dot{t} + t\theta\dot{\theta}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \frac{2-a}{2} + \right.$ $\left. + \frac{1}{16} \left(4r^2\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{-a} + t^2(2-a)^2 + \theta^2(2-a) - 4rt(2-a)^2 - 4t\theta(2-a)^2 \right) \right)$
$\mathbf{X}_6$	$\phi_6 = 2\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a (\theta\dot{t} - \dot{\theta}t) - \frac{\epsilon}{2\alpha} \left(\theta t\dot{t}(2-a) - 2r\dot{r}\theta - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \dot{\theta} \left(\frac{2r^2}{a-2} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{-a} + \right. \right.$ $\left. \left. + \frac{t^2(2-a)}{2} + \frac{\theta^2(2-a)}{2} \right) \right)$

ТАБЛИЦА 3

Симметрии	Первые интегралы
$\mathbf{X}_4$	$L = 2\left(1 + \frac{\epsilon t}{\alpha}\right) \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a (\theta\dot{z} - z\dot{\theta})$
$\mathbf{X}_5$	$E = 2\left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 \dot{t} + \frac{\epsilon}{\alpha} \left(t\dot{t}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 + \frac{r\dot{r}}{2} + (2-a)\frac{\theta\dot{\theta}}{4} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \right) + (2-a)\frac{z\dot{z}}{4} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \right)$
$\mathbf{X}_6$	$Scaling = -\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \frac{(2-a)z\dot{z}}{2} - r\dot{r} - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \frac{(2-a)\theta\dot{\theta}}{2} + s\mathcal{L}$

Законы сохранения или первые интегралы, соответствующие приближенным симметриям (11), приводятся в табл. 2.

2. Второй класс для шести симметрий Нётер:

$$ds^2 = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 dt^2 - dr^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a d\theta^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a dz^2 +$$

$$+ \frac{\epsilon t}{\alpha} \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 dt^2 - dr^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a d\theta^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a dz^2 \right), \quad a \neq 2. \quad (12)$$

Симметрии Нётер, соответствующие лагранжиану пространства-времени (12), имеют вид

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad \mathbf{X}_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \mathbf{X}_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{X}_4 = z \frac{\partial}{\partial \theta} - \theta \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\mathbf{X}_5 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\epsilon}{4\alpha} \left(2r \frac{\partial}{\partial r} + \theta(2-a) \frac{\partial}{\partial \theta} + z(2-a) \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (13)$$

$$\mathbf{X}_6 = s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2-a}{4} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2-a}{4} z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Первые интегралы, соответствующие симметриям (13), приведены в табл. 3.

ТАБЛИЦА 4

Симметрии	Первые интегралы
$\mathbf{X}_4$	$L = \left(1 + \frac{\epsilon t}{\alpha}\right) \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 (\theta \dot{z} - z \dot{\theta})$
$\mathbf{X}_5$	$E = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \dot{t} + \frac{\epsilon}{\alpha} \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \left(t\dot{t} - \frac{(2-a)t\dot{t}}{4} \right) + \frac{r\dot{r}}{2} \right)$
$\mathbf{X}_6$	$\phi_1 = 2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \left(\frac{(2-a)t\dot{t}}{4} - 2\dot{t}^2 s \right) - r\dot{r} + 2s\dot{r}^2 + sL +$ $+ \frac{\epsilon}{\alpha} \left(-\frac{r^2\dot{t}}{4} + \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \left(-\frac{7t^2\dot{t}(2-a)}{16} \right) + 2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a t\dot{t}^2 s - \frac{r\dot{r}(1+a)}{2} + 2ts\dot{r}^2 \right)$

3. Лагранжиан, который задает геодезические, следует из метрики пространства-времени

$$ds^2 = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a dt^2 - dr^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 d\theta^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 dz^2 +$$

$$+ \frac{\epsilon t}{\alpha} \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a dt^2 - dr^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 d\theta^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 dz^2 \right), \quad a \neq 2, \quad (14)$$

он допускает следующие симметрии Нётер:

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad \mathbf{X}_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \mathbf{X}_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{X}_4 = z \frac{\partial}{\partial \theta} - \theta \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\mathbf{X}_5 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\epsilon}{4\alpha} \left((2-a)t \frac{\partial}{\partial t} + 2r \frac{\partial}{\partial r} \right),$$

$$\mathbf{X}_6 = s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{2-a}{4} t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} -$$

$$- \frac{\epsilon}{32\alpha} \left(\left(4r^2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{-a} + t^2(a-2)^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} + 4rt(2-a) \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (15)$$

Соответствующие первые интегралы приведены в табл. 4.

4.2. Пространство-время с восемью симметриями Нётер и законы сохранения. Второй класс, допускающий восемь симметрий Нётер, имеет вид

$$ds^2 = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a dt^2 - dr^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a d\theta^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a dz^2 +$$

$$+ \frac{\epsilon t}{\alpha} \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a dt^2 - dr^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a d\theta^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a dz^2 \right), \quad a \neq 2. \quad (16)$$

Соответствующие производящие операторы симметрий Нётер имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1 &= \frac{\partial}{\partial s}, & \mathbf{X}_2 &= \frac{\partial}{\partial \theta}, & \mathbf{X}_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, & \mathbf{X}_4 &= z \frac{\partial}{\partial \theta} - \theta \frac{\partial}{\partial z}, \\
\mathbf{X}_5 &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\epsilon}{8\alpha} \left(2(2-a)t \frac{\partial}{\partial t} - 2x \frac{\partial}{\partial x} + 2(2-a)y \frac{\partial}{\partial y} + 2(2-a)z \frac{\partial}{\partial z} \right), \\
\mathbf{X}_6 &= \theta \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\epsilon}{8\alpha} \left(2(2-a)t\theta \frac{\partial}{\partial t} \right) - \\
&\quad - \frac{\epsilon}{8\alpha} \left(4r\theta \frac{\partial}{\partial r} - (a-2) \left(\frac{4r^2}{(a-2)^2} \left(\frac{r}{\alpha} \right)^{-a} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - t^2 + z^2 - \theta^2 \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + 2(2-a)\theta z \frac{\partial}{\partial z} \right), \\
\mathbf{X}_7 &= z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\epsilon}{8\alpha} \left(2(2-a)tz \frac{\partial}{\partial t} \right) - \\
&\quad - \frac{\epsilon}{8\alpha} \left(4rz \frac{\partial}{\partial r} - (a-2) \left(\frac{4r^2}{(a-2)^2} \left(\frac{r}{\alpha} \right)^{-a} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - t^2 + \theta^2 - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial z} + 2(2-a)\theta z \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \\
\mathbf{X}_8 &= s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{(2-a)t}{4} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{(2-a)\theta}{4} \frac{\partial}{\partial \theta} + \\
&\quad + \frac{(2-a)z}{4} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\epsilon}{32\alpha} \left(4r^2 \left(\frac{r}{\alpha} \right)^{-a} + (2-a)^2(t^2 + \theta^2 + z^2) \frac{\partial}{\partial t} - \right. \\
&\quad \left. - 4(a-2)tr \frac{\partial}{\partial r} + 2(a-2)^2 \left(t\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + tz \frac{\partial}{\partial z} \right) \right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Оператор $\mathbf{X}_5$ соответствует энергии, $\mathbf{X}_6$, $\mathbf{X}_7$ соответствуют преобразованиям Лоренца (бусты), $\mathbf{X}_8$ соответствует скейлингу в данном пространстве-времени. Первые интегралы, соответствующие этим симметриям, даются в табл. 5.

4.2.1. *Значения кривизны, соответствующие пространству-времени (16).* Тензоры кривизны Римана, соответствующие пространству-времени (16), записываются как

$$\begin{aligned}
R_{0101} &= \frac{(r/\alpha)^a (2a^2 t\epsilon + a^2 \alpha - 4at\epsilon - 2a\alpha)}{4r^2(t\epsilon + \alpha)}, \\
R_{0202} &= \frac{(r/\alpha)^{2a} (2a^2 t\epsilon + a^2 \alpha)}{4r^2(t\epsilon + \alpha)} = R_{0303} = -R_{2323}, \\
R_{1313} &= \frac{(r/\alpha)^a (2a^2 t\epsilon + a^2 \alpha - 4at\epsilon - 2a\alpha)}{4r^2(t\epsilon + \alpha)} = R_{1212}, \\
R_{0212} &= -\frac{a\epsilon(r/\alpha)^a}{r\alpha} = R_{0313}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Из этих выражений ясно, что для $a < 1$ пространство-время (16) является асимптотически плоским и подчиняется правилу, согласно которому волна затухает на значительном удалении от источника.

ТАБЛИЦА 5

Симметрии	Первые интегралы
$\mathbf{X}_4$	$L = \left(1 + \frac{\epsilon t}{\alpha}\right) \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a (\theta \dot{z} - z \dot{\theta})$
$\mathbf{X}_5$	$E = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \dot{t} + \frac{\epsilon}{\alpha} \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \left(t\dot{t} - \frac{(2-a)t\dot{t}}{4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{r\dot{r}}{2} + \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \left(\frac{(2-a)\theta\dot{\theta}}{4} + \frac{(2-a)z\dot{z}}{4} \right) \right)$
$\mathbf{X}_6$	$Boost_{\theta} = 2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \left(\theta \dot{t} + \dot{\theta} t \right) + \frac{\epsilon}{\alpha} \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \frac{(2+b)\theta t \dot{t}}{2} + \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \left(t^2 \dot{\theta} - \dot{\theta}(a-2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{r^2}{(a-2)^2} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{-a} - t^2 - \theta^2 + z^2 \right) + \frac{\theta z^2 \dot{z}(a-2)}{4} \right) \right)$
$\mathbf{X}_7$	$Boost_z = 2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \left(z \dot{t} + \dot{z} t \right) + \frac{\epsilon}{\alpha} \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \frac{(2+b)z t \dot{t}}{2} + \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \left(t^2 \dot{z} - \dot{z}(a-2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{r^2}{(a-2)^2} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{-a} - t^2 - \theta^2 + z^2 \right) + \frac{\theta^2 z \dot{\theta}(a-2)}{4} \right) \right)$
$\mathbf{X}_8$	$Scaling = 2 \left(\frac{2-a}{2} \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a t\dot{t} - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \theta\dot{\theta} - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a z\dot{z} \right) - 2s \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \dot{t}^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \dot{\theta}^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \dot{z}^2 \right) - r\dot{r} + 2s\dot{r}^2 + s\mathcal{L} + \frac{\epsilon}{\alpha} \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \left(\frac{\dot{t}}{16} \left(4r^2 \left(\frac{r}{b}\right)^{-a} + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (2-a)^2 \left(t^2 + \theta^2 + z^2 \right) \right) \right) + 2t\dot{t} \left(\frac{(2-a)t}{4} - s\dot{t} \right) \right) + \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a \left(-\frac{\theta\dot{\theta}t(2-a)}{4} + \right. \\ \left. + 2ts\dot{\theta}^2 - \frac{z\dot{z}t(2-a)}{4} + 2ts\dot{z}^2 \right) + \frac{tr\dot{r}(a-6)}{4} + 2ts\dot{r}^2 \Bigg)$

Соответствующие тензоры кривизны Риччи и скаляр Риччи даются выражениями

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{(r/\alpha)^a (6a^2 t \alpha \epsilon + 3a^2 \alpha^2 - 4at \alpha \epsilon - 2a \alpha^2)}{4r^2 (t\epsilon + \alpha)}, \\
R_{12} &= -\frac{a\epsilon}{2r(t\epsilon + \alpha)}, \quad R_{11} = \frac{3a(a-2)}{4r^2}, \quad R_{22} = \frac{a(3a-2)(r/\alpha)^a}{4r^2} = R_{33}, \quad (19) \\
R_s &= -\frac{3a\alpha^2 (2at\epsilon + a\alpha - 2t\epsilon - \alpha)}{r^2 (t\epsilon + \alpha)^3}.
\end{aligned}$$

Для $a < 2$ пространство-время (16) является асимптотически риччи-плоским. Так как пространство-время (16) является нестатическим цилиндрически-симметричным пространством-временем, оно является цилиндрически-симметричным, приближенно риччи-плоским пространством-временем типа гравитационной волны.

4.2.2. Волновое уравнение в пространстве-времени (16). Волновое уравнение может быть записано как

$$g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \Psi = 0. \quad (20)$$

Оно упрощается и принимает вид

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Psi = 0. \quad (21)$$

С использованием частных производных имеем

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \right) \Psi = 0. \quad (22)$$

Подставляя

$$\begin{aligned} g_{00} &= \left(1 + \frac{\epsilon t}{\alpha}\right) \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a, & g_{11} &= -\left(1 + \frac{\epsilon t}{\alpha}\right), \\ g_{22} &= -\left(1 + \frac{\epsilon t}{\alpha}\right) \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a, & g_{33} &= -\left(1 + \frac{\epsilon t}{\alpha}\right) \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a, \\ g^{00} &= \left(1 - \frac{\epsilon t}{\alpha}\right) \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{-a}, & g^{11} &= -\left(1 - \frac{\epsilon t}{\alpha}\right), \\ g^{22} &= -\left(1 - \frac{\epsilon t}{\alpha}\right) \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{-a}, & g^{33} &= -\left(1 - \frac{\epsilon t}{\alpha}\right) \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{-a} \end{aligned} \quad (23)$$

в (22), мы получаем волновое уравнение в пространстве-времени (16):

$$\begin{aligned} &\left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a (\partial_{tt} - \partial_{\theta\theta} - \partial_{zz}) - \partial_{rr} - \frac{3a}{2} \left(\frac{\alpha}{r}\right) \partial_r - \right. \\ &\left. - \frac{\epsilon}{\alpha} \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^a (t\partial_{tt} - t\partial_{\theta\theta} - t\partial_{zz} - \partial_t) - t\partial_{rr} - \frac{3at}{2} \left(\frac{\alpha}{r}\right) \partial_r \right) \right) \Psi = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

4.3. Девять симметрий Нётер. Лагранжиан метрики

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 dt^a - dr^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 d\theta^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 dz^2 + \\ &+ \frac{\epsilon t}{\alpha} \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 dt^2 - dr^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 d\theta^2 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 dz^2 \right) \end{aligned} \quad (25)$$

дает девять симметрий Нётер, четыре из которых имеют приближенные части. Точные симметрии даются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \frac{\partial}{\partial s}, & \mathbf{X}_2 &= \frac{\partial}{\partial \theta}, & \mathbf{X}_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ \mathbf{X}_4 &= \theta \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial \theta}, & \mathbf{X}_5 &= s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r}, \\ \mathbf{X}_6 &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\epsilon}{2\alpha} r \frac{\partial}{\partial r}, & \mathbf{X}_7 &= s^2 \frac{\partial}{\partial s} + rs \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\epsilon\alpha}{2} s \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{X}_8 &= \theta \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\epsilon}{2\alpha} \left(r\theta \frac{\partial}{\partial r} - \alpha^2 \ln\left(\frac{r}{\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \\ \mathbf{X}_9 &= z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\epsilon}{2\alpha} \left(rz \frac{\partial}{\partial r} - \alpha^2 \ln\left(\frac{r}{\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Первые интегралы, соответствующие этим симметриям Нётер, приводятся в табл. 6.

ТАБЛИЦА 6

Симметрии	Первые интегралы
$\mathbf{X}_4$	$L = \left(1 + \frac{\epsilon t}{\alpha}\right) \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 (\theta \dot{z} - z \dot{\theta})$
$\mathbf{X}_5$	$Scaling = -\left(1 + \frac{\epsilon t}{\alpha}\right) r \dot{r} - s \mathcal{L}$
$\mathbf{X}_6$	$\phi_0 = 2 \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 \dot{t} + \frac{\epsilon}{\alpha} \frac{r \dot{r}}{2} \right)$
$\mathbf{X}_7$	$\phi_2 = -2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 s \dot{t} - 2 r \dot{r} s + 2 s^2 \dot{r}^2 + r^2 -$ $-\frac{\epsilon}{\alpha} \left(\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 \left(\alpha^2 s \dot{t} + 2 s t \dot{t}^2 \right) + 2 t \dot{r} (r s - s^2 r) + r^2 \dot{t} \right)$
$\mathbf{X}_8$	$\phi_4 = 2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 (\theta \dot{t} - \dot{\theta} t) + \frac{\epsilon}{\alpha} \left(2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 t \dot{t} \theta - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 \dot{\theta} \alpha^2 \ln \frac{r}{\alpha} - \right.$ $\left. - 2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 \dot{\theta} t^2 \right) + r \dot{r} \theta$
$\mathbf{X}_9$	$\phi_5 = 2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 (z \dot{t} - \dot{z} t) + \frac{\epsilon}{\alpha} \left(2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 t \dot{t} z - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 \dot{z} \alpha^2 \ln \frac{r}{\alpha} - \right.$ $\left. - 2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 \dot{z} t^2 \right) + r \dot{r} z$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После получения полного перечня возможных цилиндрически-симметричных пространств-времен (с помощью зависящего от времени приближенного фактора), где приближенные симметрии Нётер существуют для данного зависящего от времени конформного возмущения $e^{\epsilon f(t)}$, можно сделать следующие выводы.

1. Приближенная часть появляется в тех классах цилиндрически-симметричных пространств-времен, для которых действия плотностей лагранжианов допускают четыре, шесть, восемь или девять симметрий Нётер и, следовательно, четыре, шесть, восемь или девять законов сохранения.

2. Только временная трансляция, скейлинг и симметрия, соответствующие преобразованиям Лоренца, допускают приближенные части.

3. Действие лагранжианов пространств-времен с нулевой секционной кривизной не дает приближенных симметрий Нётер.

4. Для данного возмущения приближенная симметрия Нётер не существует в плоских пространствах-времени (например, в пространстве-времени Минковского).

Хорошо известно, что $KV \subseteq HV \subset NS$, где KV – векторы Киллинга, HV – векторы гомотетии, NS – симметрии Нётер. Такое соотношение для приближенных симметрий не встречалось в литературе. Однако на основе наших результатов

можно выдвинуть гипотезу, что подобный результат будет выполняться для приближенных симметрий. Интересно классифицировать пространства-времени по их приближенным векторам Киллинга (KV) и векторам гомотетии (HV) для доказательства гипотезы.

В п. 4.2.1 и в соотношениях (20) показано, что тензор кривизны Римана $R_{\mu\nu\alpha\beta} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ для $a < 1$, это демонстрирует, что гравитационная волна затухает асимптотически по мере того, как она удаляется от источника на большое расстояние. Это поведение пространства-времени (16) показывает, что оно прекрасно соответствует пространству-времени типа гравитационной волны. Первые интегралы даны в табл. 1–6, где коэффициенты при ϵ являются поправками к законам сохранения в соответствующих пространствах-времени.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Система симметрий Нётер, определяющих дифференциальные уравнения в частных производных, имеет вид

$$\begin{aligned}
 &\xi_{a,t} = 0, \quad \xi_{a,r} = 0, \quad \xi_{a,\theta} = 0, \quad \xi_{a,z} = 0, \quad A_{a,s} = 0, \\
 &f_t(t)\eta_e^0 + (\eta_a^1 + f(t)\eta_e^1)\nu(r)_r + 2(\eta_{a,t}^0 + f(t)\eta_{e,t}^0) - f(t)\xi_{e,s} - \xi_{a,s} = 0, \\
 &f_t(t)\eta_e^0 + (\eta_a^1 + f(t)\eta_e^1)\mu(r)_r + 2(\eta_{a,t}^2 + f(t)\eta_{e,t}^2) - f(t)\xi_{e,s} - \xi_{a,s} = 0, \\
 &f_t(t)\eta_e^0 + (\eta_a^1 + f(t)\eta_e^1)\lambda(r)_r + 2(\eta_{a,t}^3 + f(t)\eta_{e,t}^3) - f(t)\xi_{e,s} - \xi_{a,s} = 0, \\
 &f_t(t)\eta_e^0 + (\eta_{a,r}^1 + f(t)\eta_{e,r}^1) - f(t)\xi_{e,s} - \xi_{a,s} = 0, \\
 &(f(t)\eta_{e,\theta}^0 + \eta_{a,\theta}^0)e^{\nu(r)} - (f(t)\eta_{e,t}^2 + \eta_{a,t}^2)e^{\mu(r)} = 0, \\
 &(f(t)\eta_{e,r}^0 + \eta_{a,r}^0)e^{\nu(r)} - (f(t)\eta_{e,t}^1 + \eta_{a,t}^1) = 0, \\
 &(f(t)\eta_{e,z}^0 + \eta_{a,z}^0)e^{\nu(r)} - (f(t)\eta_{e,t}^3 + \eta_{a,t}^3)e^{\lambda(r)} = 0, \\
 &(f(t)\eta_{e,r}^2 + \eta_{a,r}^2)e^{\mu(r)} + (f(t)\eta_{e,\theta}^1 + \eta_{a,\theta}^1) = 0, \\
 &(f(t)\eta_{e,z}^2 + \eta_{a,z}^2)e^{\mu(r)} - (f(t)\eta_{e,\theta}^3 + \eta_{a,\theta}^3)e^{\lambda(r)} = 0, \\
 &(f(t)\eta_{e,r}^3 + \eta_{a,r}^3)e^{\lambda(r)} + (f(t)\eta_{e,z}^1 + \eta_{a,z}^1) = 0, \\
 &(f(t)\eta_{e,s}^0 + 2\eta_{a,s}^0)e^{\nu(r)} - A_{a,t} = 0, \quad (f(t)\eta_{e,s}^1 + 2\eta_{a,s}^1) + A_{a,r} = 0, \\
 &(f(t)\eta_{e,s}^2 + 2\eta_{a,s}^2)e^{\mu(r)} + A_{a,\theta} = 0, \quad (f(t)\eta_{e,s}^3 + 2\eta_{a,s}^3)e^{\lambda(r)} + A_{a,z} = 0.
 \end{aligned}$$

Закон сохранения, соответствующий каждой симметрии Нётер, определяется как

$$\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}(\eta^i(s, x^i) - \xi \dot{x}^i) + \mathcal{L}D(\xi) = A,$$

где D – полный дифференциальный оператор, A – калибровочная функция, определенная в разделе 3.

Список литературы

- [1] W. H. Press, K. S. Thorne, “Gravitational-wave astronomy”, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **10** (1972), 335–374; У. Пресс, К. Торн, “Гравитационно-волновая астрономия”, *УФН*, **110**:569–606 (1973).
- [2] R. H. Price, K. S. Thorne, “Nonradial pulsation of general relativistic stellar models. II. Properties of the gravitational waves”, *Astrophys. J.*, **155** (1969), 163–182.

- [3] K. S. Thorne, “Gravitational radiation damping”, *Phys. Rev. Lett.*, **21**:5 (1968), 320–323.
- [4] K. S. Thorne, “Sources of gravitational waves”, *Proc. Roy. Soc. London A*, **368**:1732 (1979), 9–10.
- [5] K. S. Thorne, “Gravitational-wave research: current status and future prospects”, *Rev. Modern Phys.*, **52**:2 (1980), 285–298.
- [6] E. L. Hill, “Hamilton’s principle and the conservation theorems of mathematical physics”, *Rev. Modern Phys.*, **23**:3 (1951), 253–260.
- [7] E. Noether, “Invariante Variationsprobleme”, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, **2** (1918), 235–275.
- [8] A. Trautman, “Conservation laws in general relativity”, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. L. Witten, John Wiley and Sons, New York, 1962, 169–198.
- [9] A. Einstein, N. Rosen, “On gravitational waves”, *J. Franklin Inst.*, **223**:1 (1937), 43–54.
- [10] F. Ali, T. Feroze, “Classification of plane symmetric static space-times according to their Noether’s symmetries”, *Internat. J. Theor. Phys.*, **52**:9 (2013), 3329–3342.
- [11] Ф. Али, Т. Ферозе, С. Али, “Полная классификация сферически-симметричных статических пространств-времен с помощью симметрий Нётер”, *ТМФ*, **184**:1 (2015), 92–105.
- [12] П. Олвер, *Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [13] F. Ali, “Conservation laws of cylindrically symmetric vacuum solution of Einstein field equations”, *Appl. Math. Sci.*, **8**:94 (2014), 4697–4702.
- [14] U. Camci, A. Yildirim, “Lie and Noether symmetries in some classes of pp-wave spacetime”, *Phys. Scr.*, **89** (2014), 084003, 8 pp.
- [15] U. Camci, “Symmetries of geodesic motion in Gödel-type spacetimes”, *JCAP*, **2014**:07 (2014), 002, 20 pp.
- [16] Y. Kucukakca, U. Camci, “Noether gauge symmetry for $f(R)$ gravity in Palatini formalism”, *Astrophys. Space Sci.*, **338**:1 (2012), 211–216.
- [17] S. Capozziello, R. de Ritis, P. Scudellaro, “Nöther symmetries in quantum cosmology”, *Internat. J. Modern Phys. D*, **3**:3 (1994), 609–621.
- [18] S. Capozziello, M. De Laurentis, S. D. Odintsov, “Hamiltonian dynamics and Noether symmetries in extended gravity cosmology”, *Eur. Phys. J. C*, **72** (2012), 2068, 21 pp.
- [19] F. Ali, T. Feroze, “Approximate Noether symmetries from geodetic Lagrangian for plane symmetric spacetimes”, *Internat. J. Geom. Modern Phys.*, **12**:1550124 (2015), 9 pp.
- [20] N. H. Ibragimov, *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*, Wiley Series in Mathematical Methods in Practice, **4**, John Wiley and Sons, Chichester, 1999.
- [21] G. Ünal, “Approximate generalized symmetries, normal forms and approximate first integrals”, *Phys. Lett. A*, **269**:1 (2000), 13–30.
- [22] G. Ünal, C. M. Khalique, G. F. Alişverişçi, “Approximate first integrals of a chaotic Hamiltonian system”, *Quaest. Math.*, **30**:4 (2009), 483–497.
- [23] G. Ünal, C. M. Khalique, “Approximate conserved quantities of conservative dynamical systems in R^3 ”, *Quaest. Math.*, **28**:3 (2005), 305–315.
- [24] T. Levi-Civita, “IX: L’analogo del potenziale logaritmico”, *Rom. Acc. L. Rend. (5)*, **28**:1 (1919), 101–109.
- [25] В. Д. Захаров, *Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна*, Наука, М., 1972.
- [26] A. Jawad, F. Ali, S. M. Umair, G. Abbas, “Dynamics of particles around time conformal Schwarzschild black hole”, *Eur. Phys. J. C*, **76** (2016), 586, 12 pp.
- [27] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, M. A. H. MacCallum, *Exact Solution of Einstein’s Field Equations*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, **6**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.
- [28] F. Ali, T. Feroze, “Complete classification of cylindrically symmetric static spacetime and the corresponding conservation laws”, *Mathematics*, **4**:3 (2016), 50, 15 pp.