Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Хуссейн, С. Кхан, А. Х. Бокхари, Г. А. Кхан, Собственные конформные векторы Киллинга в статическом плоском симметрическом пространстве-времени, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 1, 172–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:49:18

© 2017 г. Т. Хуссейн*, С. Кхан*, А. Х. Бокхари[†], Г. А. Кхан*

СОБСТВЕННЫЕ КОНФОРМНЫЕ ВЕКТОРЫ КИЛЛИНГА В СТАТИЧЕСКОМ ПЛОСКОМ СИММЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Представлено несколько не конформно-плоских метрик на статическом плоском пространстве-времени, которые допускают собственные конформные векторы Киллинга. Специальные виды конформных векторов Киллинга, известные как наследованные конформные векторы Киллинга, также изучены для этих пространств-времен.

Ключевые слова: векторы Киллинга, гомотетичные векторы, конформные векторы Киллинга, конформно-плоское пространство-время.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9149>

1. ВВЕДЕНИЕ

Общая теория относительности Эйнштейна определяется набором дифференциальных уравнений в частных производных, известных как уравнения Эйнштейна. Из-за высокой нелинейности этих уравнений очень сложно найти их точное решение. Некоторое количество физически интересных решений уравнений Эйнштейна приведено в книге [1]. Симметрии пространства-времени позволяют не только искать новые точные решения, но и классифицировать уже известные решения уравнений Эйнштейна.

Симметрия пространства-времени есть гладкое векторное поле на пространственно-временном многообразии M , локальные диффеоморфизмы которого сохраняют некоторые геометрические объекты на многообразии M , такие как геодезические, метрика, тензор кривизны Римана и другие фундаментальные объекты пространственно-временной геометрии [2]. В частности, конформная симметрия Киллинга представляется как гладкое векторное поле, локальные диффеоморфизмы которого сохраняют метрику пространства-времени с точностью до конформного множителя. Производная Ли играет ключевую роль в изучении конформной симметрии Киллинга в пространстве-времени. Она используется для описания

*Department of Mathematics, University of Peshawar, Khyber Pakhtunkhwa, Pakistan.
E-mail: tahirhussain@upesh.edu.pk

[†]Department of Mathematics and Statistics, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran, Saudi Arabia

поведения метрического тензора в точке после “протаскивания” его вдоль кривой на пространстве-времени в ту же точку. Конформная симметрия Киллинга или конформный вектор Киллинга (КВК) ξ на пространственно-временном многообразии M удовлетворяет соотношению [2]

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = g_{ab,c}\xi^c + g_{bc}\xi_{,a}^c + g_{ac}\xi_{,b}^c = 2\alpha g_{ab}, \quad (1.1)$$

где $\mathcal{L}_\xi$ обозначает производную Ли вдоль вектора ξ , а α – некоторая вещественнозначная функция на M , называемая конформным множителем. КВК называется вектором Киллинга (ВК) или гомотетичным вектором (ГВ), если $\alpha = 0$ или $\alpha = \text{const}$ соответственно. КВК называется собственным или нетривиальным, если он не является ни ВК, ни ГВ. Набор $C(M)$ всех КВК на пространственно-временном многообразии M образует вещественную конечномерную алгебру Ли со скобкой Ли такой, что $\dim C(M) \leq 15$ [2]. Пространство-время называется конформно-плоским, если его тензор Вейля равен нулю. Для конформно-плоского пространства-времени M мы имеем $\dim C(M) = 15$. Обратно, если $\dim C(M) = 15$ (на самом деле, если $\dim C(M) > 7$), то пространство M конформно-плоское [2].

Конформная симметрия имеет широкий спектр применений во всех областях физики, включающих в себя общую теорию относительности. Законы сохранения в пространстве-времени, как правило, обеспечиваются возникающими ВК. В некоторых случаях невозможно найти закон сохранения с помощью ВК, тогда конформные преобразования используются для нахождения законов сохранения, которые не задаются ВК. Например, в случае метрики Фридмана нет трансляционной инвариантности, которая дает закон сохранения энергии, но есть конформная временная трансляционная инвариантность, которая обеспечивает конформный аналог закона сохранения энергии. Кроме того, конформная симметрия может быть использована для изучения кинематических переменных, таких как вращение, расширение и сдвиги в пространстве-времени [3]–[6].

Понятие определенного типа КВК в пространстве-времени жидкой среды, известного как наследованные КВК, было введено в работе [7]. КВК ξ называется *наследованным* физическим источником жидкости, представленным тензором энергии-импульса, если линии потока жидкости конформно отображаются в линии потока жидкости, и КВК такого типа удовлетворяют соотношениям [7]

$$\mathcal{L}_\xi u_a = u_{a,b}\xi^b + u_b\xi_{,a}^b = \alpha u_a, \quad (1.2)$$

где u_a – компоненты 4-скорости жидкости.

Конформные симметрии и наследованные конформные симметрии для некоторых хорошо известных пространств-времен уже изучены (подробнее см. [8]–[16]). В настоящей работе мы исследуем эти симметрии в статическом плоском пространстве-времени. Статья организована следующим образом. В разделе 2 рассмотрена наиболее общая форма линейного элемента статического плоского пространства-времени и представлено общее решение конформного уравнения Киллинга в терминах неизвестных функций от t и x , а также приведен набор условий интегрируемости. Раздел 3 посвящен решению условий интегрируемости для некоторых конкретных примеров не конформно-плоских статических плоских симметрических пространств-времен, приведен явный вид собственных КВК. В разделе 4 мы исследуем наследованные КВК для статических плоских пространств-времен. Краткое изложение работы приводится в разделе 5.

2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ КОНФОРМНЫХ УРАВНЕНИЙ КИЛЛИНГА

Плоское симметрическое пространство-время – это четырехмерное многообразие Лоренца, которое допускает трехмерную группу изометрий G_3 , причем орбиты группы – это пространственноподобные поверхности постоянной кривизны. В частности, статическое плоское симметрическое пространство-время допускает дополнительный времениподобный ВК. Наиболее общий линейный элемент статического плоского пространства-времени [1] имеет вид

$$ds^2 = -e^{2A(x)} dt^2 + dx^2 + e^{2B(x)} [dy^2 + dz^2], \quad (2.1)$$

где A и B – функции, зависящие только от x . Приведенная метрика допускает следующие четыре линейно независимых ВК [1]:

$$\xi_{(1)} = \partial_t, \quad \xi_{(2)} = \partial_y, \quad \xi_{(3)} = \partial_z, \quad \xi_{(4)} = z\partial_y - y\partial_z. \quad (2.2)$$

Используя метрику (2.1) в уравнении (1.1), мы получаем следующий набор конформных уравнений Киллинга:

$$\begin{aligned} A'\xi^1 + \xi_{,0}^0 &= \alpha, \\ \xi_{,0}^1 - e^{2A}\xi_{,1}^0 &= 0, \\ e^{2B}\xi_{,0}^2 - e^{2A}\xi_{,2}^0 &= 0, \\ e^{2B}\xi_{,0}^3 - e^{2A}\xi_{,3}^0 &= 0, \\ \xi_{,1}^1 &= \alpha, \\ e^{2B}\xi_{,1}^2 + \xi_{,2}^1 &= 0, \\ e^{2B}\xi_{,1}^3 + \xi_{,3}^1 &= 0, \\ B'\xi^1 + \xi_{,2}^2 &= \alpha, \\ \xi_{,3}^2 + \xi_{,2}^3 &= 0, \\ B'\xi^1 + B\xi_{,3}^3 &= \alpha, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где штрих у функции в метрике обозначает ее производную по x , а запятые в нижних индексах обозначают частные производные по координатам пространства-времени. Конформный множитель α – функция от t , x , y и z . Используя некоторые базовые алгебраические преобразования, авторы работы [17] нашли следующее решение системы уравнений (2.3) в терминах неизвестных функций от t и x :

$$\begin{aligned} \xi^0 &= e^{2(B-A)} \left\{ \frac{1}{2}(y^2 + z^2)F_t^1(t, x) + zF_t^2(t, x) + yF_t^3(t, x) \right\} + F^0(t, x), \\ \xi^1 &= -e^{2B} \left\{ \frac{1}{2}(y^2 + z^2)F_x^1(t, x) + zF_x^2(t, x) + yF_x^3(t, x) \right\} + F^4(t, x), \\ \xi^2 &= yF^1(t, x) + F^3(t, x) + \frac{c_3}{2}(z^2 - y^2) + c_2yz + c_4z, \\ \xi^3 &= zF^1(t, x) + F^2(t, x) + \frac{c_2}{2}(y^2 - z^2) - c_3yz - c_4y, \\ \alpha &= -e^{2B} \left\{ \frac{1}{2}(y^2 + z^2)F_{xx}^1(t, x) + zF_{xx}^2(t, x) + yF_{xx}^3(t, x) \right\} - \\ &\quad - 2B'e^{2B} \left\{ \frac{1}{2}(y^2 + z^2)F_x^1(t, x) + zF_x^2(t, x) + yF_x^3(t, x) \right\} + F_x^4(t, x), \end{aligned} \quad (2.4)$$

удовлетворяющих следующим условиям интегрируемости:

$$\begin{aligned}
 F_{tx}^1(t, x) + (B' - A')F_t^1(t, x) &= 0, \\
 F_{tx}^2(t, x) + (B' - A')F_t^2(t, x) &= 0, \\
 F_{tx}^3(t, x) + (B' - A')F_t^3(t, x) &= 0, \\
 B'F_x^1(t, x) + F_{xx}^1(t, x) &= 0, \\
 B'F_x^2(t, x) + F_{xx}^2(t, x) + c_2e^{-2B} &= 0, \\
 B'F_x^3(t, x) + F_{xx}^3(t, x) - c_3e^{-2B} &= 0, \\
 (2B' - A')F_x^1(t, x) + e^{-2A}F_{tt}^1(t, x) + F_{xx}^1(t, x) &= 0, \\
 (2B' - A')F_x^2(t, x) + e^{-2A}F_{tt}^2(t, x) + F_{xx}^2(t, x) &= 0, \\
 (2B' - A')F_x^3(t, x) + e^{-2A}F_{tt}^3(t, x) + F_{xx}^3(t, x) &= 0, \\
 e^{2A}F_x^0(t, x) - F_t^4(t, x) &= 0, \\
 A'F^4(t, x) + F_t^0(t, x) - F_x^4(t, x) &= 0, \\
 B'F^4(t, x) + F^1(t, x) - F_x^4(t, x) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Чтобы получить явный вид КВК, авторы работы [17] решили систему уравнений (2.5) в трех случаях, а именно: 1) $A' = 0$, $B' \neq 0$; 2) $A' \neq 0$, $B' = 0$; 3) $A' = 0$, $B' = 0$. Они отметили, что в каждом из этих случаев либо рассматриваемые статические плоские пространства-времени становятся конформно-плоскими, либо КВК сводятся к ВК или ГВ. Основываясь на своем исследовании, авторы заключили (с некоторыми замечаниями), что не конформно-плоские статические плоские пространства-времени не допускают собственных КВК [17]. Мы считаем, что это исследование КВК в статическом плоском пространстве-времени не является полным. На самом деле каждая компонента тензора Вейля для метрики статического плоского симметрического пространства-времени (2.1) кратна выражению $A'(B' - A') + B'' - A''$. Для рассматриваемых в работе [17] значений метрических функций A и B это выражение обращается в нуль, а следовательно, статическое плоское пространство-время становится конформно-плоским, что привело авторов к неверному выводу о том, что не существует собственных КВК в не конформно-плоском статическом плоском симметрическом пространстве-времени. Чтобы получить собственный КВК в не конформно-плоском статическом плоском симметрическом пространстве-времени, мы решим систему уравнений (2.5) в следующем разделе, выбрав такие метрические функции A и B , что

$$A'(B' - A') + B'' - A'' \neq 0. \tag{2.6}$$

3. СОБСТВЕННЫЕ КВК

Введем переменные $\beta_i = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = ((y^2 + z^2)/2, z, y)$. Используя эти переменные и правило Эйнштейна суммирования по повторяющимся индексам, мы можем переписать систему (2.4) в виде

$$\begin{aligned}
 \xi^0 &= e^{2(B-A)}\beta_i F_t^i + F^0, \\
 \xi^1 &= -e^{2B}\beta_i F_x^i + F^4, \\
 \xi^2 &= \beta_{i,2}F^i + \frac{c_3}{2}(z^2 - y^2) + c_2yz + c_4z, \\
 \xi^3 &= \beta_{i,3}F^i + \frac{c_2}{2}(z^2 - y^2) - c_3yz - c_4y, \\
 \alpha &= -e^{2B}\beta_i F_{xx}^i - 2B'e^{2B}\beta_i F_x^i + F_x^4.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Также система уравнений (2.5) преобразуется как

$$F_{tx}^i(t, x) + (B' - A')F_t^i(t, x) = 0, \quad (3.2)$$

$$B'F_x^i(t, x) + F_{xx}^i(t, x) = k_i e^{-2B}, \quad (3.3)$$

$$(2B' - A')F_x^i(t, x) + e^{-2A}F_{tt}^i(t, x) + F_{xx}^i(t, x) = 0, \quad (3.4)$$

$$e^{2A}F_x^0(t, x) - F_t^4(t, x) = 0, \quad (3.5)$$

$$A'F^4(t, x) + F_t^0(t, x) - F_x^4(t, x) = 0, \quad (3.6)$$

$$B'F^4(t, x) + F^1(t, x) - F_x^4(t, x) = 0, \quad (3.7)$$

где $k_i = 0, -c_2, c_3$ для $i = 1, 2, 3$ соответственно. Чтобы получить собственные КВК в не конформно-плоском статическом плоском симметрическом пространстве-времени, мы решим вышеприведенные уравнения в следующих двух случаях.

Случай 1. Предположим, что $F^k(t, x) = G^k(t) + H^k(x)$ для $k = 1, \dots, 4$. Тогда уравнение (3.2) дает $(B' - A')F_t^i(t, x) = 0$, а следовательно, $F_t^i(t, x) = 0$, потому что если $B' = A'$, то статическое плоское симметрическое пространство-время становится конформно-плоским, что нам неинтересно. Если мы вычтем уравнение (3.3) из уравнения (3.4) и проинтегрируем получившееся уравнение по x , мы получим

$$F^i = -k_i \int \frac{e^{-2B}}{B' - A'} dx + r_i,$$

где r_i – три разные константы интегрирования при $i = 1, 2, 3$. Подставляя обратно выражение для F^i в уравнение (3.3), получаем $k_i\{A'(B' - A') + B'' - A''\} = 0$, т.е. $k_i = 0 \Rightarrow c_2 = c_3 = 0$. Следовательно, $F^i = r_i$ для $i = 1, 2, 3$. Для совместности констант r_i с константами из системы (3.1) мы обозначим $F^1 = r_1 = c_5$, $F^2 = r_2 = c_6$ и $F^3 = r_3 = c_7$. С такими значениями F^i уравнения (3.2)–(3.4) тождественно выполнены и система (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \xi^0 &= F^0, \\ \xi^1 &= F^4, \\ \xi^2 &= c_4 z + c_5 y + c_7, \\ \xi^3 &= -c_4 y + c_5 z + c_6, \\ \alpha &= F_x^4. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Значения F^0 и F^4 определяются из уравнений (3.5)–(3.7). Продифференцировав уравнение (3.7) по t , получим $B'F_t^4(t, x) = 0$, откуда следует, что $F_t^4(t, x) = 0$, потому что если $B' = 0$, то из уравнения (3.7) получаем, что $F_x^4(t, x) = c_5$. Подставляя $F_x^4(t, x) = c_5$ в систему (3.8), мы видим, что конформный множитель становится константой, а следовательно, в этом случае не существует никакого собственного КВК. Поэтому $B' \neq 0$, а значит, $F_t^4(t, x) = 0$, а следовательно, $F^4 = F^4(x)$. С таким значением F^4 уравнение (3.5) дает $F_x^0(t, x) = 0$, а следовательно, $F^0 = F^0(t)$. Перепишем оставшиеся два уравнения (3.6) и (3.7):

$$A'F^4(x) + F_t^0(t) - F_x^4(x) = 0, \quad (3.9)$$

$$B'F^4(x) + c_5 - F_x^4(x) = 0. \quad (3.10)$$

Дифференцируя (3.9) по t , получим $F^0(t) = c_8 t + c_9$. Подставляя это значение F^0 в уравнение (3.9) и вычитая получившееся уравнение из (3.10), мы получаем $F^4(x) = (c_5 - c_8)/(A' - B')$. Упрощая уравнение (3.9) или (3.10) с помощью полученных значений для F^0 и F^4 , мы получаем следующее соотношение:

$$c_8[B'(B' - A') + B'' - A''] - c_5[A'(B' - A') + B'' - A''] = 0. \quad (3.11)$$

Также систему (3.8) можно переписать как

$$\begin{aligned} \xi^0 &= c_8 t + c_9, \\ \xi^1 &= \frac{c_5 - c_8}{A' - B'}, \\ \xi^2 &= c_5 y + c_4 z + c_7, \\ \xi^3 &= c_5 z - c_4 y + c_6, \\ \alpha &= (c_8 - c_5) \frac{A'' - B''}{(A' - B')^2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Мы сможем найти окончательный вид КВК, данных в системе (3.12), если решим уравнение (3.11). Заметим, что уравнение (3.11) сильно нелинейное и не может быть легко решено, однако мы можем выбрать значения метрических функций так, чтобы оно было выполнено. Выбирая метрические функции A и B , следует иметь в виду, что условие (2.6) выполнено. Как упоминалось ранее, функция B не должна быть константой, иначе плоское симметрическое пространство-время станет конформно-плоским. Кроме того, мы должны взять $A' \neq 0$, иначе уравнение (3.9) даст $F_x^4(x) = c_8$, а следовательно, $\alpha = c_8$, что нам неинтересно. Также должно выполняться условие $c_8 \neq 0$, потому что для $c_8 = 0$ уравнение (3.11) дает $c_5 = 0$, а следовательно, конформный множитель α в (3.12) обращается в нуль. Ниже приведены некоторые простые примеры не конформно-плоских статических плоских симметрических метрик, которые допускают собственные КВК.

ПРИМЕР 1. Выберем $c_5 = 0$ и $A(x) = x$, тогда уравнение (3.11) дает $B(x) = \ln(a_1 e^x + a_2)$, где $a_1 \neq 0$, $a_2 \in \mathbb{R}$. С такими значениями A и B статическая плоская симметрическая метрика (2.1) преобразуется к следующему виду:

$$ds^2 = -e^{2x} dt^2 + dx^2 + (a_1 e^x + a_2)^2 [dy^2 + dz^2], \quad (3.13)$$

т. е. она, очевидно, не конформно-плоская. Предполагая, что $a_1 = a_2 = 1$, преобразуем систему (3.12):

$$\begin{aligned} \xi^0 &= c_8 t + c_9, \\ \xi^1 &= -c_8(e^x + 1), \\ \xi^2 &= c_4 z + c_7, \\ \xi^3 &= -c_4 y + c_6, \\ \alpha &= -c_8 e^x. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Этот результат показывает, что статическое плоское симметрическое пространство-время допускает пять КВК: один собственный КВК и четыре ВК. Четыре ВК такие же, как в (2.2), а собственный КВК может быть выражен как $\xi_{(5)} = t \partial_t -$

$(e^x + 1)\partial_x$. В этом случае не существует никакого собственного ГВ. Алгебра Ли этих пяти КВК имеет следующие ненулевые коммутаторы:

$$[\xi_{(1)}, \xi_{(5)}] = \xi_{(1)}, \quad [\xi_{(2)}, \xi_{(4)}] = -\xi_{(3)}, \quad [\xi_{(3)}, \xi_{(4)}] = \xi_{(2)}.$$

ПРИМЕР 2. Выберем $c_5 = 0$ и $A(x) = \ln x$, тогда, решая уравнение (3.11), мы получим $B(x) = \ln(a_1 x - a_2 x \ln x)$, где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Таким образом, статическая плоская симметрическая метрика пространства-времени принимает вид

$$ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2 + (a_1 x - a_2 x \ln x)^2 [dy^2 + dz^2], \quad (3.15)$$

которая не является конформно-плоской метрикой. Предположим, что $a_1 = a_2 = 1$, тогда система (3.12) принимает вид

$$\begin{aligned} \xi^0 &= c_8 t + c_9, \\ \xi^1 &= c_8 x (\ln x - 1), \\ \xi^2 &= c_4 z + c_7, \\ \xi^3 &= -c_4 y + c_6, \\ \alpha &= c_8 \ln x. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Этот результат показывает, что статическое плоское симметрическое пространство-время допускает пять КВК с одним собственным КВК, который может быть записан как $\xi_{(5)} = t \partial_t + x(\ln x - 1) \partial_x$. Оставшиеся четыре КВК – это ВК такие же, как и в (2.2). Ненулевые коммутаторы этих пяти КВК следующие:

$$[\xi_{(1)}, \xi_{(5)}] = \xi_{(1)}, \quad [\xi_{(2)}, \xi_{(4)}] = -\xi_{(3)}, \quad [\xi_{(3)}, \xi_{(4)}] = \xi_{(2)}.$$

ПРИМЕР 3. Выберем $c_5 = 0$ и $B(x) = x$, тогда уравнение (3.11) дает $A(x) = -a_1 e^{-x} + x + a_2$, где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Таким образом, метрика (2.1) принимает вид

$$ds^2 = -\exp[2(-a_1 e^{-x} + x + a_2)] dt^2 + dx^2 + e^{2x} [dy^2 + dz^2], \quad (3.17)$$

которая не является конформно-плоской статической плоской метрикой. Предположим, что $a_1 = 1$, тогда система (3.12) принимает вид

$$\begin{aligned} \xi^0 &= c_8 t + c_9, \\ \xi^1 &= -c_8 e^x, \\ \xi^2 &= c_4 z + c_7, \\ \xi^3 &= -c_4 y + c_6, \\ \alpha &= -c_8 e^x. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Как и в примерах 1, 2, здесь статическое плоское симметрическое пространство-время допускает пять КВК, среди которых четыре базовых ВК (2.2) и один собственный КВК, который может быть выражен как $\xi_{(5)} = t \partial_t - e^x \partial_x$. В этом случае нет ни одного собственного ГВ. Ненулевые коммутаторы в алгебре Ли этих пяти КВК следующие:

$$[\xi_{(1)}, \xi_{(5)}] = \xi_{(1)}, \quad [\xi_{(2)}, \xi_{(4)}] = -\xi_{(3)}, \quad [\xi_{(3)}, \xi_{(4)}] = \xi_{(2)}.$$

Следует отметить, что в каждом из трех приведенных выше примеров статическое плоское симметрическое пространство-время допускает собственные КВК в дополнение к четырем базовым ВК. Помимо этих примеров, можно найти ряд метрических функций A и B , удовлетворяющих уравнению (3.11), чтобы получить собственные КВК в не конформно-плоском статическом плоском симметрическом пространстве-времени.

Случай 2. В этом случае мы решаем уравнения (3.2)–(3.7) для еще некоторых значений A и B , удовлетворяющих условию (2.6), без условия разделения функций $F^k(t, x)$ по их аргументам. В каждом из приведенных ниже примеров 4, 5 найдем не конформно-плоская статическая плоская симметрическая метрика, допускающая собственные КВК так же, как и собственный ГВ, в дополнение к четырем базовым ВК. Вычисления, выполненные в этих примерах, просты и аналогичны вычислениям в случае 1, так что мы опустим детали и представим только конечные результаты.

ПРИМЕР 4. Предположим, что $A = \text{const} = m_1$ и $B = \ln x$, где $m_1 \neq 0$, $m_1 \in \mathbb{R}$. Метрика (2.1) после подходящего изменения масштаба имеет вид

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + x^2 [dy^2 + dz^2], \quad (3.19)$$

т. е. не является конформно-плоской. Решая уравнения (3.2)–(3.7) для метрики (3.19), мы получаем

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \frac{c_8}{2}(x^2 + t^2) + c_9 t + c_{10}, \\ \xi^1 &= c_8 t x + c_9 x, \\ \xi^2 &= c_4 z + c_7, \\ \xi^3 &= -c_4 y + c_6, \\ \alpha &= c_8 t + c_9. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Это показывает, что не конформно-плоская статическая плоская симметрическая метрика (3.19) допускает шесть КВК, среди которых один собственный ГВ $\xi_{(5)} = t \partial_t + x \partial_x$ и один собственный КВК $\xi_{(6)} = (x^2 + t^2) \partial_t / 2 + x t \partial_x$; остальные четыре КВК – это ВК, такие же, как и в (2.2). Алгебра Ли этих шести КВК имеет следующие ненулевые коммутаторы:

$$\begin{aligned} [\xi_{(1)}, \xi_{(5)}] &= \xi_{(1)}, & [\xi_{(6)}, \xi_{(6)}] &= \xi_{(5)}, & [\xi_{(2)}, \xi_{(4)}] &= -\xi_{(3)}, \\ [\xi_{(3)}, \xi_{(4)}] &= \xi_{(2)}, & [\xi_{(5)}, \xi_{(6)}] &= \xi_{(6)}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 5. Выберем $A = \ln x^2$ и $B = \ln x$. Для таких значений A и B условие (2.6) выполнено, и мы получаем следующую не конформно-плоскую статическую плоскую симметрическую метрику:

$$ds^2 = -x^4 dt^2 + dx^2 + x^2 [dy^2 + dz^2]. \quad (3.21)$$

Решая уравнения (3.2)–(3.7) для метрики (3.21), мы получаем

$$\begin{aligned}\xi^0 &= -\frac{c_8}{2}(t^2 + x^{-2}) - c_9 t + c_{10}, \\ \xi^1 &= c_8 t x + c_9 x, \\ \xi^2 &= c_4 z + c_7, \\ \xi^3 &= -c_4 y + c_6, \\ \alpha &= c_8 t + c_9,\end{aligned}\tag{3.22}$$

откуда следует, что метрика (3.21) допускает шесть КВК, четыре из которых – те же ВК, что и в (2.2), один собственный ГВ, представимый как $\xi_{(5)} = -t \partial_t + x \partial_x$, и один собственный КВК, который может быть записан как $\xi_{(6)} = -(t^2 + x^{-2}) \partial_t / 2 + x t \partial_x$. Алгебра Ли этих шести КВК имеет следующие ненулевые коммутаторы:

$$\begin{aligned}[\xi_{(1)}, \xi_{(5)}] &= -\xi_{(1)}, & [\xi_{(1)}, \xi_{(6)}] &= \xi_{(5)}, & [\xi_{(2)}, \xi_{(4)}] &= -\xi_{(3)}, \\ [\xi_{(3)}, \xi_{(4)}] &= \xi_{(2)}, & [\xi_{(5)}, \xi_{(6)}] &= \xi_{(6)}.\end{aligned}$$

4. НАСЛЕДОВАННЫЕ КВК СТАТИЧЕСКОГО ПЛОСКОГО СИММЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

С точностью до неизвестных функций от t и x КВК для статического плоского пространства-времени, данного в (3.1), удовлетворяют условиям интегрируемости (3.2)–(3.7). Здесь мы решим уравнения (3.2)–(3.7), рассматривая ξ как наследованный КВК. В этом случае ξ удовлетворяет соотношению (1.2). Мы выбираем $u^a = e^{-A} \delta_0^a$, тогда соотношение (1.2) порождает следующие уравнения:

$$A' \xi^1 + \xi_{,0}^0 = \alpha, \tag{4.1}$$

$$\xi_{,i}^0 = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.2}$$

Таким образом, в системе (3.1) должно быть $\xi^0 = F^0(t)$ и $F^i = F^i(x)$ для $i = 1, 2, 3$. Уравнение (3.5) дает $F^4 = F^4(x)$. С такими значениями уравнения (3.2) и (3.5) тождественно выполнены, а оставшиеся условия интегрируемости имеют вид

$$B' F_x^i(x) + F_{xx}^i(x) = k_i e^{-2B}, \tag{4.3}$$

$$(2B' - A') F_x^i(x) + F_{xx}^i(x) = 0, \tag{4.4}$$

$$A' F^4(x) + F_t^0(t) - F_x^4(x) = 0, \tag{4.5}$$

$$B' F^4(x) + F^1(x) - F_x^4(x) = 0. \tag{4.6}$$

Вычитая (4.3) из (4.4) и интегрируя получившееся уравнение по x , мы имеем

$$F^i(x) = -k_i \int \frac{e^{-2B}}{B' - A'} dx + r_i,$$

где r_i – три различные константы интегрирования, $i = 1, 2, 3$. Подставляя эти значения $F^i(x)$ в уравнение (4.3), мы получаем $k_i [A'(B' - A') + B'' - A''] = 0$, а следовательно, $k_i = 0$, поскольку иначе пространство-время будет конформно-плоским. Следовательно, $F^i = r_i$, $i = 1, 2, 3$. Для совместности мы обозначим $F^1 = r_1 = c_5$,

$F^2 = r_2 = c_6$ и $F^3 = r_3 = c_7$. Если продифференцировать уравнение (4.5) по t , получим $F^0(t) = c_8 t + c_9$. Вычитая уравнение (4.5) из (4.6), находим, что $F^4(x) = (c_5 - c_8)/(A' - B')$, и, подставляя это значение в (4.5) или в (4.6), мы получаем следующее соотношение:

$$c_8[B'(B' - A') + B'' - A''] - c_5[A'(B' - A') + B'' - A''] = 0, \quad (4.7)$$

которое совпадает с уравнением (3.11). Решение системы уравнений (4.3)–(4.6) теперь сводится к решению уравнения (4.7). КВК, данные в (3.1), будут теперь называться наследованными КВК и примут вид

$$\begin{aligned} \xi^0 &= c_8 t + c_9, \\ \xi^1 &= \frac{c_5 - c_8}{A' - B'}, \\ \xi^2 &= c_5 y + c_4 z + c_7, \\ \xi^3 &= c_5 z - c_4 y + c_6, \\ \alpha &= (c_8 - c_5) \frac{A'' - B''}{(A' - B')^2}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

идентичный виду КВК, данному в (3.12). Остальная часть анализа аналогична анализу, проведенному в случае 1 в разделе 3. Любая метрическая функция, удовлетворяющая уравнению (4.7), даст нам окончательный вид приведенных выше наследованных КВК. Следовательно, в этом случае наследованные КВК такие же, как КВК, полученные в разделе 3.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Чтобы убедиться в существовании собственных КВК в не конформно-плоском статическом плоском симметрическом пространстве-времени, мы решили конформные уравнения Киллинга для конкретных значений метрических функций. Эти конформные уравнения Киллинга также были решены в работе [17] для некоторых конкретных метрических функций, что привело авторов к неверному заключению о существовании собственных КВК в не конформно-плоском статическом плоском симметрическом пространстве-времени. Мы использовали другой подход для решения конформных уравнений Киллинга и получили собственные КВК в не конформно-плоском статическом плоском симметрическом пространстве-времени для ряда метрических функций. Кроме того, мы показали, что наследованные КВК в плоском симметрическом пространстве-времени такие же, как КВК.

Список литературы

- [1] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenseleers, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [2] G.S. Hall, *Symmetries and Curvature Structure in General Relativity*, World Scientific Lecture Notes in Physics, **46**, World Sci., Singapore, 2004.
- [3] M. Tsamparlis, A. Paliathanasis, L. Karpathopoulos, "Exact solutions of Bianchi I spacetimes which admit conformal Killing vectors", *Gen Relativ. Gravit.*, **47:2** (2015), 15, 21 pp.
- [4] R. Maartens, D. P. Mason, M. Tsamparlis, "Kinematic and dynamic properties of conformal Killing vectors in anisotropic fluids", *J. Math. Phys.*, **27:12** (1986), 2987–2994.

- [5] R. Marteens, S. D. Maharaj, B. O. J. Tupper, “Conformal motions in static spherical space-times”, *Class. Quantum Grav.*, **13**:2 (1996), 317–318.
- [6] A. A. Coley, B. O. J. Tupper, “Affine conformal vectors in space-time”, *J. Math. Phys.*, **33**:5 (1992), 1754–1764.
- [7] A. A. Coley, B. O. J. Tupper, “Spacetimes admitting inheriting conformal Killing vector fields”, *Class. Quantum Grav.*, **7**:11 (1990), 1961–1981.
- [8] R. Maartens, S. D. Maharaj, “Conformal Killing vectors in Robertson–Walker spacetimes”, *Class. Quantum Grav.*, **3**:5 (1986), 1005–1011.
- [9] G. S. Hall, J. D. Steele, “Conformal vector fields in general relativity”, *J. Math. Phys.*, **32**:7 (1991), 1847–1853.
- [10] S. Moopanar, S. D. Maharaj, “Relativistic shear-free fluids with symmetry”, *J. Eng. Math.*, **82**:1 (2013), 125–131.
- [11] R. Marteens, S. D. Maharaj, B. O. J. Tupper, “General solution and classification of conformal motions in static spherical spacetimes”, *Class. Quantum Grav.*, **12**:10 (1995), 2577–2586.
- [12] G. S. Hall, M. S. Capocci, “Classification and conformal symmetry in three-dimensional space-times”, *J. Math. Phys.*, **40**:3 (1999), 1466–1478.
- [13] D. Kramer, J. Carot, “Conformal symmetry of perfect fluids in general relativity”, *J. Math. Phys.*, **32**:7 (1991), 1857–1860.
- [14] G. S. Hall, J. Carot, “Conformal symmetries in null Einstein–Maxwell fields”, *Class. Quantum Grav.*, **11**:2 (1994), 475–480.
- [15] R. Marteens, S. D. Maharaj, “Conformal symmetries of pp -waves”, *Class. Quantum Grav.*, **8**:3 (1991), 503–514.
- [16] J. Castejón-Amenedo, A. A. Coley, “Exact solutions with conformal Killing vector fields”, *Class. Quantum Grav.*, **9**:10 (1992), 2203–2215.
- [17] K. Saifullah, Shair-E-Yazdan, “Conformal motions in plane symmetric static space-times”, *Internat. J. Modern Phys. D*, **18**:1 (2009), 71–81.

Поступила в редакцию 1.01.2016