Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Алхараши, Я. Гамиель, Характеристики устойчивости периодического течения жидкостей в пористых средах, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 1, 126–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9150>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 11:23:07

© 2017 г.

С. А. Алхараши^{*†}, Я. Гамиель[‡]

ХАРАКТЕРИСТИКИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Изучается линейная устойчивость трехслойного течения несмешивающихся жидкостей, находящихся в периодическом нормальном электрическом поле. Рассматриваются некоторые пористые среды, относительно которых предполагается, что они однородны, гомогенны и изотропны. Проводится аналитическое и численное моделирование системы линейных уравнений эволюции такой среды. Линеаризованная задача приводит к системе двух уравнений Матье с комплексными коэффициентами перед затухающими членами. Изучается влияние скорости течения, проницаемости пористой среды и электрических свойств течения тонкого слоя (пленки) жидкости на неустойчивость течения. Рассматриваются несколько частных случаев таких систем. В качестве одного из частных случаев рассматривается однородное электрическое поле, при этом уравнения для кривой перехода решаются с точностью до второго порядка относительно малого безразмерного параметра. Показано, что отношение диэлектрических постоянных, как и само электрическое поле, играет дестабилизирующую роль в критериях устойчивости, тогда как пористость оказывает двойственное влияние на движение волн. В случае переменного электрического поля и периодической скорости течения применяется метод кратных временных масштабов для вычисления приближенных решений и анализа критериев устойчивости в нерезонансном и резонансном случаях; также получены кривые перехода для этих случаев. Показано, что увеличение скорости течения и величины электрического поля способствуют возникновению колебаний и, следовательно, имеют дестабилизирующий эффект.

Ключевые слова: линейная устойчивость, периодическое электрическое поле, пористые среды, уравнения Матье, линии тока.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9150>

^{*}Quesna Technical College, Tanta Technical Commercial Institute, Ministry of Higher Education, Tanta, Egypt. E-mail: sameh7977@yahoo.com

[†]Applied Science Department, College of Technological Studies, The Public Authority for Applied Education and Training, Adiliya, Kuwait

[‡]Department of Engineering Mathematics and Physics, Faculty of Engineering, Tanta University, Tanta, Egypt

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является построение математической модели течения тонкого слоя (пленки) одной жидкости между двумя ограниченными слоями другой жидкости в пористых средах. Жидкости подвергаются действию периодического электрического поля, направленного перпендикулярно слоям.

В настоящее время имеется множество работ, посвященных гидродинамической устойчивости, например, неустойчивая электрогидродинамическая устойчивость изучалась в работе [1], где была проанализирована устойчивость основного течения струящихся жидкостей в косом периодическом электрическом поле. В работе [2] рассматривалась неустойчивость потенциального течения вязкой жидкости в горизонтальном канале прямоугольного сечения и было получено явное дисперсионное соотношение, в котором учитывалось влияние поверхностного натяжения и вязкости на нормальное напряжение, но не учитывались касательные напряжения.

Влияние вязкости на устойчивость плоской границы раздела между двумя несжимаемыми жидкостями, помещенными одна над другой, в случае, когда вся система находится в однородном горизонтальном магнитном поле, изучалось в работе [3], где анализировалась устойчивость двух жидкостей с одинаковой кинематической вязкостью, но с различными однородными плотностями. В работе [4] изучалась неустойчивость течения помещенных одна над другой проводящих жидкостей в пористых средах под действием однородного магнитного поля в случае, когда система состоит из тонкого слоя жидкости конечной толщины, расположенного между двумя полубесконечными жидкостями. Было обнаружено, что увеличение коэффициента вязкости, как и величины пористости, влияет нерегулярным образом на устойчивость системы, тогда как увеличение скорости жидкости играет дестабилизирующую роль в критериях устойчивости.

Хорошие обзоры задач гидродинамической устойчивости можно также найти в работах [5] и [6]. Динамика границы раздела между двумя несмешивающимися жидкостями в вертикально ориентированном канале изучалась в работе [7], где теория пограничного слоя и приближение Кармана–Польгаузена применялись для вывода системы нелинейных уравнений эволюции формы границы раздела и скорости течения в одном из слоев. Эти уравнения сводятся к уравнениям, описывающим эволюцию падающих пленок при умеренных скоростях потока. В указанной работе также применялась теория бифуркаций для нахождения семейств бегущих волн при заданных скорости потока и физических свойствах жидкостей. Решения были получены продолжением решений, вычисленных в случае падающей пленки.

Устойчивость тонкого слоя вязкой ньютоновской жидкости, просачивающейся через равномерно нагреваемую пористую наклонную плоскость, изучалась в работе [8]. Для анализа длинноволновой неустойчивости было выведено уравнение эволюции локальной толщины пленки при двумерных возмущениях. Длинноволновая линейная устойчивость анализировалась теоретически и численно в рамках стандартного подхода Орра–Зоммерфельда. Было показано, что увеличение проницаемости и числа Марангони повышает амплитуду возмущений, дестабилизируя течение в пленке. Проницаемость пористой среды способствует проявлению колебательного поведения. В частности, в работе [9] численно изучался массоперенос активных частиц между жидкостью и стенками для описания процесса травления смоченной поверхности в пределе быстрых химических процессов, управляемых диффузией, при

очень больших числах Шмидта. Вычисления проводились с помощью специально адаптированного метода интегрального пограничного слоя, в котором явным образом рассматривалось развитие пограничных слоев скорости течения и концентрации частиц внутри жидкостной пленки.

В работе [10] изучалась электрогидродинамическая устойчивость границы раздела между двумя помещенными одна над другой вязкими жидкостями в канале под действием нормального электрического поля. Эти две жидкости могут иметь различные плотности, вязкости, диэлектрические проницаемости и проводимости. Граница раздела может нести поверхностные заряды, и на ней существует электрическое касательное напряжение, возникающее из-за конечных проводимостей двух жидкостей. Длинноволновая линейная устойчивость анализировалась в рамках подхода Орра–Зоммерфельда для идеальных диэлектриков и диэлектриков с утечкой.

Подход, предложенный в работе [11], был ограничен изучением течения жидкостной пленки под действием гравитации вниз по наклонной стене с периодическими выемками в присутствии нормального электрического поля. В этой работе предполагалось, что пленка – это идеальный проводник, а воздух над пленкой – идеальный диэлектрик. В работе [12] было проанализировано влияние вязкоупругости на электрогидродинамическую неустойчивость в тонких жидкостных пленках под действием электрических полей переменного и постоянного тока. В случае полей постоянного тока асимптотические методы применялись, чтобы понять природу сингулярности, возникающей, когда вязкость жидкости не учитывается. В случае полей переменного тока численные методы, основанные на теории Флоке, применялись, чтобы определить максимальную скорость роста и соответствующее волновое число как функции амплитуды и частоты колебаний. Было обнаружено, что упругость увеличивает как максимальную скорость роста, так и соответствующее волновое число.

При изучении электрогидродинамической неустойчивости, возникающей под действием переменного тока в тонких жидкостных пленках, в работе [13] использовалась теория смазки с целью выявления возможности применять электрические поля переменного тока для более тонкого управления размером и формой вертикальных каналов. Линейный анализ устойчивости пленок идеальных диэлектриков показал, что влияние поля переменного тока можно понять, изучая эффективное поле постоянного тока. В случае пленок диэлектриков с утечкой линейный анализ устойчивости основывался на теории Флоке; было показано, что высокие частоты можно использовать для подавления накопления свободных зарядов на границе раздела, таким образом понижая скорости роста и волновые числа.

В связи с вышесказанным цель настоящей работы – исследовать влияние периодичности электрического поля на устойчивость жидкостных слоев и изучить механизмы устойчивости движения в непрерывном течении, что помогло бы сделать выводы, аналогичные выводам для течений в пористых средах. Результаты, представленные в настоящей работе, могут найти применение в современных технологиях и производствах таких, как дизельные и газотурбинные двигатели, двигатели ракет на жидком топливе, нефтяные топки и производство пластиков, металлических порошков и смазочных материалов.

Статья построена следующим образом. В данном разделе объясняется мотивация исследований в совокупности с некоторой важной вспомогательной информацией.

Рис. 1. Схематическая иллюстрация линейных волн в рассматриваемой задаче.

В разделе 2 приведены постановка задачи и описание рассматриваемой системы. В разделе 3 получены уравнения возмущений и их решения. В разделе 4 в случае периодического электрического поля и периодической скорости течения выведены уравнения Матье, позволяющие управлять распространением поверхностных волн. Кроме того, в этом разделе рассматривается случай однородного течения и постоянного поля, обсуждается схема возмущений с использованием метода кратных масштабов, а также приводятся численные оценки конфигурации устойчивости в данном случае и в случае периодического поля и периодической скорости. Полученные результаты и некоторые важные выводы обсуждаются в разделе 5.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Мы рассматриваем двумерную модель течения через пористую среду тонкого слоя жидкости, расположенного между двумя ограниченными слоями другой жидкости. Несмешивающиеся жидкости несжимаемы, и материальные свойства слоев различны. Для описания потока применяется декартова система координат (x, y) , горизонтальная ось x которой совпадает со средней линией тонкого слоя, а вертикальная ось y направлена вверх; предполагается, что все физические параметры не зависят от x и y (см. рис. 1). Верхнему слою жидкости отвечает верхний индекс $j = 1$, и этот слой занимает область $h < y < d_1$, средний слой жидкости (которому отвечает $j = 2$) расположен в интервале $[-h, h]$, а нижний слой жидкости обозначен индексом $j = 3$ и занимает область $-h < y < d_2$. Предполагается, что система находится под действием силы тяжести, действующей в отрицательном направлении оси y . Мгновенные вертикальные координаты возмущенных границ раздела описываются функциями $y = \zeta_l(x, t)$, $l = 1, 2$, а невозмущенные значения равны $y = (-1)^{l+1}h$.

Предполагается, что слои жидкости движутся со скоростью $\mathbf{u}^{(j)} = u_0^{(j)} \cos \omega_1 t \hat{\mathbf{i}}$, где $u_0^{(j)}$ и ω_1 — константы, и система подвергается воздействию осциллирующего

нормального электрического поля $\mathbf{E}^{(j)} = E_0^{(j)} \cos \omega_2 t \hat{\mathbf{j}}$, где $E_0^{(j)}$ – амплитуда периодического поля, ω_2 – частота колебаний поля. Единичные векторы $\hat{\mathbf{i}}$ и $\hat{\mathbf{j}}$ направлены вдоль осей x и y .

Скорость течения и потенциал скорости обезразмериваются с помощью множителей $\sqrt{hg}$ и $h\sqrt{hg}$, тогда как приложенное нормальное поле и электрический потенциал обезразмериваются с помощью множителей $\sqrt{h g \rho^{(2)} / \varepsilon^{(2)}}$ и $h\sqrt{h g \rho^{(2)} / \varepsilon^{(2)}}$ соответственно. Кроме того, вязкость, проницаемость пористой среды и время обезразмериваются с помощью $\rho^{(2)}\sqrt{h^2 g}$, $h^2 Q$ и $\sqrt{L/g}$. Также в уравнениях движения содержатся следующие безразмерные величины: $\hat{\varepsilon}^{(1)} = \varepsilon^{(1)} / \varepsilon^{(2)}$ и $\hat{\varepsilon}^{(2)} = \varepsilon^{(3)} / \varepsilon^{(2)}$, $\hat{\rho}^{(1)} = \rho^{(1)} / \rho^{(2)}$ и $\hat{\rho}^{(2)} = \rho^{(3)} / \rho^{(2)}$ и число Вебера $W_l = \gamma_l / h^2 g \rho^{(2)}$, где γ_l – коэффициент поверхностного натяжения ($l = 1, 2$). Фундаментальные уравнения движения электрических жидкостей выводятся из комбинации уравнений Максвелла и обычных гидродинамических уравнений.

2.1. Основные уравнения. В качестве гидродинамического уравнения, которое описывает поведение и движение некоторого объема жидкости через пористые среды, часто рассматривается феноменологическое уравнение Дарси, которое выводится из комбинации уравнения количества движения и закона Дарси. Таким образом, соотношение между скоростями жидкостей и давлением в трех слоях можно представить как размерное уравнение [12]–[14]

$$\rho^{(j)} (\partial_t \mathbf{u}^{(j)} + (\mathbf{u}^{(j)} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(j)}) = -\nabla \Pi^{(j)} - \frac{\mu^{(j)}}{Q^{(j)}} \mathbf{u}^{(j)}, \quad (1)$$

а для течения несжимаемой жидкости соответствующее уравнение неразрывности имеет вид

$$\partial_x u^{(j)} + \partial_y v^{(j)} = 0. \quad (2)$$

В этих уравнениях $\mathbf{u}^{(j)} = (u^{(j)}, v^{(j)})$ – скорость в j -м слое, а частные производные обозначаются нижними индексами t , x и y . Символ $\nabla \equiv (\partial_x, \partial_y)$ обозначает оператор горизонтального градиента, а $\Pi^{(j)} = p^{(j)} + \rho^{(j)} g y$ есть полное гидростатическое давление, $p^{(j)}$ и $\rho^{(j)}$ – гидростатическое давление и постоянная плотность потока. Кроме того, вязкость жидкости $\mu^{(j)}$ является мерой сопротивления жидкости деформации сдвига, неизбежно возникающей в течении. Проницаемость $Q^{(j)}$ описывает способность жидкости течь через пористую среду.

Следует отметить, что данную модель можно получить как частный случай модели, предложенной Мейермановым в книге [15], где пористые среды предполагаются однородными, гомогенными и изотропными, а также предполагается, что слои жидкости ограничены двумя жесткими, непроницаемыми и неменяющимися плитами. Вводя потенциал скорости $\phi^{(j)}(x, y, t)$ возмущенного движения так, чтобы полная скорость жидкости задавалась соотношением

$$\mathbf{u}^{(j)}(x, y, t) = u_0^{(j)} \cos \omega_1 t \hat{\mathbf{i}} - \nabla \phi^{(j)}(x, y, t), \quad (3)$$

получим, что $\phi^{(j)}$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \phi^{(j)}(x, y, t) = 0. \quad (4)$$

Выводя уравнения Максвелла для данной задачи, предположим, что применимо электростатическое приближение, т. е. что можно пренебречь влиянием магнитных полей, поскольку электрические поля меняются медленно. Для выполнения этого предположения требуется, чтобы электрическое поле было безвихревым и бездивергентным, следовательно, мы имеем

$$\nabla \cdot (\varepsilon^{(j)} \mathbf{E}^{(j)}) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}^{(j)} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{E}^{(j)}$ – вектор напряженности электрического поля, символ $\times$ обозначает векторное произведение двух векторов и $\varepsilon^{(j)}$ – диэлектрическая постоянная. Потенциальная функция $\chi^{(j)}$ может быть представлена как градиент скалярного потенциала так, чтобы вектор

$$\mathbf{E}^{(j)} = E_0^{(j)} \cos \omega_2 t \hat{\mathbf{j}} - \nabla \chi^{(j)}(x, y, t), \quad j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

автоматически удовлетворял условию нулевого вихря при постоянной диэлектрической проницаемости и, следовательно, можно было ввести скалярный потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \chi^{(j)}(x, y, t) = 0. \quad (7)$$

Тензор напряжений Максвелла описывает поле напряжений, порожденное в материале электростатическими силами, и имеет вид

$$\mathbf{M}^{(j)} = \varepsilon^{(j)} \left(\mathbf{E}^{(j)} \mathbf{E}^{(j)} - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{(j)} \cdot \mathbf{E}^{(j)}) \mathbf{I} \right), \quad (8)$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор. Здесь следует отметить, что дивергенция тензора напряжений Максвелла внутри жидкости равна нулю, потому что результирующий заряд внутри жидкости равен нулю и диэлектрические постоянные не зависят от координаты внутри жидкости. Таким образом, тензор напряжений Максвелла не содержится в уравнении количества движения, а будет влиять на течение только через условия, поставленные на границе раздела.

2.2. Граничные условия. Граничные условия, позволяющие завершить решение вышеупомянутой системы основных уравнений, содержат информацию о решениях на верхней и нижней границах и на границах раздела между жидкостями и могут задаваться следующим образом [8]–[11].

2.2.1. Кинематические граничные условия. На границе раздела

$$y = (-1)^{l+1} h + \zeta_l(x, t), \quad l = 1, 2, \quad (9)$$

естественно поставить кинематические (существенно геометрические) граничные условия и физическое условие баланса сил. Первое кинематическое условие выражает тот факт, что граница раздела всегда состоит из частиц самой жидкости (т. е. на границе раздела между жидкостями нет кавитации), следовательно, функция $\zeta_l(x, t)$, которая определяет границу раздела, удовлетворяет уравнению

$$\partial_y \phi^{l,l+1} + \partial_t \zeta_l + u_0^{l,l+1} \cos \omega_1 t \partial_x \zeta_l = 0. \quad (10)$$

Второе кинематическое соотношение следует из предположения, что нормальная компонента вектора скорости в каждой фазе системы непрерывна на поверхности раздела фаз:

$$\mathbf{n}_l \cdot (\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}^{(l+1)}) = 0 \quad \text{при} \quad y = (-1)^{l+1}h + \zeta_l(x, t), \quad (11)$$

где $\mathbf{n}_l$ – единичный вектор внешней нормали на границе раздела, который задается соотношением

$$\mathbf{n}_l = \frac{\nabla S_l}{|\nabla S_l|} = \frac{-\partial_x \zeta_l \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta_l)^2}}; \quad (12)$$

здесь $S_l(x, y, t)$ – функция, описывающая геометрию поверхности, определяющаяся как геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$S_l = y - [(-1)^{l+1}h + \zeta_l(x, t)].$$

Граничные условия на верхней и нижней плитах в случае, когда плиты считаются жесткими и не изменяющимися во времени, говорят о том, что все компоненты скорости должны быть нулевыми (так как жидкости прилипают к плитам):

$$\mathbf{u}^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad y = h + d_1, \quad \mathbf{u}^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad y = -h - d_2. \quad (13)$$

2.2.2. Условия Максвелла для электрического потенциала. Дополним уравнения электрического поля соответствующими граничными условиями Максвелла. Если нет свободных поверхностных зарядов на границах раздела (рассматривается случай эффектов чистой поляризации), то из непрерывности нормальной компоненты смещения электрического поля на границе раздела следует, что

$$\mathbf{n}_l \cdot (\varepsilon^{(l)} \mathbf{E}^{(l)} - \varepsilon^{(l+1)} \mathbf{E}^{(l+1)}) = 0 \quad \text{при} \quad y = (-1)^{l+1}h + \zeta_l(x, t), \quad (14)$$

откуда

$$\varepsilon^{(l)} E_0^{(l)} - \varepsilon^{(l+1)} E_0^{(l+1)} = 0, \quad \varepsilon^{(l)} \partial_y \chi^{(l)} - \varepsilon^{(l+1)} \partial_y \chi^{(l+1)} = 0. \quad (15)$$

Из непрерывности касательной компоненты электрического поля на границе раздела следует, что

$$\mathbf{t}_l \cdot (\mathbf{E}^{(l)} - \mathbf{E}^{(l+1)}) = 0 \quad \text{при} \quad y = (-1)^{l+1}h + \zeta_l(x, t), \quad (16)$$

где $\mathbf{t}_l = (\hat{\mathbf{i}} + \partial_x \zeta_l \hat{\mathbf{j}}) / \sqrt{1 + (\partial_x \zeta_l)^2}$ – единичный касательный вектор. Таким образом, мы имеем

$$\partial_x \chi^{(l)} - \partial_x \chi^{(l+1)} = \cos \omega_2 t (E_0^{(l)} - E_0^{(l+1)}) \partial_x \zeta_l. \quad (17)$$

2.2.3. Компоненты условий для тензора напряжений. Нормальные напряжения уравниваются поверхностным натяжением (динамическое граничное условие):

$$\mathbf{n} \cdot \|\mathbf{pI}\|_l^{(l+1)} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} \|\varepsilon(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})^2 - \varepsilon(\mathbf{E} \cdot \mathbf{t})^2\|_l^{(l+1)} = -\gamma_{l(l+1)} \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (18)$$

при $y = (-1)^{l+1}h + \zeta_l(x, t)$, где $\gamma_{l(l+1)}$ – коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела между жидкостями; также предполагается, что на границе нет поверхностно-активных веществ.

Указанные граничные условия ставятся на границе раздела $y = (-1)^{l+1}h + \zeta_l(x, t)$, и все задействованные в них физические величины разлагаются в ряд Тейлора в точке $y = (-1)^{l+1}h$.

3. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ИХ РЕШЕНИЯ

Для дальнейшего изучения устойчивости предположим, что границы раздела между жидкостями подвергаются возмущению относительно своих положений равновесия, что приводит к смещению материальных частиц жидкостей в системе. Если рассматривать задачу в рамках линейных возмущений, то члены, содержащие величину повышения поверхности $\zeta_l(x, t)$ во втором и более высоких порядках, отбрасываются. Таким образом, для изучения линейной устойчивости будем рассматривать произвольно малые возмущения границы раздела и определим время роста (или убывания) их скорости. Наш анализ основывается на методе нормальных мод. Каждую возмущенную физическую величину можно представить как функцию горизонтальных и вертикальных координат и времени:

$$F(x, y, t) = \hat{F}(y, t)e^{ikx} + \text{к.с.}, \quad (19)$$

где k – волновое число, которое предполагается действительным и положительным, символ i обозначает мнимую единицу $\sqrt{-1}$, “к.с.” – комплексное сопряжение предшествующих членов и вместо $F(x, y, t)$ могут стоять $\phi(x, y, t)$, $p(x, y, t)$ или $\chi(x, y, t)$. Эти разложения подставляются в основные уравнения и граничные условия. В соответствии с теорией линейной устойчивости [16], [17] мы будем удерживать в этих возмущенных величинах только линейные члены.

Рассмотрим эффект возмущения границы раздела $y = (-1)^{l+1}h$ малыми волнами, распространяющимися в положительном направлении оси x . Предположим, что прогибы поверхности задаются выражением (9), в котором

$$\zeta_l(x, t) = \eta^{(l)}(t)e^{ikx}. \quad (20)$$

Здесь $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$ – произвольные зависящие от времени функции, определяющие поведение амплитуды возмущений на границах раздела. Следует отметить, что мы пренебрегаем линейным членом, появляющимся из нелинейного члена в левой части уравнения (1), из-за усреднения при выводе уравнения Дарси (1). Течения при малых числах Рейнольдса имеют порядок $O(1)$, таким образом, этот член можно не рассматривать. Следовательно, в гидродинамическом описании уравнения (1) в терминах функции тока (см. (3)) давление выражается через потенциал скорости:

$$p^{(j)}(x, y, t) = \rho^{(j)}(\partial_t \phi^{(j)} + u_0^{(j)} \cos \omega_1 t \partial_x \phi^{(j)} - gy) + \frac{\mu^{(j)}}{Q^{(j)}} \phi^{(j)}. \quad (21)$$

В результате из уравнений (18) и (21) получаем уравнения баланса на двух границах раздела:

$$\begin{aligned} &(\rho^{(l)} - \rho^{(l+1)})g\zeta_l + \rho^{(l)} \partial_t \phi^{(l)} - \rho^{(l+1)} \partial_t \phi^{(l+1)} - \frac{\mu^{(l+1)}}{Q^{(l+1)}} \phi^{(l+1)} + \\ &+ \frac{\mu^{(l)}}{Q^{(l)}} \phi^{(l)} + \cos \omega_1 t (\rho^{(l)} u_0^{(l)} \partial_x \phi^{(l)} - \rho^{(l+1)} u_0^{(l+1)} \partial_x \phi^{(l+1)}) + \\ &+ \cos \omega_2 t (\varepsilon^{(l)} E_0^{(l)} \partial_y \chi^{(l)} - \varepsilon^{(l+1)} E_0^{(l+1)} \partial_y \chi^{(l+1)}) - \gamma_{l,l+1} \partial_x^2 \zeta_l = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

В соответствии с прогибом границы раздела (20) и в силу стандартного разложения Фурье мы можем аналогично взять объемные решения, представляющие бегущую

волну, в виде

$$\phi^{(j)}(x, y, t) = \hat{\phi}^{(j)}(y, t)e^{ikx} + \text{к.с.}, \quad (23)$$

$$\chi^{(j)}(x, y, t) = \hat{\chi}^{(j)}(y, t)e^{ikx} + \text{к.с.} \quad (24)$$

Чтобы проиллюстрировать и решить граничную задачу, применим анализ гидродинамической устойчивости, развитый в книге [16]. В этой книге рассматривается система однородных уравнений и граничных условий, описывающих основные факторы, которые влияют на распространение поверхностных волн. С учетом граничных условий решения уравнения Лапласа дают распределение потенциала скорости $\phi^{(j)}$ и потенциала электрического поля $\chi^{(j)}$ во всех трех слоях. После подстановки выражения (23) в уравнение Лапласа (4) полученное дифференциальное уравнение с вышеупомянутыми кинематическими граничными условиями дает потенциальные функции в трех жидкостных фазах:

$$\phi^{(1)}(x, y, t) = C_{h1}(y) \left\{ \frac{\partial_t \eta^{(1)}(t)}{k} + i \cos \omega_1 t u_0^{(1)} \eta^{(1)}(t) \right\} e^{ikx} + \text{к.с.}, \quad (25)$$

$$\phi^{(2)}(x, y, t) = \sum_{n=1}^2 C_{k_n}(y) \left\{ \frac{\partial_t \eta^{(n)}(t)}{k} + i \cos \omega_1 t u_0^{(2)} \eta^{(n)}(t) \right\} e^{ikx} + \text{к.с.}, \quad (26)$$

$$\phi^{(3)}(x, y, t) = C_{h2}(y) \left\{ \frac{\partial_t \eta^{(2)}(t)}{k} + i \cos \omega_1 t u_0^{(3)} \eta^{(2)}(t) \right\} e^{ikx} + \text{к.с.}, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} C_{h_l}(y) &= (-1)^l \operatorname{csch} k(1 + (l-2)d_l - (l-1)d_l) \operatorname{ch} k(y + (-1)^{l+1}d_l), \\ C_{k_l}(y) &= (-1)^l \operatorname{csch} 2k \operatorname{ch} k(1 + (-1)^l y), \end{aligned} \quad l = 1, 2.$$

После подстановки выражения (24) в уравнение Лапласа (7) полученная задача с условиями Максвелла дает

$$\begin{aligned} \chi^{(1)}(x, y, t) &= iE_0^{(1)} \cos \omega_2 t \operatorname{sh} k(y + d_1) \times \\ &\times \{L_{11}(\hat{\varepsilon}^{(1)} - 1)\eta^{(1)}(t) + L_{12}(\hat{\varepsilon}^{(2)} - 1)\eta^{(2)}(t)\} e^{ikx} + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \chi^{(2)}(x, y, t) &= 2iE_0^{(1)} \cos \omega_2 t \times \\ &\times \left\{ \sum_{n=1}^2 M_{2n} \operatorname{ch} k(1 + (-1)^n y) + N_{2n}(\hat{\varepsilon}^{(n)} - 1) \operatorname{sh} k(1 + (-1)^n y) \right\} e^{ikx} + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \chi^{(3)}(x, y, t) &= iE_0^{(1)} \cos \omega_2 t \operatorname{sh} k(y - d_2) \times \\ &\times \{L_{21}(\hat{\varepsilon}^{(1)} - 1)\eta^{(1)}(t) + L_{22}(\hat{\varepsilon}^{(2)} - 1)\eta^{(2)}(t)\} e^{ikx} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (30)$$

Величины L , M и N приведены в приложении А. Соотношения (25)–(30) были получены с использованием безразмерных величин, приведенных выше. Кроме того, член нулевого порядка в уравнении (14) использовался, чтобы выразить $E_0^{(2)}$ и $E_0^{(3)}$ через $E_0^{(1)}$.

4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Целью данного раздела является изучение влияния общих деформаций поверхности на возникновение периодического косо́го электрического поля и периодической скорости в тонком слое (пленке) жидкости. Уравнения, определяющие прогибы поверхности, называются характеристическими уравнениями. Компоненты напряжений содержат гидродинамическое давление, пористость, напряжения поверхностного натяжения и электрические напряжения и должны быть сшиты на границе раздела между жидкостями. Все эти компоненты объясняют поведение зависящих от времени функций, которые управляют распространением поверхностных волн. Далее мы выведем характеристические уравнения, определяющие распространение волн на границах раздела.

Наша задача сводится к системе двух дифференциальных уравнений в частных производных с периодическими коэффициентами, где величина ξ_l повышения поверхности является зависимой переменной. Подставляя выражения (25)–(27) и (28)–(30) в тензор нормальных напряжений (22), чтобы заменить зависимость от потенциала скорости $\phi^{(j)}$, потенциала электрического поля $\chi^{(j)}$ и давления жидкости $p^{(j)}$ зависимостью от амплитуды η_l , и проводя некоторые непосредственные вычисления, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \eta^{(1)} + \{l_{1r}^{(1)} + i(u_0^{(1)} l_{1i}^{(1)} + u_0^{(2)} l_{2i}^{(1)}) \cos \omega_1 t\} \partial_t \eta^{(1)} + \\ + \{f_{1r}^{(2)} + i(u_0^{(2)} f_{1i}^{(2)} + u_0^{(3)} f_{2i}^{(2)}) \cos \omega_1 t\} \partial_t \eta^{(2)} + \\ + \{s_{1r}^{(1)} + E_0^{(1)^2} s_{2r}^{(1)} \cos^2 \omega_2 t + (u_0^{(1)^2} s_{3r}^{(1)} + u_0^{(2)^2} s_{4r}^{(1)}) \cos^2 \omega_1 t + \\ + i([u_0^{(1)} s_{1i}^{(1)} - u_0^{(2)} s_{2i}^{(1)}] \cos \omega_1 t + [u_0^{(1)} s_{3i}^{(1)} - u_0^{(2)} s_{4i}^{(1)}] \sin \omega_1 t)\} \eta^{(1)} + \\ + \{r_{1r}^{(2)} + E_0^{(1)^2} r_{2r}^{(2)} \cos^2 \omega_2 t + r_{3r}^{(2)} [u_0^{(2)^2} - u_0^{(3)^2}] \cos^2 \omega_1 t + \\ + i([u_0^{(2)} r_{1i}^{(2)} + u_0^{(3)} r_{2i}^{(2)}] \cos \omega_1 t + r_{3r}^{(2)} [u_0^{(3)} - u_0^{(2)}] \sin \omega_1 t)\} \eta^{(2)} = 0, \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \eta^{(2)} + \{l_{1r}^{(2)} + i(u_0^{(1)} l_{1i}^{(2)} + u_0^{(2)} l_{2i}^{(2)}) \cos \omega_1 t\} \partial_t \eta^{(2)} + \\ + \{f_{1r}^{(1)} + i(u_0^{(2)} f_{1i}^{(1)} + u_0^{(3)} f_{2i}^{(1)}) \cos \omega_1 t\} \partial_t \eta^{(1)} + \\ + \{s_{1r}^{(2)} + E_0^{(1)^2} s_{2r}^{(2)} \cos^2 \omega_2 t + (u_0^{(1)^2} s_{3r}^{(2)} + u_0^{(2)^2} s_{4r}^{(2)}) \cos^2 \omega_1 t + \\ + i([u_0^{(1)} s_{1i}^{(2)} - u_0^{(2)} s_{2i}^{(2)}] \cos \omega_1 t + [u_0^{(1)} s_{3i}^{(2)} - u_0^{(2)} s_{4i}^{(2)}] \sin \omega_1 t)\} \eta^{(2)} + \\ + \{r_{1r}^{(1)} + E_0^{(1)^2} r_{2r}^{(1)} \cos^2 \omega_2 t + r_{3r}^{(1)} [u_0^{(2)^2} - u_0^{(3)^2}] \cos^2 \omega_1 t + \\ + i([u_0^{(2)} r_{1i}^{(1)} + u_0^{(3)} r_{2i}^{(1)}] \cos \omega_1 t + r_{3r}^{(1)} [u_0^{(3)} - u_0^{(2)}] \sin \omega_1 t)\} \eta^{(1)} = 0; \quad (32) \end{aligned}$$

коэффициенты в этих уравнениях действительные и зависят от физических параметров задачи. Математические формулы для этих коэффициентов весьма громоздки, и мы их здесь не приводим. Однако мы готовы предоставить их по первому требованию.

Подходящим применением полученной модели может служить задача Муската, которая изучалась в книге [15]. Задача Муската моделирует динамику границы раздела в пористых средах между двумя несжимаемыми несмешивающимися жидкостями с различными характеристиками. Эта задача и, следовательно, наша модель

интересны, потому что они могут моделировать водоносный слой или нефтяную скважину.

Уравнения (31) и (32) – это система двух уравнений Матье с затухающими членами и комплексными коэффициентами. Данные уравнения могут применяться для управления устойчивостью тонкого слоя жидкости. По своей природе их решения могут управлять флуктуациями амплитуды прогиба границы раздела и, следовательно, определять параметрическое возбуждение волн на границе раздела. С другой стороны, цель решения этой линейной задачи на собственные значения – определить амплитуды повышения поверхности $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$ как функции времени при заданных физических и геометрических свойствах течения. Аналогичные уравнения появляются во многих задачах прикладной математики, таких как устойчивость поперечных столбов под действием периодической продольной нагрузки, устойчивость периодических решений нелинейной консервативной системы, распространение электромагнитных волн в среде с периодической структурой и возбуждение некоторых электрических систем. Общего аналитического решения таких уравнений не существует, поэтому для изучения устойчивости этой системы мы применяем технику асимптотических разложений.

4.1. Случай однородного потока и постоянного поля. В случае однородного течения в некотором постоянном поле периодичность течения и поля отсутствует. Следовательно, можно возбудить распространение волн электрокапиллярными методами. Поэтому в предельном случае, когда в (31), (32) $\omega_1, \omega_2 \rightarrow 0$, уравнения Матье с затухающими коэффициентами превращаются в линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Решение этой системы уравнений, задающее скорость роста, имеет вид

$$\eta^{(l)} = \tilde{\eta}^{(l)} e^{i\varpi t}, \quad (33)$$

где $\tilde{\eta}^{(l)}$ – константа интегрирования. Подставляя это выражение в систему уравнений Матье, получим дисперсионное уравнение возмущенного движения

$$\varpi^4 + (\alpha_{11} + i\alpha_{12})\varpi^3 + (\alpha_{21} + i\alpha_{22})\varpi^2 + (\alpha_{31} + i\alpha_{32})\varpi + \alpha_{41} + i\alpha_{42} = 0, \quad (34)$$

где смысл коэффициентов α ясен из контекста. Заметим, что уравнение (34) представляет собой комплексное линейное дисперсионное соотношение, которому удовлетворяют ϖ и k . Применяя преобразование $\varpi \rightarrow -i\varpi$, получим уравнение, все корни которого имеют отрицательные действительные части, и поэтому критериями устойчивости можно управлять с помощью условий [4], [18]

$$v_1 > 0, \quad v_2 > 0, \quad v_3 > 0, \quad v_4 \geq 0; \quad (35)$$

величины v выписаны в приложении В.

Ясно, что поверхностные волны, распространяющиеся вдоль границ раздела между невязкими жидкостями, устойчивы, только если все корни уравнения (34) действительные. В противном случае существуют по крайней мере два (комплексно сопряженных) корня и, следовательно, волны будут неустойчивыми.

4.1.1. *Поле линий тока.* Линия тока – это кривая, задаваемая вектором скорости каждой частицы жидкости в определенный момент времени, для которой касательная к каждой точке кривой показывает направление движения жидкости в этой точке. Таким образом, при вычислениях линии тока в физической области можно отобразить в линии горизонтальной сетки на плоскости и получить прямоугольную область вычислений, иногда называемую криволинейной. Итак, для изучения таких линий определим функцию тока $\psi^{(j)}$, зависящую от времени и пространственных координат, которая автоматически удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$u^{(j)} = \frac{\partial \psi^{(j)}}{\partial y}, \quad v^{(j)} = -\frac{\partial \psi^{(j)}}{\partial x}. \quad (36)$$

Уравнение (2) вместе с уравнениями (36) приводит к соотношению между функцией тока и потенциалом скорости:

$$\psi^{(j)} = - \int \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial y} dx. \quad (37)$$

В дальнейшем мы будем рисовать линии тока как функции тока, чтобы проиллюстрировать понятие устойчивости движения волн. Таким образом, линии тока представляют собой эффективный инструмент визуализации поведения потока в движении.

4.1.2. *Численные оценки.* Основная цель рис. 2 и 3 – продемонстрировать влияние проницаемости пористых сред, а также приложенного электрического поля на критерии устойчивости системы.

Кривые, представленные на рис. 2а, показывают наличие четырех корней у характеристического уравнения (34) вместе с колебаниями возмущающего волнового числа k в случае однородного течения и постоянного поля для системы с параметрами, указанными в подписи к рисунку. Рис. 2б показывает, что все корни уравнения (34) действительные и, таким образом, в области $1.4 < k < 3.1$ волны устойчивы. С другой стороны, в области $0.5 < k < 0.7$ имеются две пары комплексно сопряженных корней, тогда как в каждой из областей $0.7 < k < 1.4$ и $3.1 < k < 5$ имеется одна пара комплексно сопряженных корней. Таким образом, в эти интервалах волны неустойчивы. На рис. 2б при тех же параметрах модели, что и на рис. 2а, $E_0^{(1)} = 0.6$. Видно, что в области $0.8 < k < 1.4$, где возможны устойчивые волны, не все корни уравнения (34) действительные и некоторые волны неустойчивы. На рис. 2в, где величина электрического поля повышается до 0.8, видно, что все корни уравнения (34) принимают действительные значения в области $0.8 < k < 1.5$, тогда как один или два из этих корней оказываются комплексными в других областях. Таким образом, электрическое поле оказывает дестабилизирующее влияние на движение волн: с увеличением напряженности поля устойчивые волны превращаются в неустойчивые. Это можно физически интерпретировать как предположение о том, что часть кинетической энергии поля переходит в волны.

Графики, представленные на рис. 3, иллюстрируют вычисления, показанные на рис. 2, но для трех различных значений проницаемости пористой среды $Q^{(2)}$. На рис. 3а (где $Q^{(2)} = 0.3$) видно, что в области $0.8 < k < 1.3$ четыре корня уравнения (34) действительные, тогда как при $0 < k < 0.8$ и $1.6 < k < 2$ два из этих корней

Рис. 2. Четыре корня уравнения (34) в случае однородного течения и постоянного поля в зависимости от волнового числа k для системы с $u_0^{(1)} = 0.2$, $u_0^{(2)} = 0.5$, $u_0^{(3)} = 0.3$, $\varepsilon^{(1)} = 0.2$, $\varepsilon^{(2)} = 0.3$, $d_1 = 0.1$, $d_2 = 0.8$, $\hat{\rho}^{(1)} = 0.8$, $\hat{\rho}^{(2)} = 0.9$, $Q^{(1)} = 0.1$, $Q^{(2)} = 0.3$, $Q^{(3)} = 0.1$ при $E_0^{(1)} = 0.4$ (а), $E_0^{(1)} = 0.6$ (б), $E_0^{(1)} = 0.8$ (в).

Рис. 3. Та же система, что на рис. 2, но при $Q^{(2)} = 0.3$ (а), $Q^{(2)} = 0.5$ (б) и $Q^{(2)} = 0.7$ (в).

Рис. 4. Диаграммы устойчивости на плоскости $((E_0^{(1)})^2, \hat{\varepsilon}^{(1)})$, полученные в соответствии с кривыми перехода, которые определяются условиями (35), при $\hat{\varepsilon}^{(2)} = 0.4$ (а), $\hat{\varepsilon}^{(2)} = 0.6$ (б) и $\hat{\varepsilon}^{(2)} = 0.8$ (в).

комплексные. На рис. 3б (где $Q^{(2)} = 0.5$) видно, что область устойчивости увеличивается до $0.8 < k < 1.8$, тогда как область неустойчивости уменьшается. Графики на рис. 3в (где $Q^{(2)} = 0.7$) показывают, что горизонтальная ось разделена на четыре области: одна из них, $1 < k < 1.5$, соответствует действительным значениям корней уравнения (34), тогда как в других областях один или два из этих корней принимают комплексные значения и, таким образом, допускают неустойчивые волны. Диаграммы устойчивости, показанные на рис. 3, иллюстрируют тот факт, что возрастающие значения проницаемости пористых сред играют двойственную роль, а именно, увеличение проницаемости от $Q^{(2)} = 0.2$ до $Q^{(2)} = 0.5$ оказывает стабилизирующее влияние, а увеличение проницаемости от $Q^{(2)} = 0.5$ до $Q^{(2)} = 0.7$ – дестабилизирующее влияние. Авторы работы [19] пришли к аналогичному заключению, изучая нелинейную электрогидродинамическую устойчивость двух помещенных одна над другой вязкоупругих жидкостей типа Walters B' при их относительном движении через пористую среду.

Чтобы изучить влияние диэлектрической постоянной $\hat{\varepsilon}^{(2)}$ на критерии устойчивости в предельном случае, когда нет влияния пористости, условия устойчивости (35) были проанализированы численно с помощью концепции кривых перехода. Результаты вычислений показаны на рис. 4 в плоскости переменных $((E_0^{(1)})^2, \hat{\varepsilon}^{(1)})$. Графики построены для системы с теми же параметрами, что и на предыдущих рисунках.

Рис. 5. Контурные линии тока для системы с теми же параметрами, что и на рис. 2, при $k = 0.8$ и $t = 0.2$ и при $E_0^{(1)} = 0.5$ (а), $E_0^{(1)} = 1$ (б), $E_0^{(1)} = 1.5$ (в) и $E_0^{(1)} = 2$ (г).

Плоскость на рис. 4 разделена кривыми перехода на устойчивую (S) и неустойчивую (U) области, которые определяются условиями (35). На рис. 4а кривые перехода построены для $\hat{\varepsilon}^{(2)} = 0.4$; плоскость разделена этими кривыми на четыре области, из которых одна представляет собой область неустойчивости, а другие – области устойчивости. На рис. 4б величина диэлектрической постоянной возрастает до 0.6 при тех же значениях параметров, что и на рис. 4а. Рис. 4в отвечает параметру $\hat{\varepsilon}^{(2)} = 0.8$ при тех же значениях других параметров. Представленные на этом рисунке диаграммы устойчивости показывают, что область неустойчивости разрастается, тогда как области устойчивости уменьшаются. Таким образом, сравнение картин устойчивости на рис. 4 показывает, что рост диэлектрической постоянной оказывает дестабилизирующее влияние на движение волн.

На рис. 5 влияние электрического поля на поведение течения продемонстрировано с помощью мгновенных снимков линий тока функции тока (37), где линия тока –

это траектория, по которой движется безмассовая частица в потоке. На рис. 5 картина линий тока получена для системы с теми же параметрами, что и на рис. 2, т. е. при $k = 0.8$, $t = 0.2$ и при фиксированных значениях всех других физических параметров за исключением величины электрического поля, которое принимает четыре значения для сравнения. Рис. 5а, где электрическое поле равно $E_0^{(1)} = 0.5$, показывает, что течение состоит из шести ячеек (контуров или циркуляций), три из которых направлены по часовой стрелке (отрицательные), а другие три направлены против часовой стрелки (положительные). На рис. 5б и рис. 5в величина $E_0^{(1)}$ увеличена до 1 и 1.5 соответственно. Следует заметить, что на этих рисунках каждые два контура линий тока сливаются в одной ячейке. Рис. 5г построен для значения электрического поля $E_0^{(1)} = 2$. На рис. 5а и рис. 5б видно, что рост электрического поля снижает плотность ячеек линий тока, тогда как рис. 5г показывает, что дополнительный рост электрического поля сгущает ячейки линий тока. Это означает, что электрическое поле оказывает дестабилизирующий эффект на устойчивость, т. е. рост электрического поля превращает устойчивые волны в неустойчивые. Этот результат совпадает с результатами, представленными на рис. 2.

4.2. Случай периодического течения и периодического приложенного поля. В случае периодической скорости течения и периодического нормального электрического поля картина устойчивости меняется кардинально. Мы возвращаемся к общему виду дисперсионных соотношений (31) и (32). Из-за сложности математических вычислений неизвестно аналитическое решение этих уравнений. Существует ряд методов для определения характеристических экспонент и кривых перехода, отделяющих устойчивые движения от неустойчивых. Одним из таких методов является метод кратных масштабов [20]. В этом методе независимая переменная t продолжается так, чтобы можно было ввести альтернативные независимые переменные $t_n = \epsilon^n t$, $n = 0, 1, 2$, где ϵ представляет собой малый безразмерный параметр, характеризующий крутизну волны. Таким образом, t_0 определяется как переменная, соответствующая быстрым изменениям, а t_1 и t_2 – медленные переменные.

Теперь можно записать дифференциальные операторы как разложения производной:

$$\partial_t \equiv \partial_{t_0} + \epsilon \partial_{t_1} + \dots, \quad \partial_t^2 \equiv \partial_{t_0}^2 + 2\epsilon \partial_{t_0 t_1} + \dots, \quad (38)$$

где t_0 – время наименьшего порядка. Для малого безразмерного параметра ϵ можно определить амплитуду периодической силы:

$$u_0^{(j)} = \epsilon \tilde{u}_0^{(j)}, \quad (E_0^{(j)})^2 = \epsilon (\tilde{E}_0^{(j)})^2, \quad j = 1, 2, 3, \quad (39)$$

где $E_0^{(j)}$ конечно. Далее следует обычная процедура теории возмущений и избавления от секулярных членов за исключением того, что теперь более удобно записать решение в комплексном виде.

Теперь разложим зависимые переменные $\eta^{(l)}$:

$$\eta^{(l)}(t, \epsilon) = \eta_0^{(l)}(t_0, t_1) + \epsilon \eta_1^{(l)}(t_0, t_1) + \dots, \quad l = 1, 2. \quad (40)$$

Подставляя выражения (38)–(40) в (31) и (32) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ (так как каждая из $\eta^{(l)}$ не зависит от ϵ), получим более простые уравнения, которые можно решать последовательно, зная решения предыдущих порядков.

4.2.1. *Задача нулевого порядка.* Мы имеем уравнения

$$\begin{aligned} \partial_{t_0}^2 \eta_0^{(1)} + l_{1r}^{(1)} \partial_{t_0} \eta_0^{(1)} + f_{1r}^{(2)} \partial_{t_0} \eta_0^{(2)} + s_{1r}^{(1)} \eta_0^{(1)} + r_{1r}^{(2)} \eta_0^{(2)} &= 0, \\ \partial_{t_0}^2 \eta_0^{(2)} + l_{1r}^{(2)} \partial_{t_0} \eta_0^{(2)} + f_{1r}^{(1)} \partial_{t_0} \eta_0^{(1)} + s_{1r}^{(2)} \eta_0^{(2)} + r_{1r}^{(1)} \eta_0^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Решение задачи нулевого порядка будем искать в виде

$$\eta_0^{(1)} = \sum_{n=1}^2 A_n(t_1, t_2) e^{i\varpi_n t_0} + \text{к.с.}, \quad \eta_0^{(2)} = \sum_{n=1}^2 B_n(t_1, t_2) e^{i\varpi_n t_0} + \text{к.с.} \quad (42)$$

С учетом (41) запишем уравнения (42) в виде

$$\begin{aligned} \eta_0^{(1)} &= \sum_{n=1}^2 (r_{1r}^{(2)} + i f_{1r}^{(2)} \varpi_n) A_n(t_1, t_2) e^{i\varpi_n t_0} + \text{к.с.}, \\ \eta_0^{(2)} &= \sum_{n=1}^2 (\varpi_n^2 - i\varpi_n - s_{1r}^{(1)}) A_n(t_1, t_2) e^{i\varpi_n t_0} + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (43)$$

где $A_n(t_1, t_2)$ – неизвестные комплексные функции, которые надо определить, а частоты ϖ_1 и ϖ_2 – это корни дисперсионного уравнения (36) в случае, когда $(E_0^{(j)})^2$ и $u_0^{(j)}$ стремятся к нулю. В этом случае уравнение (34) сводится к уравнению четвертой степени с действительными коэффициентами и, следовательно, имеет четыре комплексно-сопряженных корня. В нашем анализе мы берем действительную часть этих корней (маргинальное состояние) и, таким образом, выбираем корни как $\varpi_{1,2}$.

4.2.2. *Задача первого порядка.* Характеристические уравнения в задаче первого порядка имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_{t_0}^2 \eta_1^{(1)} + l_{1r}^{(1)} \partial_{t_0} \eta_1^{(1)} + f_{1r}^{(2)} \partial_{t_0} \eta_1^{(2)} + s_{1r}^{(1)} \eta_1^{(1)} + r_{1r}^{(2)} \eta_1^{(2)} &= \\ = -2 \partial_{t_0 t_1}^2 \eta_0^{(1)} - l_{1r}^{(1)} \partial_{t_1} \eta_0^{(1)} + f_{1r}^{(2)} \partial_{t_1} \eta_0^{(2)} - \\ - i(\tilde{u}_0^{(1)} l_{1i}^{(1)} + \tilde{u}_0^{(2)} l_{2i}^{(1)}) \cos \omega_1 t \partial_{t_0} \eta_0^{(1)} - i(\tilde{u}_0^{(2)} f_{1i}^{(2)} + \tilde{u}_0^{(3)} f_{2i}^{(2)}) \cos \omega_1 t \partial_{t_0} \eta_0^{(2)} - \\ - \{(\tilde{E}_0^{(1)})^2 s_{2r}^{(1)} \cos^2 \omega_2 t + i(\tilde{u}_0^{(1)} s_{1i}^{(1)} - \tilde{u}_0^{(2)} s_{2i}^{(1)}) \cos \omega_1 t + \\ + i(\tilde{u}_0^{(1)} s_{3i}^{(1)} - \tilde{u}_0^{(2)} s_{4i}^{(1)}) \sin \omega_1 t\} \eta_0^{(1)} - \\ - \{(\tilde{E}_0^{(1)})^2 r_{2r}^{(2)} \cos^2 \omega_2 t + i(\tilde{u}_0^{(2)} r_{1i}^{(2)} + \tilde{u}_0^{(3)} r_{2i}^{(2)}) \cos \omega_1 t + \\ + i r_{3r}^{(2)} (\tilde{u}_0^{(3)} - \tilde{u}_0^{(2)}) \sin \omega_1 t\} \eta_0^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \partial_{t_0}^2 \eta_1^{(2)} + l_{1r}^{(2)} \partial_{t_0} \eta_1^{(2)} + f_{1r}^{(1)} \partial_{t_0} \eta_1^{(1)} + s_{1r}^{(2)} \eta_1^{(2)} + r_{1r}^{(1)} \eta_1^{(1)} &= \\ = -2 \partial_{t_0 t_1}^2 \eta_0^{(2)} - l_{1r}^{(2)} \partial_{t_1} \eta_0^{(2)} + f_{1r}^{(1)} \partial_{t_1} \eta_0^{(1)} - \\ - i(\tilde{u}_0^{(1)} l_{1i}^{(2)} + \tilde{u}_0^{(2)} l_{2i}^{(2)}) \cos \omega_1 t \partial_{t_0} \eta_0^{(2)} - i(\tilde{u}_0^{(2)} f_{1i}^{(1)} + \tilde{u}_0^{(3)} f_{2i}^{(1)}) \cos \omega_1 t \partial_{t_0} \eta_0^{(1)} - \\ - \{(\tilde{E}_0^{(1)})^2 s_{2r}^{(2)} \cos^2 \omega_2 t + i(\tilde{u}_0^{(1)} s_{1i}^{(2)} - \tilde{u}_0^{(2)} s_{2i}^{(2)}) \cos \omega_1 t + \\ + i(\tilde{u}_0^{(1)} s_{3i}^{(2)} - \tilde{u}_0^{(2)} s_{4i}^{(2)}) \sin \omega_1 t\} \eta_0^{(2)} - \\ - \{(\tilde{E}_0^{(1)})^2 r_{2r}^{(1)} \cos^2 \omega_2 t + i(\tilde{u}_0^{(2)} r_{1i}^{(1)} + \tilde{u}_0^{(3)} r_{2i}^{(1)}) \cos \omega_1 t + \\ + i r_{3r}^{(1)} (\tilde{u}_0^{(3)} - \tilde{u}_0^{(2)}) \sin \omega_1 t\} \eta_0^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Возмущения первого порядка содержит неоднородные уравнения. Однородные решения нужны для того, чтобы исключить секулярные члены. Исключая эти члены, получаем условия разрешимости, соответствующие членам с множителем $e^{i\varpi_l t_0}$. Чтобы оценить вклад, который вносит периодичность скорости течения и электрического поля в возмущение тонкого слоя, подставим решения (43) в уравнения (44) и (45) и получим два уравнения

$$\begin{aligned} \partial_{t_0}^2 \eta_1^{(1)} + l_{1r}^{(1)} \partial_{t_0} \eta_1^{(1)} + f_{1r}^{(2)} \partial_{t_0} \eta_1^{(2)} + s_{1r}^{(1)} \eta_1^{(1)} + r_{1r}^{(2)} \eta_1^{(2)} = \\ = \sum_{n=1}^2 \{ (c_{n1}^{(1)} + i c_{n2}^{(1)}) \partial_{t_1} A_n e^{i\varpi_n t_0} + (d_{n1}^{(1)} + i d_{n2}^{(1)}) A_n e^{i\varpi_n t_0} + \\ + (p_{n1}^{(1)} + i p_{n2}^{(1)}) A_n (e^{i(\varpi_n + \omega_1) t_0} + e^{i(\varpi_n - \omega_1) t_0}) + \\ + (q_{n1}^{(1)} + i q_{n2}^{(1)}) A_n (e^{i(\varpi_n + 2\omega_2) t_0} + e^{i(\varpi_n - 2\omega_2) t_0}) \} + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \partial_{t_0}^2 \eta_1^{(2)} + l_{1r}^{(2)} \partial_{t_0} \eta_1^{(2)} + f_{1r}^{(1)} \partial_{t_0} \eta_1^{(1)} + s_{1r}^{(2)} \eta_1^{(2)} + r_{1r}^{(1)} \eta_1^{(1)} = \\ = \sum_{n=1}^2 \{ (c_{n1}^{(2)} + i c_{n2}^{(2)}) \partial_{t_1} A_n e^{i\varpi_n t_0} + A_n (d_{n1}^{(2)} + i d_{n2}^{(2)}) e^{i\varpi_n t_0} + \\ + (p_{n1}^{(2)} + i p_{n2}^{(2)}) A_n (e^{i(\varpi_n + \omega_1) t_0} + e^{i(\varpi_n - \omega_1) t_0}) + \\ + (q_{n1}^{(2)} + i q_{n2}^{(2)}) A_n (e^{i(\varpi_n + 2\omega_2) t_0} + e^{i(\varpi_n - 2\omega_2) t_0}) \} + \text{к.с.}; \end{aligned} \quad (47)$$

смысл коэффициентов в этих уравнениях ясен из контекста. Полученные условия разрешимости делятся на две группы, каждая из которых применяется в одном из двух разных случаев. В первом, нерезонансном, случае значения частот ω_1 и ω_2 далеки от частот ϖ_n и их комбинаций. Во втором случае возникают резонансы, когда частота ω_1 или ω_2 приближается к ϖ_1 или ϖ_2 или их комбинации.

Нерезонансный случай. В этом случае условия разрешимости имеют вид

$$(f_1^{(l)} + i f_2^{(l)}) \partial_{t_1} A_l + (s_1^{(l)} + i s_2^{(l)}) A_l = 0, \quad l = 1, 2, \quad (48)$$

где коэффициенты $f_1^{(l)}$, $f_2^{(l)}$, $s_1^{(l)}$ и $s_2^{(l)}$ даны в приложении С. Из условий (48) следует, что движение устойчиво, если

$$f_1^{(l)} s_1^{(l)} + f_2^{(l)} s_2^{(l)} \geq 0. \quad (49)$$

Резонансный случай. При заданной частоте колебаний поля в области однородного тонкого слоя в резонансном случае возбуждается только одна мода.

СЛУЧАЙ 1: частота ω_1 частота близка по значению к ϖ_1 или ϖ_2 .

Зададим частоту ω_1 , близкую к ϖ_1 , вводя параметр расстройки $\delta^{(l)}$:

$$\omega_1 = 2\varpi_l + 2\epsilon\delta^{(l)}, \quad l = 1, 2; \quad (50)$$

при этом условия разрешимости имеют вид

$$(f_1^{(l)} + i f_2^{(l)}) \partial_{t_1} A_l + (s_1^{(l)} + i s_2^{(l)}) A_l + (h_1^{(l)} + i h_2^{(l)}) \bar{A}_l e^{2i\delta^{(l)} t_1} = 0, \quad (51)$$

где $\bar{A}_l$ – комплексное сопряжение для A_l , а коэффициенты $h_1^{(l)}$ и $h_2^{(l)}$ даны в приложении С. Решение уравнения (51) приводит к дисперсионному соотношению, которое используется при рассмотрении поведения устойчивости в этом резонансном случае. Пусть решение этого уравнения имеет вид

$$A_l = (x_1^{(l)} + ix_2^{(l)})e^{(\tilde{\omega} + i\delta^{(l)})t_1}, \quad (52)$$

где $\tilde{\omega}$ и $\delta^{(l)}$ действительные. Подставим уравнение (52) в уравнение (51) и отделим действительную и мнимую части, считая, что $x_1^{(l)}$ и $x_2^{(l)}$ пропорциональны $e^{\tilde{\omega}t_1}$. Чтобы существовало нетривиальное решение, матрица коэффициентов должна иметь нулевой детерминант, что приводит к дисперсионному соотношению

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^2 + 2f^{(l)}(f_1^{(l)}s_1^{(l)} + f_2^{(l)}s_2^{(l)})\tilde{\omega} + (\delta^{(l)})^2 + 2f^{(l)}(f_1^{(l)}s_1^{(l)} - f_2^{(l)}s_2^{(l)})\delta^{(l)} + \\ + f^{(l)}((s_1^{(l)})^2 + (s_2^{(l)})^2 - (h_1^{(l)})^2 - (h_2^{(l)})^2) = 0, \end{aligned} \quad (53)$$

где $f^{(l)} = 1/((f_1^{(l)})^2 + (f_2^{(l)})^2)$. Важным свойством волн является то, что их рост или затухание зависят от знака $\tilde{\omega}$. Из критерия Гурвица [19] следует, что уравнение (53) устойчиво, когда выполнены условия

$$f_1^{(l)}s_1^{(l)} + f_2^{(l)}s_2^{(l)} \geq 0, \quad (54)$$

$$(\delta^{(l)})^2 + 2f^{(l)}(f_1^{(l)}s_2^{(l)} - f_2^{(l)}s_1^{(l)})\delta^{(l)} + f^{(l)}((s_1^{(l)})^2 + (s_2^{(l)})^2 - (h_1^{(l)})^2 - (h_2^{(l)})^2) \geq 0. \quad (55)$$

Условие (54) совпадает с условием (49), которое выполняется в нерезонансном случае, а $\delta^{(l)}$ – корни уравнения (54),

$$\begin{aligned} \delta_{1,2}^{(l)} = -f^{(l)}(f_1^{(l)}s_2^{(l)} - f_2^{(l)}s_1^{(l)}) \pm \\ \pm \sqrt{(f^{(l)})^2(f_1^{(l)}s_2^{(l)} - f_2^{(l)}s_1^{(l)})^2 - f^{(l)}((s_1^{(l)})^2 + (s_2^{(l)})^2 - (h_1^{(l)})^2 - (h_2^{(l)})^2)}. \end{aligned} \quad (56)$$

Кривые $\delta_1^{(l)}$ и $\delta_2^{(l)}$ представляют кривые перехода, разделяющие области устойчивости и неустойчивости, в плоскости $(\delta^{(l)}, k)$. Из теории Флоке [20] линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами следует, что область между двумя ветвями $\delta_1^{(l)}$ и $\delta_2^{(l)}$ – это область неустойчивости, тогда как область вне этих ветвей – область устойчивости, при этом $\eta^{(l)}(t)$ – периодические функции с одинаковым периодом. Ясно, что ветви $\delta_1^{(l)}$ и $\delta_2^{(l)}$ имеют общие неподвижные точки, которые называются резонансными точками. Эти ветви возникают при $\epsilon \rightarrow 0$ в уравнении (50).

Мы рассчитали численно профили для картины устойчивости волн, распространяющихся вдоль границ раздела между тремя слоями электризованной жидкости в пористых средах. При графическом представлении картины устойчивости вычисления проводились для рассмотренных выше резонансных случаев. Характеристики устойчивости управляются уравнением (56) с теми же параметрами, что и в случае однородного течения и однородного поля. Был рассмотрен резонансный случай, когда значение частоты ω_1 приближается к значению одной из возмущающих частот ϖ_1 или ϖ_2 . На рис. 6, 7 показаны результаты вычислений кривых перехода и кривых $\delta_1^{(1)}$ и $\delta_2^{(1)}$ в резонансных случаях, когда ω_1 близка по значению к ϖ_1 (рис. 6) и когда ω_1 близка по значению к ϖ_2 (рис. 7).

Рис. 6. Диаграммы устойчивости на плоскости $(\delta^{(2)}, k)$, построенные по формуле (56), при $W_2 = 0.2$ и при $u_0^{(3)} = 2.6$ (а), $u_0^{(3)} = 3.1$ (б) и $u_0^{(3)} = 4.1$ (в).

На рис. 6 показаны графики $\delta^{(1)}$ в зависимости от волнового числа k , иллюстрирующие воздействие изменений вышеперечисленных параметров. Мы провели численный поиск областей устойчивости и неустойчивости. Область устойчивости, показанная на этих рисунках, получена из неравенств (54) и (55); здесь буквой S обозначена область устойчивости, а буквой U – область неустойчивости. Неустойчивость появляется как следствие соотношения между частотой ω_1 и возмущающей частотой ϖ_1 . Диаграммы, показанные на этих рисунках, представляют области устойчивости; другие области, лежащие между двумя кривыми перехода $\delta_1^{(1)}$ и $\delta_2^{(1)}$, – это области неустойчивости, что согласуется с теорией Флоке.

Рис. 6а отвечает скорости $u_0^{(3)} = 2.6$ при $W_2=1$ и подходящим образом выбранным значениям вышеупомянутых параметров. Диаграммы показывают, что существуют области неустойчивости между кривыми $\delta_1^{(1)}$ и $\delta_2^{(1)}$, тогда как области вне этих кривых являются областями устойчивости. Рис. 6б отвечает скорости $u_0^{(3)} = 3.1$, тогда как прочие параметры остаются неизменными. На рис. 6в диаграммы устойчивости представляют ту же систему, но при $u_0^{(3)} = 4.1$. Видно, что с ростом скорости $u_0^{(3)}$ в нижнем слое области неустойчивости увеличиваются, тогда как области устойчивости уменьшаются. Таким образом, увеличение скорости оказывает дестабилизирующее влияние.

Графики на рис. 7 построены в резонансном случае $\omega_1 \approx \varpi_2$. Эти графики иллюстрируют влияние отношения плотностей $\hat{\rho}_2$ (т.е. отношение ρ_3/ρ_2 плотности в нижнем слое к плотности в среднем слое) на скорость роста волны. Графики в плоскости $(\delta^{(2)}, k)$ получены для $\hat{\rho}_2 = 0.1$, $\hat{\rho}_2 = 0.5$ и $\hat{\rho}_2 = 0.9$, значения других величин остаются неизменными. Диаграммы устойчивости на рис. 7 показывают,

Рис. 7. Графики зависимости $\delta^{(2)}$ от k , построенные по формуле (56), для системы с теми же параметрами, что и у системы на рис. 2, при $\hat{\rho}^{(2)} = 0.1$ (а), $\hat{\rho}^{(2)} = 0.5$ (б) и $\hat{\rho}^{(2)} = 0.9$ (в).

что увеличение $\hat{\rho}_2$ приводит к увеличению ширины областей устойчивости, тогда как области неустойчивости уменьшаются. Отсюда следует вывод, что отношение плотностей оказывает стабилизирующее влияние на устойчивость волн. Этот результат подтверждает вывод о том, что система устойчива, когда нижняя жидкость более тяжелая, чем верхняя.

СЛУЧАЙ 2: частота ω_1 близка по значению к $\varpi_1 + \varpi_2$.

В этом резонансном случае степень близости частот ω_1 и $\varpi_1 + \varpi_2$ выражается параметром расстройки $\delta^{(3)}$, который вводится по формуле

$$\omega_1 = \varpi_1 + \varpi_2 + 2\epsilon\delta^{(3)}. \quad (57)$$

Условия разрешимости в этом случае имеют вид

$$(f_1^{(1)} + if_2^{(1)})\partial_{t_1} A_1 + (s_1^{(1)} + is_2^{(1)})A_1 + (h_1^{(2)} + ih_2^{(2)})\bar{A}_2 e^{2i\delta^{(3)}t_1} = 0, \quad (58)$$

$$(f_1^{(2)} + if_2^{(2)})\partial_{t_1} A_2 + (s_1^{(2)} + is_2^{(2)})A_2 + (h_1^{(1)} + ih_2^{(1)})\bar{A}_1 e^{2i\delta^{(3)}t_1} = 0. \quad (59)$$

Как и в предыдущем резонансном случае, решения уравнений (58) и (59) определяют дисперсионное соотношение, которое применяется для исследования устойчивости. Аналогично получаем дисперсионное соотношение четвертой степени с действительными коэффициентами:

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega}^4 + \ell_1^{(1)}\tilde{\omega}^3 + (2(\delta^{(3)})^2 + \ell_2^{(1)}\delta^{(3)} + \ell_2^{(2)})\tilde{\omega}^2 + (\ell_1^{(1)}(\delta^{(3)})^2 + \ell_3^{(1)}\delta^{(3)} + \ell_3^{(2)})\tilde{\omega} + \\ &+ (\delta^{(3)})^4 + \ell_2^{(1)}(\delta^{(3)})^3 + \ell_4^{(1)}(\delta^{(3)})^2 + \ell_4^{(2)}\delta^{(3)} + \ell_4^{(3)} = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Рис. 8. Диаграммы устойчивости на плоскости $(\delta^{(3)}, k)$, построенные по формуле (61), при $E_0^{(1)} = 0.5$ (а), $E_0^{(1)} = 1$ (б) и $E_0^{(1)} = 1.5$ (в).

Уравнение (60) контролирует поведение устойчивости, которая имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия [21]

$$\begin{aligned}
 & \ell_1^{(1)}(\delta^{(3)})^2 + (\ell_1^{(1)}\ell_2^{(1)} - \ell_3^{(1)})\delta^{(3)} + \ell_1^{(1)}\ell_2^{(2)} - \ell_3^{(2)} > 0, \\
 & (\ell_1^{(1)})^2(\delta^{(3)})^4 + (\ell_1^{(1)})^2\ell_2^{(1)}(\delta^{(3)})^3 + \\
 & \quad + \{(\ell_1^{(1)})^2\ell_2^{(2)} + \ell_1^{(1)}\ell_2^{(1)}\ell_3^{(1)} - (\ell_1^{(1)})^2 - \ell_3^{(1)2}\}(\delta^{(3)})^2 + \\
 & \quad + \{\ell_3^{(2)}(\ell_1^{(1)}\ell_2^{(1)} - 2\ell_3^{(1)}) - \ell_1^{(1)}\ell_3^{(1)}(\ell_1^{(1)} - \ell_2^{(2)})\}\delta^{(3)} - \\
 & \quad - \ell_3^{(2)}((\ell_1^{(1)})^2 - \ell_1^{(1)}\ell_2^{(2)} - \ell_3^{(2)}) > 0, \\
 & (\delta^{(3)})^4 + \ell_2^{(1)}(\delta^{(3)})^3 + \ell_4^{(1)}(\delta^{(3)})^2 + \ell_4^{(2)}\delta^{(3)} + \ell_4^{(3)} > 0.
 \end{aligned} \tag{61}$$

Как и в предыдущем резонансном случае, эти условия позволяют построить кривые перехода в плоскости $(\delta^{(3)}, k)$ и исследовать их устойчивость.

На рис. 8 показаны результаты численного анализа случая $\omega_1 \approx \varpi_1 + \varpi_2$. С учетом условий (61) плоскость разделена на пять областей: две из них – области устойчивости, а три другие – области неустойчивости. На рис. 8а величина электрического поля $E_0^{(1)} = 0.5$, а значения остальных величин даны в подписи к этому рисунку. На рис. 8б и 8в значения электрического поля равны $E_0^{(1)} = 1$ и $E_0^{(1)} = 1.5$, и диаграмма показывает, что области неустойчивости увеличиваются, а области

устойчивости уменьшаются, и это означает, что электрическое поле оказывает дестабилизирующее влияние на волны в жидкости. Такое поведение подтверждает результат, полученный в случае однородного электрического поля.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе введено понятие гравитационной устойчивости тонкого слоя (пленки) одной жидкости между двумя ограниченными слоями другой жидкости при их течении через пористую среду. В задаче рассматривается несколько частных случаев пористых сред. Система подвергается действию нормального переменного электрического поля, течение может быть периодическим, а на границе имеет место эффект поверхностного натяжения. Динамика задачи описывается совместным решением трех систем полевых уравнений – основных уравнений движения потока, уравнений неразрывности и уравнений Максвелла для электрического поля.

Анализ устойчивости основан на линейной теории возмущений. Предполагается, что прогибы поверхностей независимы, решение системы при условии нормальности напряжений приводит к системе двух дифференциальных уравнений типа уравнений Матье с затухающими членами и комплексными коэффициентами. Эти уравнения управляют устойчивостью движения в тонком слое жидкости. Чтобы преодолеть трудности, возникающие при решении уравнения Матье, требуется упростить математическую задачу. В методе кратных масштабов, который используется при выводе критериев устойчивости в случае периодических течения и поля, а также в резонансном и нерезонансном случаях, естественным образом проявляется параметрическая неустойчивость. Можно найти кривые перехода, разделяющие области устойчивости и неустойчивости.

Численный анализ позволяет сделать основные выводы и обеспечивает качественное понимание процесса. Численные оценки устойчивости системы получены после обезразмеривания физических параметров. Обсуждаются частные случаи отсутствия периодичности скорости и электрических полей. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами предыдущих работ по механике жидкости и электрогидродинамике. Представлены и проанализированы диаграммы устойчивости для различных наборов физических параметров.

Полученные численные результаты позволяют сделать следующие выводы. Показано, что в случае однородного электрического поля увеличение проницаемости играет двойственную роль. Кроме того, показано, что электрическое поле, как и отношение диэлектрических постоянных, точно так же влияет на устойчивость жидкостных слоев. Этот результат подтверждается полученным распределением линий тока. В случае переменного электрического поля и периодической скорости для исследования устойчивости решения применялся метод кратных масштабов. Мы проследили поведение устойчивости решения при увеличении отношения плотностей. Полученный результат показывает, что система устойчива, когда нижняя жидкость более тяжелая, чем верхняя.

Наконец, следует отметить, что результаты, полученные в нашей работе, могут использоваться при моделировании водоносных слоев, нефтяных скважин и нефтяных пластов.

ПРИЛОЖЕНИЕ А**Алгебраические формулы для величин в уравнениях (28)–(30):**

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \frac{(\hat{\varepsilon}^{(2)} + 1) \operatorname{sh} k(1 + d_2) - (\hat{\varepsilon}^{(2)} - 1) \operatorname{sh} k(d_2 - 3)}{\mathcal{R}}, \\
L_{22} &= \frac{(\hat{\varepsilon}^{(1)} + 1) \operatorname{sh} k(1 + d_1) - (\hat{\varepsilon}^{(1)} - 1) \operatorname{sh} k(d_1 - 3)}{\mathcal{R}}, \\
L_{12} &= \frac{2 \operatorname{sh} k(1 - d_2)}{\mathcal{R}}, \quad L_{21} = \frac{2 \operatorname{sh} k(1 - d_1)}{\mathcal{R}}, \\
M_{21} &= \frac{(\hat{\varepsilon}^{(1)} - 1) \operatorname{sh} k(1 - d_1) \operatorname{sh} k(1 - d_2)}{\mathcal{R}}, \\
N_{21} &= -\frac{\hat{\varepsilon}^{(2)} \operatorname{sh} k(1 - d_1) \operatorname{ch} k(1 - d_2)}{\mathcal{R}}, \\
M_{22} &= -\frac{(\hat{\varepsilon}^{(2)} - 1) \operatorname{sh} k(1 - d_1) \operatorname{sh} k(1 - d_2)}{\mathcal{R}}, \\
N_{22} &= \frac{\hat{\varepsilon}^{(1)} \operatorname{ch} k(1 - d_1) \operatorname{sh} k(1 - d_2)}{\mathcal{R}},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= 2 \operatorname{sh} k(1 - d_1) \{ \hat{\varepsilon}^{(2)} \operatorname{ch} 2k \operatorname{ch} k(1 - d_2) - \operatorname{sh} 2k \operatorname{sh} k(1 - d_2) \} - \\
&- 2 \hat{\varepsilon}^{(1)} \operatorname{ch} k(1 - d_1) \{ \hat{\varepsilon}^{(2)} \operatorname{sh} 2k \operatorname{ch} k(1 - d_2) - \operatorname{ch} 2k \operatorname{sh} k(1 - d_2) \}.
\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В**Формулы для величин в соотношениях (35):**

$$\begin{aligned}
v_1 &= \alpha_{11}, \quad v_2 = \alpha_{11}(\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} - \alpha_{31}) - \alpha_{22}^2, \\
v_3 &= v_2(\alpha_{11}(\alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} - \alpha_{11}\alpha_{41} - \alpha_{12}\alpha_{42}) - \alpha_{31}^2) - \\
&- (\alpha_{11}(\alpha_{11}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{31}) - \alpha_{11}\alpha_{42} + \alpha_{22}\alpha_{31})^2, \\
v_4 &= v_{41}v_{42} - v_{43}^2, \\
v_{41} &= v_2(\alpha_{11}(\alpha_{31}\alpha_{41} + \alpha_{32}\alpha_{22}) - \alpha_{42}^2) - (\alpha_{11}(\alpha_{11}\alpha_{41} + \alpha_{12}\alpha_{42}) - \alpha_{22}\alpha_{42})^2, \\
v_{42} &= v_2(\alpha_{11}(\alpha_{31}\alpha_{21} + \alpha_{32}\alpha_{22}) - \alpha_{11}(\alpha_{11}\alpha_{41} + \alpha_{12}\alpha_{41}) - \alpha_{31}^2) - \\
&- (\alpha_{11}(\alpha_{11}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{31}) - \alpha_{11}\alpha_{42} + \alpha_{22}\alpha_{31})^2, \\
v_{43} &= v_2(\alpha_{11}(\alpha_{42}\alpha_{21} - \alpha_{41}\alpha_{22}) - \alpha_{31}\alpha_{42}) + \\
&+ (\alpha_{11}(\alpha_{11}\alpha_{41} + \alpha_{12}\alpha_{42}) - \alpha_{42}\alpha_{22})(\alpha_{11}(\alpha_{11}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{31}) - \alpha_{11}\alpha_{42} + \alpha_{31}\alpha_{22}).
\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ С**Формулы для величин в уравнениях (46) и (49):**

$$\begin{aligned}
f_1^{(l)} &= -c_{l1}^{(2)} \varpi_l + (f_{1r}^{(1)} c_{l2}^{(1)} - l_{1r}^{(1)} c_{l2}^{(2)}) \varpi_l + s_{1r}^{(1)} c_{l1}^{(2)} - r_{1r}^{(1)} c_{l1}^{(1)}, \\
f_2^{(l)} &= -c_{l2}^{(2)} \varpi_l - (f_{1r}^{(1)} c_{l1}^{(1)} + l_{1r}^{(1)} c_{l1}^{(2)}) \varpi_l + s_{1r}^{(1)} c_{l2}^{(2)} - r_{1r}^{(1)} c_{l2}^{(1)}, \\
s_1^{(l)} &= -d_{l1}^{(2)} \varpi_l + (f_{1r}^{(1)} d_{l1}^{(1)} - l_{1r}^{(1)} d_{l2}^{(2)}) \varpi_l + s_{1r}^{(1)} d_{l1}^{(2)} - r_{1r}^{(1)} d_{l1}^{(1)}, \\
s_2^{(l)} &= -d_{l2}^{(2)} \varpi_l - (f_{1r}^{(1)} d_{l2}^{(1)} + l_{1r}^{(1)} d_{l1}^{(2)}) \varpi_l + s_{1r}^{(1)} d_{l2}^{(2)} - r_{1r}^{(1)} d_{l2}^{(1)}, \\
h_1^{(l)} &= -p_{l1}^{(2)} \varpi_l - (l_{1r}^{(1)} p_{l2}^{(2)} - f_{1r}^{(1)} p_{l2}^{(1)}) \varpi_l + s_{1r}^{(1)} p_{l1}^{(2)} - r_{1r}^{(1)} p_{l1}^{(1)}, \\
h_2^{(l)} &= -p_{l2}^{(2)} \varpi_l - (l_{1r}^{(1)} p_{l1}^{(2)} - f_{1r}^{(1)} p_{l1}^{(1)}) \varpi_l + s_{1r}^{(1)} p_{l2}^{(2)} - r_{1r}^{(1)} p_{l2}^{(1)}.
\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] A. F. Elhefnawy, “Intervals of an unsteady electrohydrodynamic Kelvin–Helmoltz stability”, *Phys. A*, **214**:2 (1995), 229–241.
- [2] T. Funada, D. D. Joseph, “Viscous potential flow analysis of Kelvin–Helmholtz instability in a channel”, *J. Fluid Mech.*, **445** (2001), 263–283.
- [3] P. K. Bhatia, “Rayleigh–Taylor instability of two viscous superposed conducting fluids”, *Nuovo Cimento B*, **19**:2 (1974), 161–168.
- [4] K. Zakaria, M. A. Sirwah, S. Alkharashi, “Instability through porous media of three layers superposed conducting fluids”, *Eur. J. Mech. B Fluids*, **28**:2 (2009), 259–270.
- [5] P. G. Drazin, W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.
- [6] D. D. Joseph, *Stability of Fluid Motions II*, Springer Tracts in Natural Philosophy, **28**, Springer, Berlin, 1976.
- [7] G. M. Sisoiev, O. K. Matar, D. Sileri, C. J. Lawrence, “Wave regimes in two-layer microchannel flow”, *Chem. Eng. Sci.*, **64**:13 (2009), 3094–3102.
- [8] I. M. R. Sadiq, R. Usha, S. W. Joo, “Instabilities in a liquid film flow over an inclined heated porous substrate”, *Chem. Eng. Sci.*, **65**:15 (2010), 4443–4459.
- [9] D. Prieling, H. Steiner, “Analysis of the wall mass transfer on spinning disks using an integral boundary layer method”, *Chem. Eng. Sci.*, **101** (2013), 109–119.
- [10] F. Li, O. Ozen, N. Aubry, D. T. Papageorgiou, P. G. Petropoulos, “Linear stability of a two-fluid interface for electrohydrodynamic mixing in a channel”, *J. Fluid Mech.*, **583** (2007), 347–377.
- [11] D. Tseluiko, M. G. Blyth, D. T. Papageorgiou, J.-M. Vanden-Broeck, “Electrified viscous thin film flow over topography”, *J. Fluid Mech.*, **597** (2008), 449–475.
- [12] L. Espín, A. Corbett, S. Kumar, “Electrohydrodynamic instabilities in thin viscoelastic films – AC and DC fields”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **196** (2013), 102–111.
- [13] S. A. Roberts, S. Kumar, “AC electrohydrodynamic instabilities in thin liquid films”, *J. Fluid Mech.*, **631** (2009), 255–279.
- [14] F. L. Dullien, *Fluid Transport and Pore Structure*, Acad. Press, New York, 1992.
- [15] A. Meirmanov, *Mathematical Models for Poroelectric Flows*, v. 1, Atlantis Studies in Differential Equations, Atlantis Press, Paris, 2014.
- [16] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1961.
- [17] G. M. Moatimid, “Stability conditions of an electrified miscible viscous fluid sheet”, *J. Colloid Interface Sci.*, **259**:1 (2003), 186–199.
- [18] J. R. A. Pearson, P. M. J. Tardy, “Models for flow of non-Newtonian and fluids through porous media”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **102**:2 (2002), 447–473.
- [19] M. F. El-Sayed, N. T. Eldabe, M. H. Haroun, D. M. Mostafa, “Nonlinear electrohydrodynamic stability of two superposed Walters B’ viscoelastic fluids in relative motion through porous medium”, *J. Mech.*, **29**:4 (2013), 569–582.
- [20] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York, 1979.
- [21] Z. Zahreddine, E. F. Elshehawey, “On the stability of a system of differential equations with complex coefficient”, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **19**:10 (1988), 963–972.

Поступила в редакцию 13.01.2016,
после доработки 3.02.2016