Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ж. Сакбаев, Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 3, 473–502

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9153>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 18:36:36

© 2017 г.

В. Ж. Сакбаев*

УСРЕДНЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ И МЕРЫ НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГОВ

Изучаются случайные блуждания в гильбертовом пространстве H и представления с их помощью решений задач Коши для дифференциальных уравнений, начальными условиями которых являются числовые функции на гильбертовом пространстве H . Построен конечно-аддитивный аналог меры Лебега – неотрицательная конечно-аддитивная мера λ , определенная на минимальном кольце подмножеств бесконечномерного гильбертова пространства H , содержащем все бесконечномерные прямоугольники, произведения длин сторон которых сходятся абсолютно, и являющаяся инвариантной относительно сдвигов и поворотов в гильбертовом пространстве H . Определено гильбертово пространство $\mathcal{H}$ классов эквивалентности комплекснозначных функций на пространстве H , квадратично-интегрируемых по инвариантной относительно сдвигов мере λ . С помощью усреднения операторов сдвига в пространстве $\mathcal{H}$ на случайные векторы пространства H , распределение которых задается однопараметрической полугруппой (относительно операции свертки) гауссовских мер на пространстве H , определяется однопараметрическая полугруппа сжимающих самосопряженных преобразований пространства $\mathcal{H}$, генератор которой назван оператором диффузии. Получено представление решений задачи Коши для уравнения Шредингера, гамильтонианом которого является оператор диффузии.

Ключевые слова: инвариантная мера на гильбертовом пространстве, конечно-аддитивная мера, случайное блуждание, уравнение Шредингера, задача Коши.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9153>

1. ВВЕДЕНИЕ

Под случайным блужданием в гильбертовом пространстве H понимается однопараметрическое семейство $\xi(t)$, $t \geq 0$, случайных величин со значениями в пространстве H . Случайной величиной со значениями в пространстве H называют измеримое

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00687).

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: fumi2003@mail.ru

отображение пространства элементарных событий с вероятностной мерой $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ в измеримое пространство $(H, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ – минимальная алгебра подмножеств пространства H , порожденная топологией в H (например, топологией слабой сходимости или топологией сходимости по норме). Мы несколько расширим эти понятия и будем называть случайной величиной со значениями в пространстве H измеримое отображение измеримого пространства с комплекснозначной псевдомерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ в измеримое пространство $(H, \mathcal{A})$ (псевдомерой называется аддитивная комплекснозначная функция множества μ , заданная на кольце $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω).

Мотивировкой исследования является получение эволюционных дифференциальных уравнений для математического ожидания функций от случайного блуждания вида

$$u \circ \xi(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где u – некоторая комплекснозначная функция на пространстве H .

Этот метод используется в случае конечномерных пространств H для изучения уравнения Фоккера–Планка методами теории вероятности (см. [1]). В бесконечномерных пространствах исследования дифференциальных уравнений, связанных со случайными процессами, проводились в работах [2]–[6]. В указанных работах рассматривались гауссовские меры на бесконечномерном пространстве, не являющиеся инвариантными относительно сдвигов.

Для изучения случайных блужданий в бесконечномерном гильбертовом пространстве H введем неотрицательную нормированную конечно-аддитивную меру λ на этом пространстве, являющуюся инвариантной относительно сдвигов, но не являющуюся счетно-аддитивной. Сам факт существования такой меры, а также целесообразность выбора ее в качестве аналога меры Лебега не являются достаточно исследованными (см. [7], [8] и цитированную там литературу). В бесконечномерном пространстве невозможно определить ненулевую σ -конечную счетно-аддитивную борелевскую меру, инвариантную относительно сдвигов на произвольный вектор пространства. Целью цикла исследований по теории меры на бесконечномерном пространстве (см. [8]) было определение счетно-аддитивной меры, инвариантной относительно сдвигов на некоторое подмножество векторов пространства. Другое направление исследования мер на бесконечномерном пространстве связано с изучением счетно-аддитивных мер, для которых не требуется соблюдения условия инвариантности относительно сдвига (см. [9], [5]). Мы ставим задачу изучения конечно-аддитивной меры λ , инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор. Тогда функция u от случайного блуждания ξ в соотношении (1) выбирается из пространства $\mathcal{H} = L_2(H, \lambda)$.

В подходе, развиваемом в работах [1], [4], изучаются свойства случайных блужданий, математические ожидания функций от которых являются решениями дифференциальных уравнений. В теории диффузионных процессов (см. [10]) устанавливается связь матрицы ковариаций процесса с коэффициентами диффузии генератора полугруппы, порождаемой уравнением диффузии. Для исследования связи эволюционных уравнений иного типа (уравнения дробной диффузии, уравнения Шредингера с некоторыми гамильтонианами) со случайными процессами в координатном пространстве предлагается использовать метод итераций Чернова. В случае конечномерного координатного пространства H эта программа была реализована в работе [11].

Напомним, что две сильно непрерывные оператор-функции $\mathbf{F}: [0, +\infty) \rightarrow B(H)$ и $\mathbf{G}: [0, +\infty) \rightarrow B(H)$, удовлетворяющие условию $\mathbf{F}(0) = \mathbf{G}(0) = \mathbf{I}$, называются *эквивалентными по Чернову*, если для любого $u \in H$ и любого $T > 0$ выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0, T]} \left\| \left(\left[\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n - \left[\mathbf{G}\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n \right) u \right\|$$

(см. [12], [11], а также теорему Чернова в [13]).

Усреднение случайных операторов сдвига на векторы гильбертова пространства, рассматриваемое в настоящей работе, может обобщаться до усреднения случайных сдвигов вдоль орбит случайных полугрупп. Такое усреднение случайных полугрупп изучалось в работах [14], [11].

В настоящей работе мы приводим ряд примеров случайных блужданий в конечномерном евклидовом пространстве H , для которых математические ожидания являются решениями эволюционных уравнений математической физики (уравнения теплопроводности, уравнения дробной диффузии, уравнения Шредингера с классическим гамильтонианом свободного движения и с релятивистским гамильтонианом). Далее ставится задача определить случайное блуждание в бесконечномерном вещественном гильбертовом пространстве H , для которого справедливы аналоги результатов о случайных блужданиях в конечномерном пространстве.

Для этих целей мы вводим специальный класс мер на бесконечномерном гильбертовом пространстве. Использование гауссовских мер на бесконечномерных гильбертовых пространствах приводит к тому, что множество операторов сдвига на единичные векторы в пространстве квадратично-интегрируемых по гауссовской мере функций не является ограниченным по операторной норме.

Ключевым отличием бесконечномерного гильбертова пространства от конечномерного является отсутствие в бесконечномерном гильбертовом пространстве счетно-аддитивной σ -конечной меры на σ -кольце борелевских подмножеств, инвариантной относительно сдвигов в пространстве H и принимающей положительные значения на открытых ограниченных подмножествах (см. [7]). Действительно, согласно теореме Вейля [15] левоинвариантная относительно всех сдвигов, борелевская, σ -конечная неотрицательная, ненулевая мера на сепарабельных группах существует только на локально-компактных группах. В связи с этим исследовался вопрос о существовании мер на группах, удовлетворяющих перечисленным условиям, но инвариантных относительно только некоторой подгруппы сдвигов. В работе [8] определены векторное пространство и борелевская σ -конечная мера на нем, инвариантная относительно трансляций на любые элементы некоторого бесконечномерного подпространства второй категории в себе.

В предлагаемом в настоящей работе подходе доказывается существование неотрицательной конечно-аддитивной меры, заданной на некотором кольце подмножеств гильбертова пространства H (содержащем все единичные кубы этого пространства), инвариантной относительно сдвига на любой вектор пространства H . Показано, что такая мера не является счетно-аддитивной, σ -конечной, а ее значения на любом компакте гильбертова пространства равны нулю.

Исследовано пространство $\mathcal{H}$ классов эквивалентности комплекснозначных функций (называемых далее функциями), квадратично-интегрируемых по такой инвариантной конечно-аддитивной мере. В пространстве $\mathcal{H}$ исследованы операторы сдвига

на произвольный вектор $h \in H$, они являются унитарными как в случае конечномерных, так и в случае бесконечномерных пространств H . Также исследованы связи случайных блужданий ξ в пространстве H с полугруппами $\mathcal{U}_\xi$ операторов в пространствах функций $\mathcal{H}$, квадратично-интегрируемых по мере на пространстве H , инвариантной относительно сдвигов. С каждым таким случайным блужданием ξ в пространстве H связывается оператор диффузии Δ_ξ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, генерирующий полугруппу $\mathcal{U}_\xi$. Такие операторы диффузии близки к лапласианам Леви (см. [16]–[19]), действующим в пространстве функций на бесконечномерном гильбертовом пространстве, обладающих производными второго порядка по направлениям векторов ортонормированного базиса (ОНБ) и обобщенно суммируемым в определенном смысле. Хотя операторы диффузии Δ_ξ имеют иную область определения и действуют в ином пространстве $\mathcal{H}$, мы высказываем гипотезу, что при специальном выборе процессов ξ они могут быть связаны с лапласианами Леви.

Заметим, что в теории квантовых случайных процессов используются (см. [20], [21]) случайные операторы, т. е. случайные величины со значениями в пространстве линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. В настоящей работе для описания эволюционных уравнений для функций на гильбертовом пространстве изучаются случайные величины со значениями в этом же гильбертовом пространстве.

Структура статьи следующая: в разделе 2 описаны случайные блуждания в конечномерном пространстве и их связь с полугруппами и уравнениями математической физики. В разделе 3 в сепарабельном гильбертовом пространстве H по каждому ОНБ $\mathcal{E}$ определяется мера $\lambda_\mathcal{E}$ на пространстве H , инвариантная относительно сдвигов. Определяется пространство $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ классов эквивалентности числовых функций, квадратично-интегрируемых по мере $\lambda_\mathcal{E}$. В разделе 4 изучаются линейные операторы в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, а в разделе 5 – случайные операторы сдвига на векторы из пространства H , распределение которых задается гауссовскими мерами на пространстве H , средние значения таких случайных операторов и сильно непрерывные полугруппы сжимающих операторов $\mathcal{U}_\mathcal{E}$ в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$. В разделе 6 определяется мера λ на пространстве H , инвариантная относительно сдвигов на произвольный вектор, являющаяся продолжением любой из мер $\lambda_\mathcal{E}$. Определяются пространство $\mathcal{H}$ классов эквивалентности числовых функций, квадратично-интегрируемых по мере λ , и продолжение однопараметрических полугрупп $\mathcal{U}_\mathcal{E}$ до однопараметрической полугруппы $\mathcal{U}$ в пространстве $\mathcal{H}$. Приведены примеры усреднений случайных операторов сдвига в пространстве $\mathcal{H}$, средние значения которых определяют полугруппы, разрешающие эволюционные уравнения для функций на пространстве H .

2. СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ В ОДНОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Приведем некоторые примеры случайных блужданий, математические ожидания функционалов от которых являются решениями эволюционных дифференциальных уравнений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [1], [22], [11]). Пусть $H = \mathbb{R}$, λ – мера Лебега на $\mathbb{R}$, $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ и для каждого $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и каждого $v \in \mathbb{R}$ определено семейство (не полугруппа)

преобразований $U_{\varepsilon,v}(t)$, $t \geq 0$, пространства $\mathcal{H}$, действующих по формуле

$$U_{\varepsilon,v}(t)u(x) = u(x + vt + \varepsilon t^{1/2}), \quad t \geq 0.$$

Пусть на множестве $\mathbb{R}$ задана вероятностная мера μ с плотностью p_μ относительно меры Лебега λ такая, что p_μ – четная функция и

$$\int_{\mathbb{R}} \varepsilon^2 p_\mu(\varepsilon) d\varepsilon = D > 0, \quad \int_{\mathbb{R}} |\varepsilon|^3 p_\mu(\varepsilon) d\varepsilon < \infty.$$

Тогда при любом $v \in R$ семейство

$$U_v^\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} U_{\varepsilon,v}(t) p_\mu(\varepsilon) d\varepsilon, \quad t \geq 0,$$

усредненных преобразований пространства $\mathcal{H}$ является эквивалентным по Чернову полугруппе, разрешающей задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$u'_t = Du''_{xx} + vu'_x, \quad t > 0, \quad x \in R; \quad u|_{t=+0} = u_0. \quad (2)$$

Для представления решений эволюционных дифференциальных уравнений посредством математического ожидания итераций независимых случайных операторов сдвига потребуется применить операцию усреднения не только по мере, но и по псевдомере. Псевдомерой на множестве $\mathcal{S}$ будем называть (см. [23], [24]) комплекснозначную аддитивную функцию множества μ , определенную на некотором кольце $\mathcal{K}$ подмножеств множества $\mathcal{S}$; псевдомерой $\mu: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ на топологическом пространстве $\mathcal{S}$ называется комплекснозначная мера на $(\mathcal{S}, \mathcal{K})$, если она локально (т.е. на каждом компакте из $\mathcal{S}$) обладает ограниченной вариацией.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $H = \mathbb{R}$ и $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$, пусть для каждого $\varepsilon \in \mathbb{R}$ определено семейство (не полугруппа) преобразований $U_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, пространства $\mathcal{H}$, действующих по формуле

$$U_\varepsilon(t)u(x) = u(x + \varepsilon t^{1/2}), \quad t \geq 0.$$

Пусть на множестве $\mathbb{R}$ задана псевдомера μ (т.е. комплекснозначная аддитивная функция множества, определенная на кольце измеримых по Лебегу подмножеств числовой прямой) с плотностью

$$p_\mu(x) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{4\pi D}} e^{-ix^2/4D}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда семейство усредненных преобразований

$$U_v^\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} U_\varepsilon(t) d\mu(\varepsilon), \quad t \geq 0,$$

является полугруппой, разрешающей задачу Коши для уравнения Шредингера

$$iu'_t = -Du''_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad u|_{t=+0} = u_0. \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Псевдомера μ , удовлетворяющая условиям предложения 2, обладает ограниченной вариацией на каждом измеримом по Лебегу компакте прямой R , но в целом вариация псевдомеры μ на прямой R равна бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Действительно, если $u_0 \in \mathcal{H}$, то для любого $t \geq 0$ справедливо равенство

$$u(t, x) = [\mathbf{U}^{\mu_t}(t)u](x) = \int_{\mathbb{R}} u_0(x - t^{1/2}\varepsilon) p_{\mu}(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} u_0(x - y) t^{-1/2} p_{\mu}\left(\frac{y}{t^{1/2}}\right) dy.$$

Следовательно, функция $u(t, x)$ является сверткой функций u_0 и $t^{-1/2} p_{\mu}(y/t^{1/2})$, поэтому $\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}(\xi) \cdot \hat{p}_{\mu}(t^{1/2}\xi)$. Тогда согласно предположению о плотности распределения p_{μ} справедливо равенство $\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}(\xi) e^{-iD\xi^2}$, $t \geq 0$, что и доказывает предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $H = \mathbb{R}$ и $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$, пусть для каждого $\varepsilon \in \mathbb{R}$ определено семейство преобразований $\mathbf{U}_{\varepsilon}(t)$, $t \geq 0$, пространства $\mathcal{H}$, действующих по формуле

$$\mathbf{U}_{\varepsilon, \sigma}(t)u(x) = u(x + \varepsilon t^{\sigma}), \quad t \geq 0, \quad \sigma > 0.$$

Пусть на множестве $\mathbb{R}$ задана знакпеременная мера μ (т.е. вещественнозначная аддитивная функция множества, определенная на кольце измеримых по Лебегу подмножеств числовой прямой), преобразование Фурье плотности p_{μ} которой относительно меры Лебега определено равенством $\hat{p}_{\mu}(\xi) = e^{-D|\xi|^{2\alpha}}$, $\xi \in \mathbb{R}$, при некотором $\alpha > 0$.

Тогда при $\sigma = 1/2\alpha$ семейство усредненных преобразований

$$\mathbf{U}_{\sigma}^{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{U}_{\varepsilon, \sigma}(t) d\mu(\varepsilon), \quad t \geq 0,$$

является полугруппой, разрешающей задачу Коши для уравнения диффузии дробного порядка α

$$u'_t = -D(-\Delta)^{\alpha}u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad u|_{t=+0} = u_0. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Мера μ , удовлетворяющая условиям предложения 3, обладает бесконечно дифференцируемой плотностью p_{μ} , при $\alpha > 1/2$ функция $p_{\mu}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, убывает на бесконечности быстрее чем $1/|x|^{2\alpha}$ и мера μ обладает ограниченной вариацией. При произвольном $\alpha > 0$ плотность меры μ является локально интегрируемой функцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Действительно, если $u_0 \in \mathcal{H}$, то для любого $t \geq 0$ справедливо равенство

$$u(t, x) = [\mathbf{U}^{\mu_t}(t)u](x) = \int_{\mathbb{R}} u_0(x - t^{\sigma}\varepsilon) p_{\mu}(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} u_0(x - y) t^{-\sigma} p_{\mu}\left(\frac{y}{t^{\sigma}}\right) dy.$$

Следовательно, функция $u(t, x)$ является сверткой функций u_0 и $t^{-\sigma} p_{\mu}(y/t^{\sigma})$, поэтому $\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}(\xi) \cdot \hat{p}_{\mu}(t^{\sigma}\xi)$. Тогда согласно предположению о плотности распределения p_{μ} при всех значениях $t > 0$ справедливо равенство $\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}(\xi) e^{-D|\xi|^{2\alpha} t^{2\alpha\sigma}}$, $t \geq 0$, что и доказывает предложение.

В работе [22] для плотности распределения p_μ найдено представление:

$$p_\mu(x) = \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \Gamma\left(\frac{2n+1}{\alpha}\right) x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $H = \mathbb{R}$, $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ и для каждого $\varepsilon \in \mathbb{R}$ определено семейство преобразований $\mathbf{U}_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, пространства $\mathcal{H}$, действующих по формуле

$$\mathbf{U}_\varepsilon(t)u(x) = u(x + \varepsilon t), \quad t \geq 0.$$

Пусть на множестве $\mathbb{R}$ задано однопараметрическое семейство знакопеременных мер $\mu(t)$, $t \geq 0$ (т.е. вещественнозначные аддитивные функции множества, определенные на кольце измеримых по Лебегу подмножеств числовой прямой), преобразование Фурье плотности $p_{\mu(t)}$ которых относительно меры Лебега определено равенством $\hat{p}_{\mu(t)}(\xi) = e^{-D\sqrt{|\xi|^2+t^2}}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Тогда семейство усредненных преобразований $\mathbf{U}_{\varepsilon,v}$ удовлетворяет условиям теоремы Чернова и усредненное преобразование

$$\mathbf{U}^\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{U}_\varepsilon(t) d\mu(\varepsilon), \quad t \geq 0,$$

является полугруппой, разрешающей задачу Коши для уравнения

$$u'_t = -D\sqrt{(-\Delta) + \mathbf{I}u}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad u|_{t=+0} = u_0. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При любом $t > 0$ мера $\mu(t)$, удовлетворяющая условиям предложения 4, обладает бесконечно дифференцируемой плотностью $p_{\mu(t)}$ и убывает на бесконечности быстрее любой степени функции $|x|$. При произвольном $t > 0$ плотность меры μ является абсолютно интегрируемой функцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4. Действительно, если $u_0 \in \mathcal{H}$, то для любого $t \geq 0$ справедливо равенство

$$u(t, x) = [\mathbf{U}^{\mu_t}(t)u](x) = \int_{\mathbb{R}} u_0(x - t\varepsilon) p_{\mu(t)}(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} u_0(x - y) t^{-1} p_{\mu(t)}\left(\frac{y}{t}\right) dy.$$

Следовательно, функция $u(t, x)$ является сверткой функций u_0 и $t^{-1}p_{\mu(t)}(y/t)$, поэтому $\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}(\xi) \cdot \hat{p}_{\mu(t)}(t\xi)$. Тогда согласно предположению о плотности распределения $p_{\mu(t)}$ при всех значениях $t > 0$ справедливо равенство

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}(\xi) e^{(-D\sqrt{t^2+|\xi|^2t^2})} = \hat{u}(\xi) e^{-Dt\sqrt{1+|\xi|^2}}, \quad t \geq 0,$$

что и доказывает предложение.

Все приведенные выше примеры одномерных случайных блужданий имеют естественные обобщения на блуждания в конечномерном евклидовом пространстве. Вопрос о случайных блужданиях в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H затруднен следующими фактами:

1) отсутствием меры Лебега на пространстве H , т.е. счетно-аддитивной меры на σ -кольце борелевских подмножеств H , инвариантной относительно сдвигов в пространстве H и принимающей положительные числовые значения на открытых ограниченных подмножествах пространства H (см. [7]);

2) отсутствием аддитивной функции множества на алгебре 2^H всех подмножеств пространства H , принимающей одинаковые значения на конгруэнтных множествах (см. [25]);

3) отсутствием равномерной ограниченности множества операторов сдвига S_h , $h \in H$, в пространстве функций $L_2(H, \lambda)$, квадратично-интегрируемых относительно гауссовской меры λ на пространстве H (см. [9]).

В связи с этим мы исследуем вопрос о существовании неотрицательной конечно-аддитивной меры λ , заданной на некотором кольце $\mathcal{K}$ множеств пространства H , инвариантной относительно сдвигов в пространстве H . Если такие меры существуют, то они могут играть роль меры Лебега на пространстве H – в пространстве $\mathcal{H} = L_2(H, \mathcal{K}, \lambda)$ квадратично-интегрируемых по мере λ комплекснозначных функций операторы сдвига S_h , $h \in H$, являются унитарными, как и в примерах с конечномерными пространствами. Поэтому и результаты о связи случайных блужданий в пространстве H с полугруппами в пространстве $\mathcal{H} = L_2(H, \mathcal{K}, \lambda)$ из предложений 1–4 переносятся на случай бесконечномерного пространства H .

3. МЕРА НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ИНВАРИАНТНАЯ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГА

Определим аддитивную функцию λ на некоторой совокупности подмножеств вещественного сепарабельного гильбертова пространства H по следующему правилу.

Брусом в пространстве H назовем такое множество $\Pi \subset H$ (не обязательно ограниченное), что найдется такой ОНБ $\{e_j\}$ в H , в котором координаты точек множества Π определяются условиями

$$\Pi = \{x \in H: x_j \in [a_j, b_j) \forall j \in \mathbb{N}\}, \quad -\infty < a_j < b_j < +\infty, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Множество Π вида (6) может оказаться пустым, например, если $a_j = 1$, $b_j = 2$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Непустые брусы можно выделить из множеств вида (6) по следующему правилу. Для каждого бруса вида (6) определим величину $\theta(\Pi) \in [0, +\infty]$, равную сумме ряда $\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2$, где $c_j = \inf_{x \in [a_j, b_j)} |x|$, $j \in \mathbb{N}$. При этом $\Pi \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\theta(\Pi) < +\infty$.

Брус вида (6) назовем *измеримым*, если либо он пуст (в случае $\theta(\Pi) = +\infty$), либо в случае $\theta(\Pi) < +\infty$, когда выполняется условие сходимости следующего ряда:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max\{0, \ln(b_j - a_j)\}. \quad (7)$$

Для каждого измеримого бруса Π положим $\lambda(\Pi) = 0$ в случае $\theta(\Pi) = +\infty$, а в случае $\theta(\Pi) < +\infty$ положим

$$\lambda(\Pi) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \ln(b_j - a_j)\right). \quad (8)$$

Кроме того, доопределим меру λ значением $+\infty$ на множестве непустых брусов, для которых ряд (7) расходится, но ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \min\{0, \ln(b_j - a_j)\} \quad (9)$$

сходится. Если для некоторого бруса оба ряда (7) и (9) расходятся, то для такого бруса значение меры не определено.

Множество брусов не образует полукольца подмножеств пространства H , так как дополнение одного бруса до другого может не быть конечным объединением брусов.

Поэтому введем следующие классы множеств:

K_1 – множество измеримых брусов;

K_2 – множество пористых измеримых брусов – множество теоретико-множественных разностей измеримого бруса и конечного объединения брусов из класса K_1 ;

K_3 – множество конечных объединений пористых измеримых брусов.

Для каждого ОНБ $\mathcal{E}$ введем следующие классы множеств:

$K_1(\mathcal{E})$ – множество измеримых брусов с ребрами, сонаправленными с векторами базиса $\mathcal{E}$;

$K_2(\mathcal{E})$ – множество пористых измеримых брусов с ребрами, сонаправленными с векторами базиса $\mathcal{E}$, – множество теоретико-множественных разностей измеримого бруса и конечного объединения брусов из класса $K_1(\mathcal{E})$;

$K_3(\mathcal{E})$ – множество конечных объединений пористых измеримых брусов из класса $K_2(\mathcal{E})$.

Сначала для каждого ОНБ $\mathcal{E}$ покажем, что класс $K_3(\mathcal{E})$ является минимальным кольцом, содержащим класс $K_1(\mathcal{E})$; затем определим конечно-аддитивную меру на минимальном кольце, содержащем класс $K_3(\mathcal{E})$.

ЛЕММА 1. *Для каждого ОНБ $\mathcal{E}$ класс подмножеств $K_3(\mathcal{E})$ пространства H является кольцом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, множество $\emptyset$ входит в класс $K_3(\mathcal{E})$. Если $A, B \in K_1(\mathcal{E})$, то $A \cap B \in K_1(\mathcal{E})$, $A \setminus B \in K_2(\mathcal{E})$ и $A \cup B \in K_3(\mathcal{E})$. Если $A, B \in K_2(\mathcal{E})$, то $A \cap B \in K_2(\mathcal{E})$, $A \setminus B \in K_3(\mathcal{E})$ и $A \cup B \in K_3(\mathcal{E})$. Наконец, если $A, B \in K_3(\mathcal{E})$, то $A \cap B \in K_3(\mathcal{E})$, $A \setminus B \in K_3(\mathcal{E})$ и $A \cup B \in K_3(\mathcal{E})$, что и доказывает утверждение.

ЛЕММА 2. *Функция множества $\lambda_{\mathcal{E}}$, определенная на классе $K_1(\mathcal{E})$ равенством (8), допускает единственное продолжение до меры $\lambda_{\mathcal{E}}$ на кольце множеств $K_3(\mathcal{E})$.*

Функция множества $\lambda_{\mathcal{E}}$, определенная на классе $K_1(\mathcal{E})$ равенством (8), может быть по условию аддитивности однозначно продолжена на класс $K_2(\mathcal{E})$, а далее – с класса $K_2(\mathcal{E})$ на кольцо $K_3(\mathcal{E})$. При этом значение продолженной меры на множестве A из кольца $K_3(\mathcal{E})$ не зависит от того, каким образом множество A представлено в виде конечного объединения пористых измеримых брусов.

Чтобы доказать последнее, будем говорить, что одно представление множества A в виде конечного объединения пористых измеримых брусов является продолжением другого, если каждый пористый брус из первого представления входит как часть в один из брусов второго. Тогда для любых двух различных представлений множества A в таком виде найдется третье представление, являющееся продолжением как первого, так и второго; а это и гарантирует однозначность продолжения меры $\lambda_{\mathcal{E}}$ на кольцо $K_3(\mathcal{E})$.

Множество $A \subset H$ назовем $\lambda_{\mathcal{E}}$ -измеримым, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества $A_1, A_2 \in K_3(\mathcal{E})$, что $A_1 \subset A \subset A_2$ и $\lambda_{\mathcal{E}}(A_2 \setminus A_1) < \varepsilon$. Через $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ обозначим совокупность $\lambda_{\mathcal{E}}$ -измеримых множеств.

Например, множество B , полученное из множества $A \in K_3(\mathcal{E})$ поворотом в какой-либо двумерной координатной плоскости на произвольный угол, является $\lambda_{\mathcal{E}}$ -измеримым. $\lambda_{\mathcal{E}}$ -Измеримо и множество, полученное из множества A с помощью ортогонального преобразования пространства H , не изменяющего координаты векторов начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 3. *Совокупность $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ $\lambda_{\mathcal{E}}$ -измеримых множеств является кольцом.*

Действительно, $\emptyset \in \mathcal{K}_{\mathcal{E}}$. Предположим, что $A, B \in \mathcal{K}_{\mathcal{E}}$, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества $A_1, A_2; B_1, B_2 \in K_3(\mathcal{E})$, что $A_1 \subset A \subset A_2$, $B_1 \subset B \subset B_2$ и $\lambda_{\mathcal{E}}(A_2 \setminus A_1) < \varepsilon$; $\lambda_{\mathcal{E}}(B_2 \setminus B_1) < \varepsilon$. Тогда

$$B_1 \cup A_1 \subset A \cup B \subset B_2 \cup A_2, \quad B_1 \setminus A_2 \subset B \setminus A \subset B_2 \cup A_1,$$

причем $B_1 \cup A_1, B_2 \cup A_2, B_1 \setminus A_2, B_2 \setminus A_1 \in K_3(\mathcal{E})$ в силу леммы 1 и при этом

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{E}}((B_2 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup A_1)) &\leq \lambda_{\mathcal{E}}((B_2 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus A_1)) \leq 2\varepsilon, \\ \lambda_{\mathcal{E}}((B_2 \setminus A_1) \setminus (B_1 \setminus A_2)) &\leq \lambda_{\mathcal{E}}((B_2 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus A_1)) \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $A \cup B, B \setminus A \in \mathcal{K}_{\mathcal{E}}$.

Исследуем вопрос о счетной аддитивности меры $\lambda_{\mathcal{E}}$ и о $\lambda_{\mathcal{E}}$ -измеримости шаров. Для этой цели нам потребуется ввести в рассмотрение некоторые геометрические объекты и понятие внешней и внутренней меры множества из пространства H .

Для произвольного множества $B \subset H$ и произвольного ОНБ $\mathcal{E}$ *внешней (внутренней) $\mathcal{E}$ -мерой множества* называется величина $\bar{\mu}_{\mathcal{E}}(B) = \inf_{S \supset B} (\lambda_{\mathcal{E}}(S))$ (величина $\underline{\mu}_{\mathcal{E}}(B) = \sup_{S \subset B} (\lambda_{\mathcal{E}}(S))$), где точная грань берется по всевозможным множествам $S \in \mathcal{K}_{\mathcal{E}}$, содержащим множество B (содержащимся в множестве B). При этом в силу определения кольца $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ $\lambda_{\mathcal{E}}$ -измеримых множеств точные грани в определении внешней (внутренней) $\mathcal{E}$ -меры множества можно брать не по множествам из кольца $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$, а по множествам из кольца $K_3(\mathcal{E})$.

Очевидно, что $\bar{\mu}_{\mathcal{E}}(K) = 0$ для любого компактного множества $K \subset H$. Действительно, компактное множество ограничено и, следовательно, лежит в некотором шаре радиуса R . Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N , что множество K лежит в ε -окрестности N -мерной гиперплоскости пространства H . Поэтому множество K можно покрыть конечным числом брусков нулевой $\lambda_{\mathcal{E}}$ -меры.

Для каждого числа $\sigma > 0$ будем называть σ -цилиндром высоты h с осью l часть σ -окрестности прямой l , заключенную между гиперплоскостями коразмерности 1, ортогональными прямой l и находящимися на расстоянии h друг от друга (обозначается $C(l, h, \sigma)$).

Для некоторого ОНБ $\mathcal{E}$ рассмотрим счетное множество прямых l_{e_k} , $k \in \mathbb{N}$, проходящих через некоторую точку параллельно базисным векторам $\{e_k\}$ базиса $\mathcal{E}$. Для каждого ОНБ $\mathcal{E}$ и чисел $\sigma > 0$, $h > 0$ назовем σ -ортезом *полуширины* h множество $O(\mathcal{E}, \sigma, h)$, представляющее собой объединение счетного множества σ -цилиндров высоты $2h$ с осями l_{e_k} , $k \in \mathbb{N}$, центры которых лежат в одной точке (например, в начале координат).

ЛЕММА 4. *При любом $\sigma \in (0, 1)$ внешняя мера σ -ортеза полуширины $h > 1$ равна $\bar{\mu}_{\mathcal{E}}(O(\mathcal{E}, \sigma, h)) = +\infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основная идея доказательства заключается в том, что при любом $\sigma \in (0, 1)$ протяженность σ -ортеза полуширины h вдоль счетного множества направлений равна $2h$, тогда как объединение любого конечного числа измеримых брусов может иметь протяженность $2h > 2$ только вдоль конечного числа направлений.

Для того чтобы доказать бесконечность внешней меры ортеза $O(\mathcal{E}, \sigma, h)$ при $\sigma > 0$ и $h > 1$, требуется показать, что такой ортез не содержится в объединении конечного числа m измеримых брусов из кольца $K_3(\mathcal{E})$, у которых любое ребро сонаправлено с одним из векторов базиса $\mathcal{E}$. А так как в силу условия (3) у измеримого бруса верхний предел длины j -го ребра при $j \rightarrow \infty$ не превосходит 1, то существует такое $N \in \mathbb{N}$, что у любого из m брусов длина j -го ребра лежит в интервале $(0, h)$. Так как всякий измеримый брус может быть покрыт конечным числом кубов с длиной ребра h , то достаточно доказать, что σ -ортез полуширины $h > 1$ не содержится в объединении конечного числа m кубов с длиной ребра h .

Докажем методом математической индукции по m , что объединение G_m кубов $Q_1, \dots, Q_m$ с ребром h может содержать не более $m(m-1)/2$ σ -цилиндров высоты $2h$, оси которых являются попарно ортогональными. Очевидно, что при $m = 1$ для одного куба Q_1 с ребром h не существует ни одного направления l_{e_k} такого, что $C(l_{e_k}, 2h, \sigma) \in Q_1$.

Для объединения G_2 двух кубов $Q_1, Q_2 \in K_3(\mathcal{E})$ с длиной ребра h может существовать не более одного направления l (оси) такого, что множество G_2 содержит в себе σ -цилиндр высоты $2h$ с осью, параллельной направлению l . Ибо если σ -цилиндр высоты $2h$ лежит в множестве G_2 , то грани кубов Q_1, Q_2 , ортогональные оси цилиндра l , пересекаются и их пересечение содержит основание σ -цилиндра. При этом кубы Q_1, Q_2 лежат по разные стороны от гиперплоскости π_l коразмерности 1, содержащей эти пересекающиеся грани. Тогда для любого базисного направления l' , ортогонального оси цилиндра l , σ -цилиндр высоты $2h$ с осью, параллельной l' , не может лежать в множестве G_2 .

Предположим, что объединение G_m кубов $Q_1, \dots, Q_m$ с ребром h может содержать не более $m(m-1)/2$ σ -цилиндров высоты $2h$, оси которых являются попарно ортогональными. Определим, сколько новых σ -цилиндров высоты $2h$ можно вписать в объединение куба Q_{m+1} с множеством G_m . Такие цилиндры частично расположены в кубе Q_{m+1} , и каждый такой цилиндр имеет непустое пересечение хотя бы с одной гранью этого куба, перпендикулярной оси цилиндра. Поэтому каждый такой цилиндр содержит часть общих граней куба Q_{m+1} и множества G_m . Следовательно, число новых цилиндров не превосходит числа граней в многогранных углах, образованных кубами $Q_1, \dots, Q_m$. Так как при образовании многогранного угла каждый куб Q_j может представить только одну грань, то максимальное число граней в многогранном угле, образованном гранями кубов из множества G_m , равно m . Поэтому объединение G_{m+1} кубов $Q_1, \dots, Q_m, Q_{m+1}$ с длиной ребра h может содержать не более $m(m+1)/2$ σ -цилиндров высоты $2h$, оси которых являются попарно ортогональными. Утверждение, устанавливаемое методом математической индукции, доказано, и из него следует утверждение леммы 4, ибо ортез $O(\mathcal{E}, \sigma, h)$ содержит бесконечно много σ -цилиндров высоты $2h$ с попарно ортогональными осями и потому не может быть подмножеством объединения конечного числа кубов с ребром h .

ЗАМЕЧАНИЕ 4 (ОБ ИЗМЕРИМОСТИ ШАРОВ). Очевидно, что если $R \in [0, 1/2)$, то $\bar{\mu}_{\mathcal{E}}(B_R) = 0$, поскольку шар вписан в куб с длиной ребра меньше 1, и, следовательно, существует $\lambda_{\mathcal{E}}(B_R) = 0$.

ЛЕММА 5. Для шара радиуса $R > 1$ верны равенства $\underline{\mu}_{\mathcal{E}}(B_R) = 0$ и $\bar{\mu}_{\mathcal{E}}(B_R) = +\infty$.

Заметим, что для любого шара B_R и любого базиса $\mathcal{E}$ выполняется равенство $\underline{\mu}_{\mathcal{E}}(B_R) = 0$. Действительно, для любого бруса $\Pi \in B_R$ длина j -го ребра стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$, поэтому $\lambda_{\mathcal{E}}(\Pi) = 0$ для любого бруса $\Pi \in B_R$, а значит, и для любого множества $S \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$, вписанного в шар B_R .

Всякий шар радиуса $R > 1$ содержит в качестве подмножества ортез $O(\mathcal{E}, \sigma, h)$ при некотором выборе чисел $\sigma \in (0, R)$ и $h \in (1, R)$, поэтому в силу леммы 4 $\bar{\mu}_{\mathcal{E}}(B_R) = +\infty$.

ТЕОРЕМА 1. Мера $\lambda_{\mathcal{E}}$ не является счетно-аддитивной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, рассмотрим ортез $O(\mathcal{E}, \sigma, h)$ при некоторых $h > 1$ и $\sigma \in (0, 1/2)$. Каждый σ -цилиндр высоты $2h$, входящий в ортез $O(\mathcal{E}, \sigma, h)$, имеет нулевую $\lambda_{\mathcal{E}}$ -меру, поскольку его основание может быть вписано в куб с ребром $2\sigma < 1$. Поэтому если бы мера $\lambda_{\mathcal{E}}$ была счетно-аддитивна, то ортез $O(\mathcal{E}, \sigma, h)$ при $h > 1$, $\sigma \in (0, 1/2)$ являлся бы $\lambda_{\mathcal{E}}$ -измеримым множеством таким, что $\lambda_{\mathcal{E}}(O(\mathcal{E}, \sigma, h)) = 0$. Но это не так согласно лемме 4.

Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ над полем $\mathbf{C}$ линейных комбинаций индикаторных функций из кольца $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ и определим на пространстве $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ неотрицательно определенную эрмитову полуторалинейную форму по следующему правилу. Для любых $A, B \in \mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ положим $(\chi_A, \chi_B) = \lambda_{\mathcal{E}}(A \cap B)$, а для произвольных функций $u, v \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ вида $u = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}$, $v = \sum_{k=1}^m b_k \chi_{B_k}$ положим

$$\beta_{\mathcal{E}}(u, v) \equiv (u, v)_{\mathcal{H}(\mathcal{E})} = \left(\sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}, \sum_{k=1}^m b_k \chi_{B_k} \right) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{b}_k c_j (\chi_{A_j}, \chi_{B_k}). \quad (10)$$

Две функции u и v из линейного пространства $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ назовем эквивалентными, если $\beta_{\mathcal{E}}(u - v, u - v) = 0$. Линейное пространство классов эквивалентности функций из пространства $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ с введенной полуторалинейной формой $\beta_{\mathcal{E}}$ является предгильбертовым, по нему с помощью стандартной процедуры пополнения определяется гильбертово пространство, обозначаемое далее через $L_2(H, \mathcal{K}_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{E}}) \equiv \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

Итак, для каждого ОНБ $\mathcal{E}$ в пространстве H имеется кольцо $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ $\lambda_{\mathcal{E}}$ -измеримых множеств, на котором определена мера $\lambda_{\mathcal{E}}$ и определено гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ квадратично-интегрируемых $\lambda_{\mathcal{E}}$ -измеримых функций на пространстве H .

Отметим следующее свойство гильбертова пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

ЛЕММА 6. Пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ несепарабельно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ содержит систему единичных ортогональных векторов $e_{\alpha} = \chi_{Q_{\alpha}}$, где $\chi_{Q_{\alpha}}$ – индикаторная функция единичного куба с ребрами $[\alpha_j, \alpha_j + 1]$, $j \in \mathbb{N}$, при условии, что все числа α_j могут принимать произвольные значения из двухэлементного множества $\{-1, 0\}$. Таким образом, каждое отображение $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0\}$ задает единичный куб Q_{α} , причем

для различных отображений α, β кубы Q_α, Q_β не имеют общих внутренних точек и поэтому $(\chi_{Q_\alpha}, \chi_{Q_\beta})_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = 0$; при этом поскольку при любом α куб Q_α является непустым бруском с ребрами единичной длины, то $(\chi_{Q_\alpha}, \chi_{Q_\alpha})_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = 1$. Поскольку множество отображений $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0\}$ несчетно, то пространство $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ содержит несчетную ортонормированную систему векторов.

СЛЕДСТВИЕ 1. Мера $\lambda_\mathcal{E}$ не является σ -конечной.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть A, B – два множества в пространстве H , которые конгруэнтны в том смысле, что существует унитарное преобразование U пространства H и, быть может, параллельный перенос P в H , композиция которых переводит одно множество в другое: $B = P \circ U(A)$ и $A \in K(\mathcal{E})$ для некоторого ОНБ $\mathcal{E}$. Тогда найдется такой ОНБ $\mathcal{F}$ (ОНБ $\mathcal{F}$ получается из ОНБ $\mathcal{E}$ действием унитарного преобразования U), что $B \in K(\mathcal{F})$ и $\lambda_\mathcal{F}(B) = \lambda_\mathcal{E}(A)$. Поскольку меры измеримых брусов сохраняются при параллельных переносах и унитарных преобразованиях, то сохраняются и меры измеримых относительно ОНБ множеств: если $A \in K(\mathcal{E})$ для некоторого ОНБ $\mathcal{E}$, $\mathcal{F} = U(\mathcal{E})$ и $B = P \circ U(A)$, то $B \in K(\mathcal{F})$ и $\lambda_\mathcal{F}(B) = \lambda_\mathcal{E}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Исследуем $\lambda_\mathcal{E}$ -измеримость множеств из кольца $\mathcal{K}_\mathcal{F}$ для различных ОНБ $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$. Пусть $e_k = \sum_{j=1}^\infty c_{kj} f_j$ при всех $k \in \mathbb{N}$ (заметим, что при этом при любом $k \in \mathbb{N}$ выполняется условие $\|c_{k\cdot}\|_{l_2}^2 = \sum_{j=1}^\infty |c_{kj}|^2 = 1$). Предположим, что брус $\Pi \in K_3(\mathcal{F})$, длины ребер которого образуют последовательность $\{d_j\}$, вписан в некоторое конечное объединение G измеримых кубов $K_i \in K_3(\mathcal{E})$. Тогда проекция множества G на любую ось e_k ограничена, а брус Π содержит в себе отрезок $D_N = \sum_{j=1}^N d_j f_j$, длина проекции отрезка D_N на ось e_k равна $|(D_N, e_k)| = |\sum_{j=1}^N c_{kj} d_j|$. Поэтому справедлива оценка

$$|(D_N, e_k)| \leq \left(\sum_{j=1}^N (c_{kj})^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^N (d_j)^2 \right)^{1/2}, \quad |(D_N, e_k)| \leq \sum_{j=1}^N |c_{kj}| \sup_{j=1}^N |d_j|.$$

Следовательно, если $\sup_k \|\{c_{k\cdot}\}\|_{l_1} < \infty$, то проекции бруса Π на оси e_k ограничены в совокупности и брус может быть $\lambda_\mathcal{E}$ -измерим. В частности, так и будет, если существует такое n_0 , что $e_k = f_k$ при всех $k > n_0$, а при всех $k \leq n_0$ векторы e_k являются линейными комбинациями конечной системы $\{f_j\}$.

Напротив, можно привести достаточные условия $\lambda_\mathcal{E}$ -неизмеримости бруса Π положительной $\lambda_\mathcal{F}$ -меры: если существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $c_{kj} \geq 0$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\{c_{k\cdot}\} \notin l_1$, то последовательность проекций диагоналей бруса D_N , $N \in \mathbb{N}$, положительной меры на ось e_k неограничена, и, следовательно, брус Π не может быть вписан в конечное объединение G измеримых кубов $K_i \in K_3(\mathcal{E})$. Поэтому при выполнении условия существования $k \in \mathbb{N}$ такого, что $c_{kj} \geq 0$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\{c_{k\cdot}\} \notin l_1$, любой брус $\Pi \in K_3(\mathcal{F})$ с конечной положительной $\lambda_\mathcal{F}$ -мерой имеет бесконечную внешнюю $\lambda_\mathcal{E}$ -меру (можно показать, что при этом его внутренняя $\lambda_\mathcal{E}$ -мера равна нулю).

Пусть $\mathcal{S}$ – множество различных ОНБ в пространстве H , тогда $\{K(\mathcal{E}), \mathcal{E} \in \mathcal{S}\}$ – семейство колец подмножеств пространства H . Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех подмножеств пространства H , входящих хотя бы в одно из колец этого семейства. Множество $\mathcal{M}$ не является, вообще говоря, ни кольцом, ни полукольцом.

Определим функцию $\lambda: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$, заданную равенством $\lambda(A) = \lambda_{\mathcal{E}}(A)$, если $A \in K(\mathcal{E})$. Функция λ определена корректно, так как если $A \in K(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{F})$, то $\lambda_{\mathcal{E}}(A) = \lambda_{\mathcal{F}}(A)$.

В силу замечания 5 функция λ обладает следующим свойством: если множества $A, B \in \mathcal{M}$ конгруэнтны, то $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Рассмотрим теперь минимальное кольцо $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$, содержащее систему множеств $\mathcal{M}$, и поставим задачу о продолжении функции λ с множества $\mathcal{M}$ на кольцо $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$. Эта задача будет решена в разделе 6. Сначала мы исследуем некоторые линейные операторы в пространствах $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, а затем вместе с расширениями пространств $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ будем определять и продолжения линейных операторов на эти расширения пространств $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

4. ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$

Пусть $\mathcal{E}$ – некоторый ОНБ в пространстве H , а для каждого вектора $x \in H$ последовательность $\{x_j\}$ – последовательность координат вектора x в базисе $\mathcal{E}$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{D}_{\mathcal{E},j}$ плотное в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ линейное пространство, состоящее из таких функций из пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, для которых справедливо представление $u(x) = u_j(x_j)v(\hat{x})$, где $x = x_j \times \hat{x}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $x \in H$, и выполняется условие $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тогда на линейном пространстве $\mathcal{D}_{\mathcal{E},j}$ при каждом $j \in \mathbb{N}$ определен линейный оператор $\partial_j: \mathcal{D}_{\mathcal{E},j} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{E},j}$, сопоставляющий функции $u \in \mathcal{D}_{\mathcal{E},j}$ функцию $\partial u / \partial x_j \in \mathcal{D}_{\mathcal{E},j}$ (точнее, классу функций, содержащих в качестве представителя функцию u , класс функций, содержащих в качестве представителя функцию $\partial u / \partial x_j$).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. При каждом $j \in \mathbb{N}$ оператор $i\partial_j$ является симметрическим плотно определенным оператором в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, замыкание которого является самосопряженным оператором.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. При каждом $j \in \mathbb{N}$ заданный на линейном пространстве $\mathcal{D}_{\mathcal{E},j}$ линейный оператор $\hat{x}_j$ умножения на функцию $\varphi(x) = x_j$ является симметрическим плотно определенным оператором в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, замыкание которого является самосопряженным оператором.

Определим на пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ операторы $\mathbf{S}_h$ сдвига на вектор $h \in H$, действующие по правилу $\mathbf{S}_h u(x) = u(x + h)$. По определению пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ оператор сдвига $\mathbf{S}_h$ при любом выборе вектора $h \in H$ определен на всем пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ и является унитарным оператором в $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

Для каждого вектора $h \in H$ определим на пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ однопараметрическое семейство операторов $\mathbf{S}_{th}$, $t \in \mathbb{R}$, сдвига на вектор $th \in H$, действующих по правилу

$$\mathbf{S}_{th} u(x) = u(x + th). \quad (11)$$

Такое семейство операторов является однопараметрической группой унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

ЛЕММА 7. *Однопараметрические группы унитарных операторов $\mathbf{S}_{te_j}$, $t \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, являются сильно непрерывными в подпространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. Причем для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любых $t \in (-\delta, \delta)$ и любых $j \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\|\mathbf{S}_{te_j} u - u\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} < \epsilon. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция u_Π является индикатором измеримого бруса Π относительно базиса $\mathcal{E}$, а вектор $h = e_j$, то операторы $\mathbf{S}_{th}$, $t \in \mathbb{R}$, действуют как операторы сдвига вдоль j -го ребра бруса. Если мера бруса Π равна нулю, то $\|\mathbf{S}_{th}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = 0$ при всех $t > 0$, а если $\lambda_\mathcal{E}(\Pi) > 0$, то длина j -го ребра бруса $b_j - a_j > 0$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любых $t \in (-\delta, \delta)$ выполняется неравенство $\|\mathbf{S}_{te_j}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} < \varepsilon$, поскольку

$$\|\mathbf{S}_{te_j}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}^2 \leq \frac{2t}{b_j - a_j} \|u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}^2.$$

Более того, из условия $0 < \lambda_\mathcal{E}(\Pi) < +\infty$ следует стремление к нулю величины $\ln(b_j - a_j)$ при $j \rightarrow \infty$, тогда существует $\sigma > 0$ такое, что $b_j - a_j > \sigma$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любых $t \in (-\delta, \delta)$ и любых $j \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{S}_{te_j}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} < \sqrt{\frac{2t}{\sigma}} \|u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}. \quad (13)$$

Поскольку любой элемент $u \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$ может быть с любой точностью приближен в $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ -норме линейной комбинацией индикаторов измеримых брусов, то в неравенстве (12) можно заменить функцию u_Π на произвольную функцию $u \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$. Следовательно, справедливо утверждение (12).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Для произвольного $h \in E$, $\|h\|_E = 1$, унитарная группа $\mathbf{S}_{th}$, $t \in \mathbb{R}$, может не являться сильно непрерывной в $\mathcal{H}_\mathcal{E}$.

Действительно, пусть вектор $h \in H$ имеет в ОНБ $\mathcal{E}$ координаты $h_k = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\Pi \in K_1(\mathcal{E})$ – непустой брус, все ребра которого имеют длину 1, а u_Π – индикаторная функция бруса Π . Тогда

$$\|\mathbf{S}_{th}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}^2 = 2\lambda_\mathcal{E}(\mathbf{S}_{th}\Pi \setminus \Pi) = 2(1 - \lambda_\mathcal{E}(\mathbf{S}_{th}\Pi \cap \Pi)) = 2\left(1 - \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{t}{k}\right)\right]\right).$$

Поскольку сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - t/k)$ равна $-\infty$ при любом $t > 0$, то $\|\mathbf{S}_{th}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \geq 1$ при всех $t > 0$. Таким образом, $\lim_{t \rightarrow +0} \mathbf{S}_{th}u_\Pi \neq u_\Pi$ и группа унитарных преобразований $\mathbf{S}_{th}$, $t \in \mathbb{R}$, пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ не является непрерывной в сильной операторной топологии.

По выбранному в пространстве H ОНБ $\mathcal{E}$ определим линейное подпространство $L_1(H, \mathcal{E})$ пространства H , состоящее из таких элементов $h \in H$, что $\{h_k\} \in l_1$, где $h_k = (h, e_k)$. Пространство $L_1(H, \mathcal{E})$ изоморфно банахову пространству l_1 .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $h \in L_1(H, \mathcal{E})$, то унитарная группа $\mathbf{S}_{th}$, $t \in \mathbb{R}$, является сильно непрерывной в $\mathcal{H}$.

Действительно, в силу неравенств (13) для любого измеримого бруса $\Pi \in K_1(\mathcal{E})$ существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|\mathbf{S}_{th}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} < C(t\|\{h_k\}\|_{L_1})^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}.$$

Итак, при любом выборе единичного вектора $l \in L_1(H, \mathcal{E})$ однопараметрическая группа унитарных операторов $\mathbf{S}_{tl}$, $t \in \mathbb{R}$, является сильно непрерывной на индикаторах измеримых брусов, а поскольку любой элемент $u \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$ может быть с любой

точностью приближен в $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ -норме линейной комбинацией индикаторов измеримых брусов, то, следовательно, группа унитарных операторов $\mathbf{S}_{tl}$, $t \in \mathbb{R}$, является непрерывной в сильной операторной топологии пространства $B(\mathcal{H}_\mathcal{E})$.

У каждой сильно непрерывной группы унитарных операторов в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ должен быть самосопряженный в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ генератор. Если $h = e_j$, то генератором группы $\mathbf{S}_{th}$, $t \in \mathbb{R}$, унитарных операторов является оператор id_j .

5. СЛУЧАЙНЫЕ СДВИГИ В ПРОСТРАНСТВЕ H И ОПЕРАТОРЫ ЛАПЛАСА В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{H}_\mathcal{E}$

Пусть H – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, $\mathbf{D}$ – ядерный положительный самосопряженный оператор с ОНБ из собственных векторов $\mathcal{E}$. Пусть $\lambda_\mathcal{E}$ – неотрицательная локально-конечная конечно-аддитивная мера на кольце $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ подмножеств пространства H . Мера $\lambda_\mathcal{E}$ является инвариантной относительно сдвигов в пространстве H , хотя и не является счетно-аддитивной.

Пусть $\mathcal{H}_\mathcal{E} = L_2(H, \mathcal{K}(\mathcal{E}), \lambda_\mathcal{E})$ и для каждого вектора $h \in H$ определено преобразование сдвига $\mathbf{U}_{\mathcal{E},h}$ пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, действующее на произвольный элемент $u \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$ по формуле

$$\mathbf{U}_{\mathcal{E},h}u(x) = u(x + h).$$

Пусть ν_t , $t \geq 0$, – однопараметрическое семейство гауссовских мер на пространстве H таких, что при каждом $t \geq 0$ мера ν_t имеет преобразование Фурье $\tilde{\nu}_t(\xi) = e^{-t\mathbf{D}\xi^2/2}$, т. е. ν_t – гауссовская мера на пространстве H с нулевым математическим ожиданием и ковариационным оператором $t\mathbf{D}$ (ядерность ковариационного оператора меры эквивалентна существованию у меры конечного второго момента, см. теорему 2.1 в [7]). Однопараметрическое семейство гауссовских мер ν_t , $t \geq 0$, на пространстве H образует полугруппу относительно операции свертки: $\nu_t * \nu_s = \nu_{t+s}$ $\forall t, s \in \mathbb{R}_+$ (см. [9]).

По введенному однопараметрическому семейству гауссовских мер ν_t , $t \geq 0$, определим однопараметрическое семейство $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$, $t \geq 0$, преобразований пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ как результат усреднения случайного преобразования сдвига $\mathbf{U}_{\mathcal{E},h}$, распределение случайного параметра $h \in H$ которого в каждый момент времени $t \geq 0$ задается мерой ν_t на пространстве H . Тогда в каждый момент времени $t \geq 0$ образ $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u$ элемента $u \in H$ определяется равенством

$$\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u(x) = \int_H u(x + h) d\nu_t(h).$$

При каждом значении $t \geq 0$ вектор $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u$ определяется как интеграл Петтиса:

$$(\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u, v)_\mathcal{H} = \int_H (\mathbf{U}_{\mathcal{E},h}u, v)_\mathcal{H} d\nu_t(h) \quad \forall v \in \mathcal{H}_\mathcal{E}. \quad (14)$$

Рассмотрим сначала действие оператора $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$ на индикаторную функцию u измеримого бруса Π и рассмотрим скалярное произведение (14) в предположении, что элемент v является индикаторной функцией u измеримого бруса Π' . При каждом $h \in H$ элемент $\mathbf{U}_{\mathcal{E},h}u \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$, а числовая функция $\varphi(h) = (\mathbf{U}_{\mathcal{E},h}u, v)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}$, $h \in H$, ограничена условием $|\varphi(h)| \leq \|u\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}\|v\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}$ и ν_t -измерима. Действительно, поскольку $\mathbf{U}_{\mathcal{E},h}u$ и v – индикаторные функции брусов из класса $K_1(\mathcal{E})$, то функция φ является

произведением счетного множества цилиндрических функций вида $\phi_j(h)$, зависящих только от величины $h_j = (h, e_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Цилиндрические множества являются ν_t -измеримыми, поэтому ν_t -измерима и функция ϕ (см. [4], теорема 2.1.5). Следовательно, ограниченная измеримая функция $\phi(h)$, $h \in H$, интегрируема по мере ν_t с вариацией, равной единице.

Любой элемент $\mathcal{H}_\varepsilon$ может быть аппроксимирован линейной комбинацией индикаторов измеримых брусов. Поэтому правая часть выражения (14) определена при всех $u, v \in \mathcal{H}_\varepsilon$ и в силу неравенства

$$\int_H (\mathbf{U}_{\varepsilon, h} u, v)_{\mathcal{H}_\varepsilon} d\nu_t(h) \leq \|v\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \|\mathbf{U}_{\varepsilon, h} u\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \|\nu_t\|_{\text{var}} = \|u\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \|v\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}$$

является полуторалинейной непрерывной формой на пространстве $\mathcal{H}_\varepsilon$. Следовательно, при любом $t \geq 0$ определен оператор $\mathcal{U}_{\nu, \varepsilon}(t) \in B(\mathcal{H}_\varepsilon)$, норма которого не превосходит единицы.

ЛЕММА 8. *Однопараметрическое семейство операторов $\mathcal{U}_{\nu, \varepsilon}(t)$, $t \geq 0$, является полугруппой сжимающих операторов: $\mathcal{U}_{\nu, \varepsilon}(t)\mathcal{U}_{\nu, \varepsilon}(s) = \mathcal{U}_{\nu, \varepsilon}(t+s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, рассмотрим выражение (14) при $t = s + r$. Поскольку мера $\nu_t * \nu_s$ является образом меры $\nu_t \otimes \nu_s$ на $H \times H$ при отображении $\phi: H \times H \rightarrow H$, действующем по правилу $\phi(x, y) = x + y$, то для всякой функции $f: H \rightarrow \mathbb{C}$, измеримой относительно алгебры борелевских подмножеств на H , справедливо равенство

$$\int_H f(x) d\nu_t * \nu_s(x) = \int_{H \times H} f(x+y) d(\nu_t \otimes \nu_s)(x, y).$$

Следовательно,

$$(\mathcal{U}_{\nu, \varepsilon}(s+r)u, v)_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \int_H (\mathbf{U}_{\varepsilon, h} u, v)_{\mathcal{H}_\varepsilon} d\nu_{s+r}(h).$$

Фиксировав векторы $u, v \in \mathcal{H}$, определим функцию $f_{u, v}(h) = (\mathbf{U}_{\varepsilon, h} u, v)_{\mathcal{H}_\varepsilon}$, $h \in H$. Функция $f_{u, v}$ измерима и ограничена на H . Тогда

$$(\mathcal{U}_{\nu, \varepsilon}(s+r)u, v)_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \int_H f_{u, v}(h) d\nu_{s+r}(h).$$

В силу полугруппового свойства семейства мер ν_t , $t \geq 0$, справедливо равенство $\nu_{s+r} = \nu_s * \nu_r$, поэтому

$$\int_H f_{u, v}(h) d\nu_{s+r}(h) = \int_{H \times H} f_{u, v}(x+y) d(\nu_s \otimes \nu_r)(x, y).$$

Поскольку функция $f_{u, v}$ измерима на H и ограничена, то функция $f_{u, v}(x+y)$, $(x, y) \in H \times H$ измерима на $H \times H$ (и, следовательно, измерима) и ограничена. Поэтому в силу теоремы Фубини

$$\begin{aligned} \int_{H \times H} f_{u, v}(x+y) d(\nu_s \otimes \nu_r)(x, y) &= \int_H \left[\int_H f_{u, v}(x+y) d\nu_s(x) \right] d\nu_r(y) = \\ &= \int_H \left[\int_H f_{u, v}(x+y) d\nu_r(y) \right] d\nu_s(x). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(s)\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(r)u, v)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} &= \int_H (\mathbf{U}_{\mathcal{E},h}\mathcal{U}(r)u, v)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} d\nu_s(h) = \\
 &= \int_H (\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(r)(\mathbf{U}_{\mathcal{E},h}u), v)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} d\nu_s(h) = \\
 &= \int_H \left[\int_H (\mathbf{U}_{\mathcal{E},\sigma}(\mathbf{U}_{\mathcal{E},h}u), v)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} d\nu_r(\sigma) \right] d\nu_s(h) = \\
 &= \int_H \left[\int_H (\mathbf{U}_{\mathcal{E},h+\sigma}u, v)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} d\nu_r(\sigma) \right] d\nu_s(h) = \\
 &= \int_H \left[\int_H f_{u,v}(h+\sigma) d\nu_r(\sigma) \right] d\nu_s(h).
 \end{aligned}$$

Поэтому $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(s)\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(r) = \mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(s+r)$ для всех $r, s \geq 0$ и лемма доказана.

Как следует из замечания 9, однопараметрическая полугруппа $\mathcal{U}_{\mathcal{E},th}$, $t \geq 0$, может не быть непрерывной в сильной операторной топологии пространства $B(\mathcal{H})$. Приведем достаточные условия сильной непрерывности этой полугруппы, явившейся результатом усреднения случайных блужданий $\mathbf{U}_h$ по зависящей от параметра $t \geq 0$ мере ν_t .

Пусть $\mathbf{D}$ – неотрицательный невырожденный ядерный оператор с ортонормированным базисом собственных векторов $\mathcal{E}$. Превратим область определения оператора $\mathbf{D}^{-1}$ в гильбертово пространство H , снабженное нормой $\|u\|_H = \|\mathbf{D}^{-1}u\|_{\mathcal{H}}$, $u \in H$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Если $h \in H$, где $\mathbf{D}$ – неотрицательный невырожденный ядерный оператор с ОНБ собственных векторов $\mathcal{E}$, то $h \in L_1(H, \mathcal{E})$. Действительно, для последовательности $\{h_k\}$ координат вектора h в базисе $\mathcal{E}$ справедлива оценка

$$\|h\|_{L_1(H, \mathcal{E})} = \sum_{k=1}^{\infty} |h_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{h_k}{d_k} \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \right)^{1/2} \leq \|h\|_H [\|\mathbf{D}\|_{B(H)} \operatorname{Tr}(\mathbf{D})]^{1/2}.$$

С помощью растяжения переменной интегрирования устанавливается следующее утверждение.

ЛЕММА 9. Для любого $t > 0$ и любого измеримого бруса Π однопараметрическое семейство гауссовых мер ν_t , $t > 0$, удовлетворяет равенству

$$\int_H u_{\Pi}(x+h) d\nu_t(h) = \int_H u_{\Pi}(x+\sqrt{t}h) d\nu_1(h).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbf{D}$ – ядерный оператор в пространстве H с ОНБ собственных векторов $\mathcal{E}$, который невырожден и таков, что $\mathbf{D}^{1/4}$ является ядерным. Пусть $\nu_{t\mathbf{D}}$, $t \geq 0$, – полугруппа (относительно операции свертки) гауссовских мер на гильбертовом пространстве H с ковариационным оператором $\mathbf{D}$. Пусть $\nu_{t\mathbf{D}}$, $t \geq 0$ – полугруппа (относительно операции свертки) гауссовских мер на гильбертовом пространстве H с ковариационным оператором $t\mathbf{D}$. Тогда однопараметрическое семейство преобразований пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, определяемое равенством (14), является сильно непрерывной полугруппой сжимающих самосопряженных преобразований пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

Согласно лемме 8 что однопараметрическое семейство $\mathcal{U}_{\nu,\varepsilon}$ преобразований пространства $\mathcal{H}_\varepsilon$ является полугруппой сжимающих линейных преобразований пространства $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Для доказательства сильной непрерывности полугруппы $\mathcal{U}_{\nu,\varepsilon}$ достаточно показать, что для любого измеримого бруса Π выполняется условие $\lim_{t \rightarrow +0} \|\mathcal{U}_{\nu,\varepsilon}(t)u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = 0$. Но в силу леммы 9

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_{\nu,\varepsilon}(t)u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} &= \left\| \int_H (\mathbf{U}_{\varepsilon,h}u_\Pi - u_\Pi) d\nu_t\mathbf{D}(h) \right\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leq \\ &\leq \int_H \|\mathbf{U}_{\varepsilon,h}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} d\nu_t\mathbf{D}(h) = \\ &= \int_H \|\mathbf{U}_{\varepsilon,\sqrt{t}h}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} d\nu_{\mathbf{D}}(h). \end{aligned}$$

Фиксируем некоторое число $\sigma > 0$. Для гауссовой меры $\nu_{\mathbf{D}}$ существует число R_1 такое, что

$$\nu_{\mathbf{D}}(B_{R_1}) \geq 1 - \frac{\sigma}{2}, \quad (15)$$

где

$$B_{R_1} = \{h \in H : |(e_j, h)| < R_1(d_j)^{1/4} \forall j \in \mathbb{N}\}.$$

Как установлено в лемме 7 и следствии 2, для произвольного измеримого бруса $\Pi \in K_1(\mathcal{E})$ существует константа $C > 0$ такая, что для любого вектора $h \in H$ такого, что $\sum_{j=1}^{\infty} |(e_j, h)| < \infty$, выполняется неравенство

$$\|\mathbf{S}_{\varepsilon,th}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} < C \left(t \sum_{j=1}^{\infty} |(e_j, h)| \right)^{1/2} \|u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}.$$

Для любого вектора $h \in B_{R_1}$ справедливо неравенство $\sum_{j=1}^{\infty} |(e_j, h)| \leq R_1 \text{Tr}(\mathbf{D}^{1/4})$. Следовательно, для любого $\Pi \in K_1(\mathcal{E})$ существуют число $\delta > 0$ такое, что для любых $t \in (-\delta, \delta)$ и любых $l \in H$ таких, что $l \in B_{R_1}$, выполняется неравенство

$$\|\mathbf{S}_{tl}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} < \frac{\sigma}{2}. \quad (16)$$

Следовательно, в силу (15) и (16) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_{\nu,\varepsilon}(t)u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} &\leq \int_{B_{R_1}} \|\mathbf{U}_{\varepsilon,\sqrt{t}h}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} d\nu_{\mathbf{D}}(h) + \\ &+ \int_{H \setminus B_{R_1}} \|\mathbf{U}_{\varepsilon,\sqrt{t}h}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} d\nu_{\mathbf{D}}(h) \leq C\sigma. \end{aligned}$$

Поскольку любой элемент $u \in \mathcal{H}_\varepsilon$ может быть с любой точностью приближен в $\mathcal{H}_\varepsilon$ -норме линейной комбинацией индикаторов измеримых брусков, то, следовательно, однопараметрическая полугруппа сжимающих операторов $\mathcal{U}_{\nu,\varepsilon}(t)$, $t \in [0, +\infty)$,

является непрерывной в сильной операторной топологии пространства $B(\mathcal{H}_\mathcal{E})$. Поскольку операторы сопряженной полугруппы действуют по правилу (см. (14))

$$\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}^*(t)u = \int_H \mathbf{U}_{\mathcal{E},-h} u \, d\nu_t \mathbf{D}(h),$$

то в силу инвариантности гауссовских мер ν_t относительно центральной симметрии в пространстве H операторы $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$, $t \geq 0$, являются сжимающими симметрическими операторами в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ и, следовательно, самосопряженными. Теорема 2 доказана.

ЛЕММА 10. *Сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ сжимающих операторов в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ обладает плотно определенным замкнутым диссипативным самосопряженным генератором $\Delta_{\nu,\mathcal{E}}$.*

Самосопряженность генератора $\Delta_{\nu,\mathcal{E}}$ полугруппы $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$, $t \geq 0$, в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ следует из самосопряженности операторов сжимающей сильно непрерывной полугруппы.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Если $\mathbf{D}$ – оператор конечного ранга $m \in \mathbb{N}$, то $\mathbf{U}_\mathbf{D}$ унитарно эквивалентна полугруппе, разрешающей уравнение диффузии в конечномерном пространстве размерности m .

6. ЛИНЕЙНЫЕ ОБОЛОЧКИ ПРОСТРАНСТВ $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ И ПРОДОЛЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПОЛУГРУПП $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$

Однопараметрическая полугруппа (относительно операции свертки мер) гауссовских мер ν_t , $t \geq 0$, единым образом определяет (в силу леммы 8) однопараметрические полугруппы $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ сжимающих преобразований в пространствах $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ для всех ОНБ $\mathcal{E}$.

Поставим задачу продолжить семейство однопараметрических полугрупп $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ сжимающих преобразований пространств $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, определенных для всех ОНБ $\mathcal{E}$, до некоторой однопараметрической полугруппы $\mathcal{U}_\nu$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, содержащем все пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ как подпространства, так, чтобы $\mathcal{U}_\nu|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = \mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ при произвольном выборе базиса $\mathcal{E}$.

Пусть $\mathcal{S}$ – множество всех ОНБ в пространстве H . Пусть выбрана некоторая гауссовская мера ν_1 на пространстве H и по ней построены однопараметрическое семейство мер ν_t , $t \geq 0$, и полугруппы $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$.

6.1. Продолжение на сумму двух пространств. Поставим следующую задачу:

1) продолжить полуторалинейную форму скалярного произведения, заданного на пространствах $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}_\mathcal{F}$, на более широкое пространство, являющееся линейной оболочкой пространств $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}_\mathcal{F}$;

2) распространить операторы сжимающих полугрупп $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ и $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{F}}$ в пространствах $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}_\mathcal{F}$ соответственно до полугруппы $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}\mathcal{F}}$ сжимающих преобразований в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$, являющемся линейной оболочкой пространств $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}_\mathcal{F}$.

Рассмотрим линейное пространство $L = \text{lin}(\mathcal{H}_\mathcal{E}, \mathcal{H}_\mathcal{F})$ и гильбертово пространство $L_0 = \mathcal{H}_\mathcal{E} \cap \mathcal{H}_\mathcal{F}$. Пересечением двух колец $\mathcal{K}_\mathcal{E}$ и $\mathcal{K}_\mathcal{F}$ является кольцо $\mathcal{K}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$. Индикаторная функция χ_B множества $B \subset H$ лежит в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E} \cap \mathcal{H}_\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $B \in \mathcal{K}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$. Тогда $L_0 = L_2(H, \mathcal{K}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}, \lambda_\mathcal{E}) = L_2(H, \mathcal{K}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}, \lambda_\mathcal{F})$, поскольку $\lambda_\mathcal{E}(A) = \lambda_\mathcal{F}(A)$ для любого $A \in \mathcal{K}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$ (см. замечание 5). При этом если $f \in L_0$, то $\|f\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = \|f\|_{\mathcal{H}_\mathcal{F}}$.

Определим также следующие гильбертовы пространства: $L_\mathcal{E}$ как ортогональное дополнение пространства L_0 до пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ и $L_\mathcal{F}$ как ортогональное дополнение пространства L_0 до пространства $\mathcal{H}_\mathcal{F}$. Определим гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$ как прямую сумму трех гильбертовых пространств:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = L_\mathcal{E} \oplus L_0 \oplus L_\mathcal{F}. \quad (17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12. В замечании 6 приведены условия на базисы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, достаточные для того, чтобы выполнялись следующие утверждения:

- 1) $\mathcal{K}_\mathcal{E} = \mathcal{K}_\mathcal{F}$ и $L_0 = L_\mathcal{E} = L_\mathcal{F} = \mathcal{H}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$ при условии, что существует такое n_0 , что $e_k = f_k$ при всех $k > n_0$, а при всех $k \leq n_0$ векторы e_k являются линейными комбинациями конечной системы $\{f_j; j \in \overline{1, n_0}\}$;
- 2) $\mathcal{K}_\mathcal{E} \cap \mathcal{K}_\mathcal{F}$ не содержит множеств положительной $\lambda_\mathcal{E}$ -меры и $L_0 = \{0\}$; $\mathcal{H}_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = L_\mathcal{E} \oplus L_\mathcal{F}$ при условии, что существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $c_{kj} \geq 0$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\{c_k\} \notin l_1$.

Продолжение скалярного произведения с пространств $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}_\mathcal{F}$ на пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$ в соответствии с равенством (17) определяет продолжение меры $\lambda_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$ на минимальное кольцо $\mathcal{K}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$, содержащее кольца $\mathcal{K}_\mathcal{E}$ и $\mathcal{K}_\mathcal{F}$. Для множеств $A \in \mathcal{K}_\mathcal{E}$ и $B \in \mathcal{K}_\mathcal{F}$ скалярное произведение их индикаторных функций $(\chi_A, \chi_B)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}$ задает меру $\lambda_{\mathcal{E}\mathcal{F}}(A \cap B)$ множества $A \cap B$, а в силу условия аддитивности меры задает и значение меры $\lambda_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$ на дополнениях $A \setminus B$ и $B \setminus A$. В частности, если пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}_\mathcal{F}$ ортогональны, то для продолжения $\lambda_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$ справедливы равенства $\lambda_{\mathcal{E}\mathcal{F}}(A \cap B) = 0$, $\lambda_{\mathcal{E}\mathcal{F}}(A \setminus B) = \lambda_\mathcal{E}(A)$.

Получающееся продолжение меры $\lambda_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$ инвариантно относительно сдвигов. Ибо если множества $A, B \in \mathcal{K}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$ связаны между собой преобразованием сдвига в H , то существуют множества $A'_k \in \mathcal{K}_\mathcal{E}$, $A''_k \in \mathcal{K}_\mathcal{F}$, $B'_k \in \mathcal{K}_\mathcal{E}$, $B''_k \in \mathcal{K}_\mathcal{F}$, связанные между собой попарно тем же преобразованием сдвига, такие, что множество A может быть получено конечным числом теоретико-множественных операций над множествами A'_k, A''_k , а множество B — с помощью такого же набора операций над множествами B'_k, B''_k .

Определим продолжение полугрупп $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}$ и $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{F}}$ с пространств $\mathcal{H}_\mathcal{E}, \mathcal{H}_\mathcal{F}$ до полугруппы $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}\mathcal{F}}$ в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$.

ЛЕММА 11. Подпространство L_0 инвариантно относительно преобразований $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}(t)$ и $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{F}}(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in L_0$. Поскольку при любом $t > 0$ преобразования $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}(t)$, $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{F}}(t)$ являются ограниченными линейными преобразованиями пространств $\mathcal{H}_\mathcal{E}, \mathcal{H}_\mathcal{F}$ соответственно, то $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}(t)u \in L_\mathcal{E}$, $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{F}}(t)u \in L_\mathcal{F}$.

Докажем, что $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}(t)u \in L_0$ при условии, что $u \in L_0$. Поскольку свойство функции (точнее, класса эквивалентности функций) $u: H \rightarrow C$ принадлежать пространству $L_\mathcal{E}$ (или $L_\mathcal{F}$) инвариантно относительно сдвига аргумента, то для любого $t > 0$

и любого $h \in H$ функция $\mathbf{S}_{\sqrt{t}h}u$ принадлежит как $L_{\mathcal{F}}$, так и $L_{\mathcal{E}}$, т. е. для любого $t > 0$ и любого $h \in H$ выполнено включение $\mathbf{S}_{\sqrt{t}h}u \in L_0$. А так как

$$\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}(t)u = \int_H \mathbf{S}_{\sqrt{t}h}u \, d\nu_1(h),$$

то функция $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}(t)u$ принадлежит $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ -замыканию линейной оболочки векторов $\mathbf{S}_{\sqrt{t}h}u$, $h \in H$, из пространства L_0 – замкнутого подпространства в пространстве $L_{\mathcal{E}}$. Следовательно, $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}(t)u \in L_0$. Аналогично доказывается, что и $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{F}}(t)u \in L_0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 12. *Для любых $u \in L_0$ и $t \geq 0$ справедливо равенство $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}(t)u = \mathcal{U}_{\nu, \mathcal{F}}(t)u$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразования $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}(t)$ и $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{F}}(t)$ определены равенствами (14) для элементов $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ и $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ соответственно. Если $u \in L_0 = \mathcal{H}_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{H}_{\mathcal{F}} = L_2(H, \mathcal{K}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}, \lambda_{\mathcal{E} \cap \mathcal{F}})$, где $\lambda_{\mathcal{E} \cap \mathcal{F}} = \lambda_{\mathcal{E}}|_{\mathcal{K}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}} = \lambda_{\mathcal{F}}|_{\mathcal{K}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}$, то согласно равенству (14)

$$\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}(t)u = \int_H \mathbf{S}_h u \, d\nu_t(h) = \mathcal{U}_{\nu, \mathcal{F}}(t)u,$$

что и доказывает лемму.

Обозначим через $\mathcal{U}_0$ сужение полугруппы $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}$ на подпространство L_0 , совпадающее в силу лемм 11 и 12 с сужением полугруппы $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{F}}$ на подпространство L_0 . Поскольку при каждом $t \geq 0$ оператор $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}(t)$ ($\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{F}}(t)$) является сжимающим преобразованием пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ ($\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$), то в силу леммы 11 справедливо

СЛЕДСТВИЕ 3. *При каждом $t \geq 0$ подпространство $L_{\mathcal{E}}$ ($L_{\mathcal{F}}$) является инвариантным подпространством преобразования $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}(t)$ ($\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{F}}(t)$).*

Пусть $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, $v \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ и $t > 0$. Тогда положим

$$\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}\mathcal{F}}(t)(u + v) = \mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}(t)(u) + \mathcal{U}_{\nu, \mathcal{F}}(t)(v). \quad (18)$$

Равенство (18) однозначно определяет динамику в линейной оболочке, ибо вектор u допускает единственное разложение $u_{\mathcal{E}} \oplus u_0$, а вектор v – единственное разложение $v_{\mathcal{F}} \oplus v_0$. Поэтому $u + v = u_{\mathcal{E}} \oplus (u_0 + v_0) \oplus v_{\mathcal{F}}$ и, следовательно,

$$\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}\mathcal{F}}(t)(u + v) = \mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}(t)(u_{\mathcal{E}}) \oplus \mathcal{U}_0(t)(u_0 + v_0) \oplus \mathcal{U}_{\nu, \mathcal{F}}(t)(v_{\mathcal{F}}),$$

причем в силу леммы 11 и следствия 3 каждое из трех подпространств в разложении (17) инвариантно относительно преобразования $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}\mathcal{F}}(t)$.

Заметим, что при этом $\mathcal{H}_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \mathcal{H}_{\mathcal{F}\mathcal{E}}$ и $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}\mathcal{F}}(t) = \mathcal{U}_{\nu, \mathcal{F}\mathcal{E}}(t)$ при всех $t \geq 0$.

6.2. Продолжение на сумму любой конечной совокупности пространств.

Определим по индукции продолжение на линейную оболочку любой конечной системы пространств $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_1}, \dots, \mathcal{H}_{\mathcal{E}_m}$ скалярного произведения, инвариантного относительно сдвигов и унитарного преобразования.

Пусть для некоторого набора $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m$, состоящего из $m \geq 2$ ОНБ пространства H , определено пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m}$ – линейная оболочка линейных пространств $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_1}, \dots, \mathcal{H}_{\mathcal{E}_m}$. Предположим, что выполнены следующие условия.

A1. Скалярное произведение на элементах линейной оболочки $\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$ является продолжением скалярных произведений в пространствах $\mathcal{H}_{\varepsilon_1}, \dots, \mathcal{H}_{\varepsilon_m}$, причем таким, что скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$ не зависит от порядка пространств, входящих в линейную оболочку: $\mathcal{H}_{\varepsilon_{\sigma(1)}, \dots, \varepsilon_{\sigma(m)}} = \mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$ для произвольной перестановки σ множества $\{1, \dots, m\}$.

A2. Мера $\lambda_{\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}}$ на множествах $A \subset H$, индикаторные функции χ_A которых входят в пространство $\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$, порожденная скалярным произведением в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$ посредством равенства

$$\lambda_{\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}}(A) = (\chi_A, \chi_A)_{\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}},$$

инвариантна относительно сдвигов в пространстве H .

A3. В пространстве $\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$ определено сжимающее преобразование $U_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$, являющееся продолжением сжимающих преобразований в пространствах $\mathcal{H}_{\varepsilon_1}, \dots, \mathcal{H}_{\varepsilon_m}$, относительно которого эти пространства являются инвариантными подпространствами пространства $\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$.

Тогда если $\mathcal{E}_{m+1}$ – некоторый ОНБ пространства H , то можно определить подпространство $L_0 = \mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m} \cap \mathcal{H}_{\varepsilon_{m+1}}$, подпространство L_{m+1} (как ортогональное дополнение пространства L_0 до пространства $\mathcal{H}_{\varepsilon_{m+1}}$) и подпространство L_m (как ортогональное дополнение пространства L_0 до пространства $\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$).

Определим пространство $\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}}$ как прямую сумму трех гильбертовых пространств:

$$\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}} = L_0 \oplus L_m \oplus L_{m+1}. \quad (19)$$

При этом согласно построению пространства $\mathcal{H}_{\varepsilon_{\sigma(1)}, \dots, \varepsilon_{\sigma(m)}, \varepsilon_{\sigma(m+1)}}$ справедливо равенство $\mathcal{H}_{\varepsilon_{\sigma(1)}, \dots, \varepsilon_{\sigma(m)}, \varepsilon_{\sigma(m+1)}} = \mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}}$ для произвольной перестановки σ множества $\{1, \dots, m, m+1\}$. Продолжение скалярного произведения определяет продолжение меры $\lambda_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}}$ на минимальное кольцо $\mathcal{K}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}}$, содержащее кольца $\mathcal{K}_{\varepsilon_1}, \dots, \mathcal{K}_{\varepsilon_{m+1}}$. Для множеств $A \in \mathcal{K}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$ и $B \in \mathcal{K}_{\varepsilon_{m+1}}$ скалярное произведение функций $(\chi_A, \chi_B)_{\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}}}$ задает меру $\lambda_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}}(A \cap B)$ множества $A \cap B$, а в силу условия аддитивности меры задает и значение меры $\lambda_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}}$ на дополнениях $A \setminus B$ и $B \setminus A$. В частности, если пространства $\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$ и $\mathcal{H}_{\varepsilon_{m+1}}$ ортогональны, то для продолжения $\lambda_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}}$ справедливы равенства $\lambda_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}}(A \cap B) = 0$, $\lambda_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}}(A \setminus B) = \lambda_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}(A)$ и $\lambda_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}}(B \setminus A) = \lambda_{\varepsilon_{m+1}}(B)$.

Продолжение меры $\lambda_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}}$ инвариантно относительно сдвигов. Ибо если множества $A, B \in \mathcal{K}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}}$ связаны между собой преобразованием сдвига в H , то существуют множества $A'_k \in \mathcal{K}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$, $A''_k \in \mathcal{K}_{\varepsilon_{m+1}}$, $B'_k \in \mathcal{K}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$, $B''_k \in \mathcal{K}_{\varepsilon_{m+1}}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, связанные между собой попарно тем же преобразованием сдвига, такие, что множество A может быть получено конечным числом теоретико-множественных операций над множествами A'_k , A''_k , а множество B – с помощью такого же набора операций над множествами B'_k , B''_k .

Определим продолжение полугрупп $\mathcal{U}_{\nu, \varepsilon_{m+1}}$ и $\mathcal{U}_{\nu, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$ с пространств $\mathcal{H}_{\varepsilon_{m+1}}$, $\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$ до полугруппы $\mathcal{U}_{\nu, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}}$ в пространстве $\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}}$.

Подобно лемме 11 и следствию 3, доказывается следующее утверждение.

Подпространства L_0 и L_{m+1} инвариантны относительно преобразования $\mathcal{U}_{\nu, \varepsilon_{m+1}}$ пространства $\mathcal{H}_{\varepsilon_{m+1}}$, а подпространства L_0 и L_m инвариантны относительно преобразования $\mathcal{U}_{\nu, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$ пространства $\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$.

Так же, как и лемма 12, доказывается следующее утверждение.

Для любого $u \in L_0$ и любого $t \geq 0$ справедливо равенство

$$\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}_{m+1}}(t)u = \mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m}(t)u.$$

Тогда для произвольных $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}_{m+1}}$, $v \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m}$ и $t > 0$ положим, как и в (18),

$$\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m, \mathcal{E}_{m+1}}(t)(u + v) = \mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}_{m+1}}(t)(u) + \mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m}(t)(v). \quad (20)$$

Поэтому в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m, \mathcal{E}_{m+1}}$ определено сжимающее преобразование $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m, \mathcal{E}_{m+1}}$, являющееся продолжением сжимающих преобразований в пространствах $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_1}, \dots, \mathcal{H}_{\mathcal{E}_m}, \mathcal{H}_{\mathcal{E}_{m+1}}$, относительно которого эти пространства являются инвариантными подпространствами пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m, \mathcal{E}_{m+1}}$.

Согласно принципу математической индукции для любой конечной системы пространств $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_1}, \dots, \mathcal{H}_{\mathcal{E}_m}$ существуют:

1) продолжение скалярного произведения, заданного на пространствах $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_1}, \dots, \mathcal{H}_{\mathcal{E}_m}$ условием (10), на их линейную оболочку $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_m}$;

2) продолжение мер $\mu_{\mathcal{E}_1}, \dots, \mu_{\mathcal{E}_m}$, заданных на кольцах $\mathcal{K}_{\mathcal{E}_1}, \dots, \mathcal{K}_{\mathcal{E}_m}$, на минимальное содержащее эти кольца кольцо $\mathcal{K}_{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m}$;

3) продолжение $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m}$ полугрупп $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}_j}$, $j = 1, \dots, m$, определяемых в пространствах $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_j}$ случайным блужданием ξ в пространстве H с гауссовской мерой ν , на пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_m}$, причем продолжение не зависит от изменения нумерации пространств;

такие, что для этих продолжений выполняются условия А1–А3 из предположения индукции.

6.3. Продолжение на сумму произвольной совокупности пространств.

Для каждого ОНБ $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$ в разделе 3 определено гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, скалярное произведение в котором определяется полуторалинейной формой $\beta_{\mathcal{E}}$.

ТЕОРЕМА 3. Каждому отношению полного порядка $\prec$ на множестве ОНБ $\mathcal{S}$ соответствует эрмитова положительно-определенная полуторалинейная форма $\beta_{\prec, \mathcal{S}}$, заданная на линейной оболочке $\mathcal{L}_{\mathcal{S}} = \text{lin}(\mathcal{H}_{\mathcal{E}}, \mathcal{E} \in \mathcal{S})$ пространств $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$, сужение которой на пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ совпадает с полуторалинейной формой $\beta_{\mathcal{E}}$ при любом $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{S}$ – множество всех ОНБ, которое вполне упорядочено некоторым отношением порядка $\prec$. Пусть базис $\mathcal{E}_1$ является минимальным элементом. Для каждого базиса $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$ через $[\mathcal{E}]$ и $(\mathcal{E})$ будем обозначать множество базисов $\{\mathcal{F} \in \mathcal{S}: \mathcal{F} \prec \mathcal{E}\} \cup \{\mathcal{E}\}$ и $\{\mathcal{F} \in \mathcal{S}: \mathcal{F} \prec \mathcal{E}\}$ соответственно.

Для каждого $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$ определим линейные оболочки $\mathcal{L}_{[\mathcal{E}]} = \text{lin}(\mathcal{H}_{\mathcal{F}}, \mathcal{F} \in [\mathcal{E}])$ и $\mathcal{L}_{(\mathcal{E})} = \text{lin}(\mathcal{H}_{\mathcal{F}}, \mathcal{F} \in (\mathcal{E}))$.

Тогда для первого относительно порядка $\prec$ ОНБ $\mathcal{E}_1 \in \mathcal{S}$ на линейной оболочке $\mathcal{L}_{[\mathcal{E}_1]}$ определена эрмитова положительно-определенная полуторалинейная форма $\beta_{[\mathcal{E}_1]}$, совпадающая со скалярным произведением на всех гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, входящих в линейную оболочку $\mathcal{L}_{[\mathcal{E}_1]}$ в качестве подпространства.

Предположим, что выполняется следующее условие $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$: для некоторого $\mathcal{E}_0 \in \mathcal{S}$ на линейной оболочке $\mathcal{L}_{(\mathcal{E}_0)}$ определена эрмитова положительно-определенная полуторалинейная форма $\beta_{(\mathcal{E}_0)}$, сужение которой на

любое гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, входящее в линейную оболочку $\mathcal{L}_{(\mathcal{E}_0)}$ в качестве подпространства, совпадает со скалярным произведением пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

Покажем, что из этого предположения следует, что на линейной оболочке $\mathcal{L}_{[\mathcal{E}_0]}$ определена эрмитова положительно-определенная полуторалинейная форма $\beta_{[\mathcal{E}_0]}$, совпадающая со скалярным произведением на всех гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, входящих в линейную оболочку $\mathcal{L}_{[\mathcal{E}_0]}$ в качестве подпространства.

В силу предположения индукции $\mathcal{P}$ на линейном пространстве $\mathcal{L}_{(\mathcal{E}_0)}$ определена эрмитова положительно-определенная полуторалинейная форма $\beta_{(\mathcal{E}_0)}$, совпадающая со скалярным произведением на всех гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, входящих в линейную оболочку $\mathcal{L}_{(\mathcal{E}_0)}$ в качестве подпространства.

Обозначим через $\mathcal{H}_{(\mathcal{E}_0)}$ гильбертово пространство, являющееся пополнением пространства $\mathcal{L}_{(\mathcal{E}_0)}$ по норме, порожденной квадратичной формой $\beta_{(\mathcal{E}_0)}$.

Как и в п. 6.2 при получении ортогонального разложения (19), введем обозначение $L_0 = \mathcal{H}_{(\mathcal{E}_0)} \cap \mathcal{H}_{\mathcal{E}_0}$, а через $L_{\mathcal{E}_0}$ обозначим ортогональное дополнение пространства L_0 до пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_0}$, а через $L_{(\mathcal{E}_0)}$ – ортогональное дополнение пространства L_0 до пространства $\mathcal{H}_{(\mathcal{E}_0)}$. Тогда

$$\mathcal{L}_{[\mathcal{E}_0]} \subset L_0 \oplus L_{\mathcal{E}_0} \oplus L_{(\mathcal{E}_0)}. \quad (21)$$

В соответствии с этим ортогональным разложением на линейном пространстве $\mathcal{L}_{[\mathcal{E}_0]}$ определяется эрмитова положительно-определенная полуторалинейная форма $\beta_{[\mathcal{E}_0]}$, совпадающая со скалярным произведением на гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_0}$ и $\mathcal{H}_{(\mathcal{E}_0)}$, входящих в линейную оболочку $\mathcal{L}_{[\mathcal{E}_0]}$ в качестве подпространств.

Таким образом, с помощью метода трансфинитной индукции установлено, что для любого базиса $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$ на линейном пространстве $\mathcal{L}_{[\mathcal{E}]}$ определена эрмитова положительно-определенная полуторалинейная форма $\beta_{[\mathcal{E}]}$, совпадающая со скалярным произведением на всех гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, входящих в линейную оболочку $\mathcal{L}_{[\mathcal{E}_0]}$ в качестве подпространства.

Следовательно, существует эрмитова положительно-определенная полуторалинейная форма $\beta_{\prec, \mathcal{S}}$, определенная на линейной оболочке $\mathcal{L}_{\mathcal{S}} = \text{lin}(\mathcal{H}_{\mathcal{E}}, \mathcal{E} \in \mathcal{S})$, совпадающая со скалярным произведением на всех гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, входящих в линейную оболочку $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ в качестве подпространства. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Полуторалинейная форма $\beta_{\prec, \mathcal{S}}$ на линейном пространстве $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ не зависит от выбора отношения полного порядка на множестве $\mathcal{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть на множестве $\mathcal{S}$ выбраны два отношения полного порядка $\prec$ и $<$, пусть $\beta_{\prec}$ и $\beta_{<}$ – соответствующие им согласно теореме 3 эрмитовы положительно-определенные полуторалинейные формы на линейном пространстве $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$. Тогда согласно теореме 3 при любом выборе базиса $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$ справедливо равенство $\beta_{\prec}(u, v) = \beta_{<}(u, v) \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. Согласно результатам п. 6.2 для любого конечного набора базисов $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m \in \mathcal{S}$ и для любого вектора $u \in \mathcal{L}_{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m}$ справедливо равенство $\beta_{\prec}(u, u) = \beta_{<}(u, u)$. Поскольку элементы пространства $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ составляют конечные линейные комбинации векторов из пространств $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$, то равенство $\beta_{\prec}(u, u) = \beta_{<}(u, u)$ справедливо для любого $u \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}}$. Теорема доказана.

Обозначим через β_S эрмитову положительно-определенную полуторалинейную форму на линейном пространстве $\mathcal{L}_S$, соответствующую какому-либо выбору отношения полного порядка на множестве $\mathcal{S}$. Определим гильбертово пространство $\mathcal{H}_S$ как пополнение евклидова пространства $(\mathcal{L}_S, \beta_S)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Продолжение β_S скалярного произведения с пространств $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$, на пространство $\mathcal{H}_S$ однозначно определяет продолжение меры λ_S на минимальное кольцо $\mathcal{K}_S$, содержащее совокупность колец $\mathcal{K}_\mathcal{E}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$, такое, что $\lambda_S|_{\mathcal{K}_\mathcal{E}} = \lambda_\mathcal{E}$.*

Для любых двух множеств $B_j \in \mathcal{K}_{\mathcal{E}_j}$, $j = 1, 2$, значения меры λ_S на множествах $B_1 \cap B_2$, $B_1 \setminus B_2$, $B_1 \cup B_2$ определяются равенствами

$$\begin{aligned}\lambda_S(B_1 \cap B_2) &= (\chi_{B_1}, \chi_{B_2})_{\mathcal{H}_S}, & \lambda_S(B_1 \setminus B_2) &= \lambda_S(B_1) - \lambda_S(B_1 \cap B_2), \\ \lambda_S(B_1 \cup B_2) &= \lambda_S(B_1) + \lambda_S(B_2) - \lambda_S(B_1 \cap B_2).\end{aligned}$$

Таким образом, меры $\lambda_\mathcal{E}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$, с помощью скалярного произведения в пространстве $\mathcal{H}_S$ распространяются до неотрицательной аддитивной функции множества на любые конечные объединения, пересечения и дополнения множеств из колец $\mathcal{K}_\mathcal{E}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть ν – однопараметрическое семейство гауссовских мер, введенное в разделе 3. Тогда продолжение β_S скалярного произведения с пространств $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$, на пространство $\mathcal{H}_S$ однозначно определяет полугруппу сжимающих операторов $\mathcal{U}_\nu$ в пространстве $\mathcal{H}_S$, сужение которой на любое подпространство $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ совпадает с полугруппой операторов $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим основанную на методе трансфинитной индукции конструкцию продолжения полугруппы до полугруппы $\mathcal{U}_\nu$ при некотором фиксированном в доказательстве теоремы 3 выборе отношения полного порядка $\prec$ на множестве $\mathcal{S}$. Предположим, что для каждого базиса $\mathcal{E}_0 \in \mathcal{S}$ на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{(\mathcal{E}_0)}$ определена сильно непрерывная полугруппа сжимающих преобразований $\mathcal{U}_{\nu, (\mathcal{E}_0)}$ такая, что $\mathcal{U}_{\nu, (\mathcal{E}_0)}|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = \mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}}$ для любого базиса $\mathcal{E} \prec \mathcal{E}_0$. Докажем, что тогда определено продолжение полугрупп $\mathcal{U}_{\nu, (\mathcal{E}_0)}$ и $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}_0}$ с пространств $\mathcal{H}_{(\mathcal{E}_0)}$ и $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_0}$ до полугруппы сжимающих операторов $\mathcal{U}_{\nu, [\mathcal{E}_0]}$ в пространстве $\mathcal{H}_{[\mathcal{E}_0]}$.

Положим $L_0 = \mathcal{H}_{\mathcal{E}_0} \cap \mathcal{H}_{(\mathcal{E}_0)}$ и обозначим через $L_{\mathcal{E}_0}$ и $L_{(\mathcal{E}_0)}$ ортогональные дополнения пространства L_0 до пространств $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_0}$ и $\mathcal{H}_{(\mathcal{E}_0)}$ соответственно. Тогда

$$\mathcal{H}_{[\mathcal{E}_0]} = L_0 \oplus L_{\mathcal{E}_0} \oplus L_{(\mathcal{E}_0)}. \quad (22)$$

Так же, как и лемма 11, доказывается, что пространство L_0 инвариантно относительно операторов полугрупп $\mathcal{U}_{\nu, (\mathcal{E}_0)}$ и $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}_0}$, а пространство $L_{(\mathcal{E}_0)}$ инвариантно относительно операторов полугруппы $\mathcal{U}_{\nu, (\mathcal{E}_0)}$ и пространство $L_{\mathcal{E}_0}$ инвариантно относительно операторов полугруппы $\mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}_0}$ (см. следствие 3); и, наконец, так же, как и лемма 12, доказывается, что для любого вектора $u \in L_0$ справедливо равенство $\mathcal{U}_{\nu, (\mathcal{E}_0)}u = \mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}_0}u$.

Для произвольных $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}_0}$, $v \in \mathcal{H}_{(\mathcal{E}_0)}$ и $t > 0$ определим, как в (20), операторы полугруппы $\mathcal{U}_{\nu, [\mathcal{E}_0]}$ с помощью равенства

$$\mathcal{U}_{\nu, [\mathcal{E}_0]}(u + v) = \mathcal{U}_{\nu, \mathcal{E}_0}u + \mathcal{U}_{\nu, (\mathcal{E}_0)}v$$

(в силу того, что для любого вектора $u_0 \in L_0$ справедливо равенство $\mathcal{U}_{\nu,(\mathcal{E}_0)}u_0 = \mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}_0}u_0$, такое определение корректно). Тогда в соответствии с принципом индукции по упорядочению $\prec$ определяется продолжение полугруппы $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ до сильно непрерывной полугруппы сжимающих отображений $\mathcal{U}_{\nu}$ пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$.

Докажем независимость продолжения $\mathcal{U}_{\nu}$ от выбора отношения порядка $\prec$, опираясь на теорему 4. Согласно результатам п. 6.2 для любого конечного набора базисов $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m \in \mathcal{S}$ полугруппа $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m}$ не зависит от выбора отношения порядка $\prec$ на множестве $\mathcal{S}$. В силу построения отображений полугруппы $\mathcal{U}_{\nu}$ справедливо равенство $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m} = \mathcal{U}_{\nu}|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m}}$. Тогда поскольку элементы пространства $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ составляют конечные линейные комбинации векторов из пространств $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$, то для каждого вектора $u \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ его образы $\mathcal{U}_{\nu}(t)u$, $t \geq 0$, не зависят от выбора отношения порядка $\prec$ на множестве $\mathcal{S}$. Поскольку пространство $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ плотно в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, то операторы полугруппы $\mathcal{U}_{\nu}$ не зависят от выбора отношения порядка $\prec$ на множестве $\mathcal{S}$. Теорема доказана.

Теоремами 3–5 и следствием 4 установлены следующие факты.

1. На линейной оболочке $\mathcal{L}_{\mathcal{S}} = \text{lin}\{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}, \mathcal{E} \in \mathcal{S}\}$ определено скалярное произведение $\beta_{\mathcal{S}}$ таким образом, что оно является продолжением любого из скалярных произведений пространств $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

2. На минимальном кольце $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$, содержащем все кольца $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$, определена мера $\lambda_{\mathcal{S}}$, являющаяся продолжением мер $\lambda_{\mathcal{E}}$, определенных на кольцах $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$, и инвариантная относительно унитарных преобразований и сдвигов в пространстве H .

3. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, являющемся пополнением евклидова пространства $(\mathcal{L}_{\mathcal{S}}, \beta_{\mathcal{S}})$, определена полугруппа сжимающих операторов $\mathcal{U}_{\nu}$, являющаяся продолжением полугрупп $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$, действующих в пространствах $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

Мера $\lambda_{\mathcal{S}}$ является конечно-аддитивным аналогом меры Лебега на бесконечномерном гильбертовом пространстве как инвариантная относительно движений мера на минимальном кольце, содержащем все измеримые брусы из пространства H , а также класс всех измеримых пористых брусков К2 и их конечных объединений К3.

ПРИМЕР 1. Пусть $\nu_1 = \delta(h - h_0)$ и

$$\nu_t = \delta(h - th_0) \quad (23)$$

при всех $t \geq 0$. При этом $\nu_t * \nu_s = \nu_{t+s}$ при любых $t, s \geq 0$.

При любом выборе базиса $\mathcal{E}$ в пространстве H оператор $\mathbf{S}_{h_0}$ действует на произвольную функцию (точнее, на произвольный класс эквивалентности функций) $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ по правилу

$$\mathbf{S}_{h_0}u(x) = u(x + h_0), \quad x \in H.$$

Однопараметрическое семейство $\mathcal{U}(t)$, $t \geq 0$, преобразований пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, определяемое как результат усреднения случайного преобразования сдвига $\mathbf{S}_h$, распределение случайного параметра h которого в каждый момент времени $t \geq 0$ задается мерой ν_t , задается равенством (14). В соответствии с этим усреднение случайных сдвигов по однопараметрическому семейству мер (23) порождает однопараметрическое семейство $\mathcal{U}(t)$, $t \geq 0$, преобразований пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, действующих на произвольный элемент пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ по правилу

$$\mathcal{U}(t)u(x) = u(x + th_0), \quad x \in H, \quad t \geq 0. \quad (24)$$

Если вектор h_0 имеет в базисе $\mathcal{E}$ координаты $\{a_i\} \in l_2$, обращающиеся в нуль начиная с некоторого номера $m_{\mathcal{E}} \in \mathbb{N}$, тогда для каждого элемента u_0 из плотного в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ подпространства $D_{\mathcal{E}}(h_0) \equiv \bigcap_{j=1}^{m_{\mathcal{E}}} \mathcal{D}_{\mathcal{E},j}$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U}(t)u(x)|_{t=0} = \sum_{j=1}^{m_{\mathcal{E}}} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) \equiv \mathbf{G}_{\mathcal{E}} u(x), \quad x \in H. \quad (25)$$

Следовательно, если вектор h_0 имеет в базисе $\mathcal{E}$ координаты $\{a_i\} \in l_2$, обращающиеся в нуль начиная с некоторого номера $m_{\mathcal{E}} \in \mathbb{N}$, то плотно определенный на пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ оператор $\mathbf{G}_{\mathcal{E}}$ является генератором полугруппы (24) преобразований пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

ПРИМЕР 2. Пусть $\nu_{t\mathbf{D}}, t \geq 0$, – однопараметрическое семейство мер на пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, рассмотренное в теореме 2. Тогда для любого $u_0 \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ отображение $u: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, определяемое при всех $t > 0$ равенство

$$u(t) = \int_H \mathbf{U}_{\mathcal{E},h} u_0 d\nu_{t\mathbf{D}}(h)$$

и равенством $u(0) = u_0$ при $t = 0$, является слабым решением задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{d}{dt} u(t) = \Delta_{\nu,\mathcal{E}} u(t), \quad t > 0, \quad u(+0) = u_0, \quad (26)$$

в котором $\Delta_{\nu,\mathcal{E}}$ – генератор полугруппы $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ из теоремы 2.

ПРИМЕР 3. Пусть $\nu_{t\mathbf{D}}, t \in [0, +\infty)$, – однопараметрическое семейство мер из примера 2 и $u_0 \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Шредингера

$$i \frac{d}{dt} u(t) = \Delta_{\nu,\mathcal{E}} u(t), \quad t > 0, \quad u(+0) = u_0. \quad (27)$$

Ее решение может быть определено с помощью полугруппы $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$, разрешающей задачу Коши (26), и теоремы Чернова благодаря подходу, предложенному в работе [12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ – сжимающая полугруппа в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, разрешающая задачу Коши (26). Тогда если оператор-функция $\mathbf{F}(t), t \geq 0$, определена равенством $\mathbf{F}(t) = e^{i(\mathbf{I} - \mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t))}$, $t \geq 0$, то последовательность вектор-функций $u_n(t) = (\mathbf{F}(t/n))^n u_0, t \geq 0, n \in \mathbb{N}$, сходится к решению $u(t) = e^{-it\Delta_{\nu}} u_0$ задачи Коши (27) в том смысле, что для любого $T > 0$ выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t) - u(t)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} = 0$.

Утверждение предложения 5 следует, как показано в работе [12], из теоремы Чернова.

Само существование полугруппы $e^{-it\Delta_{\nu,\mathcal{E}}}, t \geq 0$, следует из самосопряженности оператора $\Delta_{\nu,\mathcal{E}}$ (см. лемму 10). Заметим, что получить решение задачи Коши методом усреднения из предложения 2 затруднительно из-за недостаточной информации о преобразовании Фурье в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. Но этот недостаток (отсутствие преобразования Фурье) позволяет преодолеть теорема Чернова и установленная в работе [12] связь унитарной полугруппы со сжимающей самосопряженной полугруппой.

Предложения 1–5 показывают, что для рассмотренных задач Коши псевдомера, усреднение по которой операторов сдвига в гильбертовом пространстве H задает операторы разрешающей задачу Коши полугруппы, может быть либо задана явно, либо определена с помощью предельного перехода для последовательности итераций Чернова.

Благодарности. Автор благодарит Г. Г. Амосова, И. В. Воловича, Ю. Н. Орлова, О. Г. Смолянова, Е. Т. Шавгулидзе и Н. Н. Шамарова за плодотворные обсуждения затронутых в работе проблем.

Список литературы

- [1] А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений*, Наука, М., 1979.
- [2] А. В. Скороход, “Произведения независимых случайных операторов”, *УМН*, **38**:4(232) (1983), 255–280.
- [3] Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах*, Наука, М., 1983.
- [4] В. И. Богачев, *Основы теории меры*, т. 1, РХД, М.–Ижевск, 2006.
- [5] В. И. Богачев, Н. В. Крылов, М. Рёкнер, “Эллиптические и параболические уравнения для мер”, *УМН*, **64**:6(390) (2009), 5–116.
- [6] I. D. Remizov, “Solution of a Cauchy problem for a diffusion equation in a Hilbert space by a Feynman formula”, *Russ. J. Math. Phys.*, **19**:3 (2012), 360–372.
- [7] Х.-С. Го, *Гауссовские меры в банаховых пространствах*, Мир, М., 1979.
- [8] А. М. Вершик, “Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве?”, *Тр. МИАН*, **259** (2007), 256–281.
- [9] В. И. Богачев, *Гауссовские меры*, Физматлит, М., 1997.
- [10] Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы*, Физматгиз, М., 1963.
- [11] Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев, О. Г. Смолянов, “Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **80**:6 (2016), 141–172.
- [12] И. Д. Ремизов, “Решение уравнения Шрёдингера с помощью оператора сдвига”, *Матем. заметки*, **100**:3 (2016), 477–480.
- [13] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equation*, Graduate Texts in Mathematics, **194**, Springer, New York, 2000.
- [14] Л. С. Ефремова, В. Ж. Сакбаев, “Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп”, *ТМФ*, **185**:2 (2015), 252–271.
- [15] А. Вейль, *Интегрирование в топологических группах и его применение*, ИЛ, М., 1950.
- [16] L. Accardy, P. Gibilisco, I. V. Volovich, “Yang–Mills gauge fields as harmonic function for the Lévy Laplacians”, *Russ. J. Math. Phys.*, **2**:2 (1994), 235–250.
- [17] Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, “Обобщенные лапласианы Леви и чезаровские средние”, *Докл. РАН*, **424**:5 (2009), 583–587.
- [18] R. Léandre, I. V. Volovich, “The stochastic Lévy Laplacians and Yang–Mills equation on manifolds”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **4**:2 (2001), 161–172.
- [19] B. O. Volkov, “Quantum probability and Lévy Laplacians”, *Russ. J. Math. Phys.*, **20**:2 (2013), 254–256.
- [20] L. Accardi, Y. G. Lu, I. V. Volovich, *Quantum Theory and Its Stochastic Limit*, Springer, Berlin, 2001.
- [21] M. Ohya, I. V. Volovich, *Mathematical Foundation of Quantum Information and Computation and Its Application to Nano- and Bio-system*, Springer, Dordrecht, 2011.

- [22] Л. А. Борисов, Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев, “Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами типа Шредингера”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН*, 2015, 057, 23 с.
- [23] В. Ж. Сакбаев, О. Г. Смолянов, Н. Н. Шамаров, “Негауссовские лагранжевы формулы Фейнмана–Каца”, *Докл. РАН*, **457**:1 (2014), 28–31.
- [24] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, *Континуальные интегралы*, УРСС, М., 2015.
- [25] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.

Поступила в редакцию 25.01.2016,
после доработки 28.04.2016