Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Алхимов, Канонический ансамбль частиц, блуждающих без самопересечений, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 1, 100–115

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9154>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:34:47

© 2017 г.

В. И. Алхимов*

КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ ЧАСТИЦ, БЛУЖДАЮЩИХ БЕЗ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Рассматривается ансамбль не взаимодействующих между собой частиц, случайно блуждающих в d -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Отдельные перемещения каждой частицы подчинены одному и тому же распределению, но после завершения каждого такого перемещения ее положение фиксируется “меткой” – областью в виде шара диаметра r_0 , недоступной для последующих посещений этой частицей. В результате в пространстве $\mathbb{R}^d$ получен соответствующий ансамбль “меченых” траекторий, в каждой из которых расстояние между центрами любой пары указанных шаров больше r_0 . Изложен метод вычисления асимптотики плотности вероятности $W_n(\mathbf{r})$ расстояния r между центрами начального и конечного шаров траектории, состоящей из n отдельных перемещений некоторой частицы ансамбля. Помимо расстояния r , случайной величиной в рассматриваемой модели является и число n – модуль траектории, что обуславливает необходимость определения распределения для n , в качестве которого используется каноническое распределение, полученное при наиболее вероятном распределении частиц в ансамбле по модулям их траекторий. Усреднение плотности $W_n(\mathbf{r})$ по каноническому распределению модуля n позволяет найти асимптотику плотности вероятности расстояния r между концами траекторий частиц канонического ансамбля, блуждающих без самопересечений в $\mathbb{R}^d$, когда $2 \leq d < 4$.

Ключевые слова: канонический ансамбль, блуждания без самопересечений, основное уравнение, ренормализационная группа, метод перевала, асимптотическое распределение.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9154>

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается ансамбль частиц, блуждающих в d -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, заполненном однородной изотропной физической средой. Отдельные перемещения $\mathbf{r}_k$, $k = 1, 2, \dots$, каждой частицы подчинены одному и тому же распределению плотности вероятности $w(\mathbf{r}_k)$ со средним квадратом $\langle r^2 \rangle$ отдельного перемещения. Кроме того, после завершения каждого такого перемещения частицы ее положение в среде фиксируется “меткой” – областью в виде шара

*Факультет информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет, Москва, Россия. E-mail: alvaliv@list.ru

диаметра r_0 , которая является недоступной для последующих посещений этой частицей. В результате указанного ограничения на положения частиц в $\mathbb{R}^d$ мы получаем соответствующий ансамбль “меченых” траекторий, в каждой из которых расстояние между центрами любой пары указанных шаров больше r_0 . Обозначим через $\mathbf{r}_k$ вектор, соединяющий центры $(k-1)$ -го и k -го шаров, $\mathbf{r}_{kl}$ – вектор, соединяющий центры $(k-1)$ -го и l -го шаров, где $k \leq l$. Тогда $r_{1n} \equiv |\mathbf{r}_{1n}|$ обозначает расстояние между центрами начального (0-го) и конечного (n -го) шаров траектории, состоящей из n отдельных перемещений частицы ансамбля. Таким образом, расстояние r_{1n} и число n , называемое в дальнейшем модулем траектории, являются ее основными характеристиками. Введенный запрет на пересечение шаров, принадлежащих траектории какой-либо частицы, оказывает существенное влияние на функциональную зависимость плотности вероятности $W_n(\mathbf{r})$ от расстояния $r = |\mathbf{r}_{1n}|$ между концами этой траектории. Помимо расстояния r , случайной величиной в рассматриваемой модели является модуль n траектории, что обуславливает необходимость определения распределения для n .

Предположим, что число M частиц в ансамбле равно сумме $m_0 + m_1 + m_2 + \dots$, где m_0 – число частиц, не имеющих перемещений, m_1 – число частиц, траектории которых состоят из одного модуля, m_2 – число частиц, траектории которых состоят из двух модулей, и т. д. Тогда посредством набора целых чисел $\{m_n\}$ описывается любое распределение частиц по модулям их траекторий. Далее допустим, что кроме числа M задано среднее значение N модуля по траекториям всех частиц, т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n = M, \quad \sum_{n=0}^{\infty} nm_n = MN. \quad (1)$$

При выполнении условий (1) и $M \rightarrow \infty$ с помощью метода Дарвина–Фаулера можно получить наиболее вероятный набор $\{\bar{m}_n\}$, определяющий каноническое распределение [1]–[3]. Если доказать, что $\{m_n\} \sim \{\bar{m}_n\}$ при $M \rightarrow \infty$, то указанное распределение находится путем вычисления среднего значения $\langle m_n \rangle$ по всем возможным распределениям модулей. В результате при $M \rightarrow \infty$ для значений $\langle m_k \rangle$ и дисперсии $\mathbb{D}m_k \equiv \langle m_k^2 \rangle - \langle m_k \rangle^2$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\langle m_k \rangle}{M} &\equiv \mathbb{P}(n) = (1-q)q^n, \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{D}m_k &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Следовательно, $\{m_n\} \sim \{\bar{m}_n\}$ и, таким образом, формула (2), называемая геометрическим распределением, является точной, а величина q определяется равенством

$$N = \mathbb{E}n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(n),$$

из которого находим $q = N(N+1)^{-1}$. Таким образом, формула (2) определяет искомую вероятность найти траекторию частицы с модулем n при наиболее вероятном распределении частиц в ансамбле по модулям их траекторий. Если теперь

плотность вероятности $W_n(\mathbf{r})$ усреднить по указанному в (2) распределению $\mathbb{P}(n)$, то получим

$$\mathbb{E}W_n(\mathbf{r}) = (1 - q)W(q, \mathbf{r}), \quad (3)$$

где

$$W(z, \mathbf{r}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n W_n(\mathbf{r})$$

– ее производящая функция.

2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ И РЕНОРМГРУППОВАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Искомая плотность вероятности $W_n(\mathbf{r})$ для рассматриваемой здесь модели определяется равенством

$$W_n(\mathbf{r}) = Q_n^{-1} \int \delta\left(\mathbf{r} - \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k\right) P_{1n} \prod_{k=1}^n w(\mathbf{r}_k) d\mathbf{r}_k,$$

где $\delta(\mathbf{r})$ – дельта-функция Дирака, Q_n – нормировочный множитель, равный

$$Q_n = \int P_{1n} \prod_{k=1}^n w(\mathbf{r}_k) d\mathbf{r}_k,$$

$$P_{1n} = \prod_{1 \leq j \leq k \leq n} (1 - \theta_{jk}), \quad \theta_{jk} \equiv \theta(r_0 - r_{jk}),$$

$\theta(x)$ – функция Хевисайда, $d\mathbf{r}$ – элемент объема, который в гипертсферических полярных координатах пространства $\mathbb{R}^d$ принимает вид $d\mathbf{r} = r^{2s+1} dr d\omega$, $s = (d-2)/2$, $d\omega$ – элемент поверхности сферы единичного радиуса, $\omega = 2\pi^{s+1}/\Gamma(s+1)$ – полная поверхность этой сферы, а $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера. Наконец, мы полагаем, что плотность вероятности $w(\mathbf{r})$ зависит лишь от длины r отдельного перемещения частицы, сосредоточена и непрерывна на интервале (r_0, ∞) и достаточно быстро убывает при $r \rightarrow \infty$. Используя фурье-представление дельта-функции, запишем плотность $W_n(\mathbf{r})$ в форме интеграла Фурье:

$$W_n(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}} \widetilde{W}_n(\mathbf{p}) d\mathbf{p},$$

где характеристическая функция $\widetilde{W}_n(\mathbf{p})$ плотности $W_n(\mathbf{r})$ определяется равенством

$$\widetilde{W}_n(\mathbf{p}) = Q_n^{-1} \int P_{1n} \prod_{k=1}^n e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_k} w(\mathbf{r}_k) d\mathbf{r}_k. \quad (4)$$

Однако для решения рассматриваемой задачи более удобно использовать ненормированную функцию

$$V_n(\mathbf{r}) = Q_n W_n(\mathbf{r})$$

и ее фурье-образ

$$\widetilde{V}_n(\mathbf{p}) = Q_n \widetilde{W}_n(\mathbf{p}). \quad (5)$$

В работе [4] для производящей функции

$$\tilde{V}(z, \mathbf{p}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tilde{V}_n(\mathbf{p}) \quad (6)$$

установлено уравнение

$$\tilde{V}^{-1}(z, \mathbf{p}) = \tilde{V}_0^{-1}(z, \mathbf{p}) - f(z, \mathbf{p}) \quad (7)$$

при условии

$$|z\tilde{w}(\mathbf{p}) + f(z, \mathbf{p})| < 1, \quad (8)$$

где

$$\tilde{V}_0^{-1}(z, \mathbf{p}) = 1 - z\tilde{w}(\mathbf{p}), \quad (9)$$

$$\tilde{w}(\mathbf{p}) \equiv \int e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} w(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \omega \int_0^{\infty} \Lambda_s(pr) w(r) r^{2s+1} dr \quad (10)$$

– характеристическая функция плотности $w(\mathbf{r})$, $\Lambda_s(z) \equiv \Gamma(s+1)(2/z)^s J_s(z)$, $J_s(z)$ – функция Бесселя первого рода, а функция $f(z, \mathbf{p})$ определена выражением

$$f(z, \mathbf{p}) = -\frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{p}_1 \tilde{\theta}(\mathbf{p}_1) \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1) Y(z, \mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1), \quad (11)$$

в котором так называемая “вершинная” функция $Y(z, \mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1)$ задана посредством ряда:

$$\begin{aligned} Y(z, \mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \equiv & 1 - \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{p}_2 \tilde{\theta}(\mathbf{p}_2) \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_2) + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \iint d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 \tilde{\theta}(\mathbf{p}_2) \tilde{\theta}(\mathbf{p}_3) \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \times \\ & \times \{ \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_3) + \\ & + \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_3) + \\ & + \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_2) + \\ & + \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_3) \} - \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

здесь фурье-образ $\tilde{\theta}(\mathbf{p})$ функции $\theta(r_0 - r)$ определяется равенством

$$\tilde{\theta}(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \theta(r_0 - r) d\mathbf{r} = v \Lambda_{s+1}(r_0 p), \quad (13)$$

в котором $v = \Gamma^{-1}(s+2)(\pi r_0^2)^{s+1}$ обозначает объем шара диаметра r_0 . Уравнение (7) по своей форме аналогично известному уравнению Дайсона в квантовой теории поля и в рассматриваемой задаче играет основополагающую роль, в связи с чем мы будем называть его *основным уравнением*. Особым свойством ряда в равенстве (12) является тот факт, что при переходе от одних членов ряда к другим появление под знаком интеграла величины $\{-\tilde{\theta}\}$ всегда сопровождается умножением ее на произведение $\{\tilde{V}\}^2$ двух искомых функций. Это свойство можно продемонстрировать, представив ряд в (12) в символической форме:

$$Y(z, \mathbf{p}) = \sum_{n \geq 0} \int \left\{ \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d} \right\}^n \{-\tilde{\theta}(\mathbf{p}')\}^n \{\tilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}')\}^{2n}.$$

Отсюда вытекает важное свойство основного уравнения (7) – его инвариантность относительно мультипликативных преобразований:

$$\begin{aligned}\tilde{V} \rightarrow \tilde{V}' = \alpha \tilde{V}, \quad \tilde{V}_0 \rightarrow \tilde{V}'_0 = \alpha \tilde{V}_0, \quad \tilde{\theta} \rightarrow \tilde{\theta}' = \alpha^{-2} \tilde{\theta}, \\ f \rightarrow f' = \alpha^{-1} f, \quad Y \rightarrow Y' = Y,\end{aligned}\quad (14)$$

где α – не равный нулю непрерывный параметр. Эти преобразования образуют непрерывную группу, называемую обычно ренормгруппой (РГ), в связи с чем свойство (14) является исходной точкой для применения метода РГ в исследуемой здесь задаче. Формулы (11) и (12) описывают искомую связь между функциями $f(z, \mathbf{p})$ и $\tilde{V}(z, \mathbf{p})$, составляя вместе с основным уравнением (7) замкнутую систему при условии сходимости ряда в (12). Это условие следует из выражения (6), если в нем учесть неравенство $|\tilde{V}_n(\mathbf{p})| \leq 1$, вытекающее из формул (4) и (5). В результате находим

$$|\tilde{V}(z, \mathbf{p})| \leq (1 - |z|)^{-1}, \quad |z| < 1,$$

и, следовательно, ряд в правой части равенства (6) абсолютно и равномерно сходится для всех вещественных значений p и $|z| < 1$. Благодаря этим условиям и ограниченности функции $|\tilde{w}(\mathbf{p})|$ можно утверждать согласно неравенству (8), что функция $f(z, \mathbf{p})$ и, следовательно, правая часть равенства (11) ограничены по модулю, что обуславливает сходимость ряда в (12). Если бы удалось отыскать решение уравнения (7), то с помощью формул обращения

$$W_n(\mathbf{r}) = \left[\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^{n+1}} \tilde{V}(z, 0) \right]^{-1} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z^{n+1}} V(z, \mathbf{r}), \quad (15)$$

$$V(z, \mathbf{r}) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}} \tilde{V}(z, \mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (16)$$

мы пришли бы к искомому результату.

Однако проблема решения основного уравнения и последующего определения функции $W_n(\mathbf{r})$ чрезвычайно сложна. Более реальной задачей в этом случае является вычисление асимптотики плотности $W_n(\mathbf{r})$ при больших значениях n и r . Но согласно формулам (15) и (16) для этого необходимо знать поведение функции $\tilde{V}(z, \mathbf{p})$ при малых значениях $|z - z_0|$ и p , где z_0 – ближайшая к началу координат $z = 0$ особая точка функции

$$\tilde{V}(z, 0) = Q(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n Q_n, \quad (17)$$

т. е. такая точка, которая удовлетворяет тождеству

$$1 - z_0 - f(z_0, 0) \equiv 0 \quad (18)$$

в соответствии с соотношениями (5)–(9). Очевидно, что величина $0 < z_0 \leq 1$ зависит от объема v “метки”, который приводит к смещению особой точки $z_0 = z_0(v)$ из ее “невозмущенного” положения $z_0(0) = 1$. В теории аналитических функций утверждается, что граница круга сходимости степенного ряда проходит через ближайшую к началу координат его особую точку. Кроме того, асимптотическое поведение функции, представленной степенным рядом, при приближении переменной z

к границе круга сходимости можно связать с асимптотическим поведением коэффициентов этого ряда, когда их порядковый номер стремится к бесконечности [5]. Действительно, известная тауберова теорема в приложении к степенному ряду (17) утверждает, что вследствие условия $z_0 Q_{n+1}/Q_n < 1$ последовательность коэффициентов $Q_n z_0^n$ ряда

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n, \quad \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1,$$

монотонна и при $0 \leq \alpha < \infty$ соотношения

$$Q(z) \sim \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^{-\alpha} C \left(\frac{z_0}{z_0 - z} \right), \quad \frac{z}{z_0} \rightarrow 1-,$$

и

$$Q_n \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) z_0^n} C(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

равносильны, где $C(t)$ – медленно меняющаяся на бесконечности положительная функция [6]. Важность тауберовой теоремы здесь обусловлена ее тесной связью с проблемой вычисления асимптотики плотности вероятности $W_n(r)$, когда n и r стремятся к бесконечности. Далее пусть $p_{\pm} \equiv \pm i\eta$ – ближайшие к началу $p = 0$ корни уравнения $\tilde{V}^{-1}(z, \mathbf{p}) = 0$, где z принадлежат окрестности точки z_0 . Тогда, полагая $p = i\eta$ в уравнении (7), получим тождество

$$1 - z\tilde{w}(i\eta) - f(z, i\eta) \equiv 0, \quad (19)$$

с помощью которого уравнение (7) преобразуется к виду

$$\tilde{V}^{-1}(z, p) = z(\tilde{w}(i\eta) - \tilde{w}(p)) + f(z, i\eta) - f(z, p). \quad (20)$$

Теперь обе части уравнения (20) умножим на новую переменную $\zeta = z_0/z$ и введем обозначения

$$\begin{aligned} \bar{V}(\zeta, p) &= \zeta^{-1} \tilde{V}(z, p), & \bar{V}_0^{-1}(\zeta, p) &= z_0(\tilde{w}(i\eta) - \tilde{w}(p)), \\ F(\zeta, p; \bar{\theta}; \bar{V}) &= \zeta f(z, p), & \bar{\theta} &= \zeta^2 \tilde{\theta}, & \bar{v} &= \zeta^2 v. \end{aligned}$$

В результате приходим к соотношению

$$\bar{V}^{-1}(\zeta, p) = \bar{V}_0^{-1}(\zeta, p) + F(\zeta, i\eta; \bar{\theta}; \bar{V}) - F(\zeta, p; \bar{\theta}; \bar{V}), \quad (21)$$

в котором функцию $\bar{V}_0^{-1}(\zeta, p)$ можно записать с помощью (10) в виде ряда

$$\bar{V}_0^{-1}(\zeta, p) = z_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s)}{4^m m! \Gamma(1+s+m)} [\eta^{2m} + (-1)^{m+1} p^{2m}] \langle r^{2m} \rangle, \quad (22)$$

где $\langle r^{2m} \rangle$ – моменты $2m$ -го порядка случайной величины r . Отсюда для малых значений $|\eta|$ и $|p|$ имеем

$$\bar{V}_0^{-1}(\zeta, p) \simeq \frac{z_0 \langle r^2 \rangle}{2d} (\eta^2 + p^2). \quad (23)$$

Кроме того, из тождеств (18) и (19) следует формула

$$\zeta - 1 = \bar{V}_0^{-1}(\zeta, 0) + F(\zeta, i\eta; \bar{\theta}; \bar{V}) - F(1, 0; \bar{\theta}; \bar{V}), \quad (24)$$

устанавливающая функциональную зависимость $\eta = \eta(\zeta)$, согласно которой $\eta(1) = 0$. Уравнение (21) совместно с равенством (24) составляют основу излагаемого здесь метода исследования данной проблемы. В новых переменных формулы (15) и (16) теперь принимают следующий вид:

$$W_n(\mathbf{r}) = \left[\int_{\bar{\gamma}} \zeta^n \bar{V}(\zeta, 0) d\zeta \right]^{-1} \int_{\bar{\gamma}} \zeta^n \hat{V}(\zeta, \mathbf{r}) d\zeta, \quad (25)$$

где

$$\hat{V}(\zeta, \mathbf{r}) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}} \bar{V}(\zeta, \mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad (26)$$

а контур интегрирования $\bar{\gamma}$ в (25) расположен в комплексной плоскости переменной ζ справа от единичного круга, на границе которого в точке $\zeta = 1$ и внутри него расположены все особые точки подынтегральной функции.

Описанные выше свойства основного уравнения служат базой для решения его с помощью метода РГ, суть которого состоит в следующем. Обратимся к уравнениям (21) и (24), первое из которых определяет тип особых точек $p_{\pm} \equiv \pm i\eta$ функции $\bar{V}(\zeta, p)$, а второе – зависимость между величинами ζ и η . Удобнее начать с определения характера сингулярности функции $\bar{V}(\zeta, p)$ в указанных особых точках. С этой целью запишем искомую функцию $\bar{V}(\zeta, p)$ в виде

$$\bar{V}(\zeta, p) = \bar{V}_0(\zeta, p)G, \quad (27)$$

где величина G согласно (21) и (27) удовлетворяет уравнению

$$G^{-1} = 1 + \Phi(\eta^2, \rho^2; \bar{\theta}; G), \quad (28)$$

в котором введены новые переменные η^2 и $\rho^2 \equiv \eta^2 + p^2$, а также новая функция

$$\Phi(\eta^2, \rho^2; \bar{\theta}; G) = \bar{V}_0(\zeta, p)[F(\zeta, i\eta; \bar{\theta}; \bar{V}_0 G) - F(\zeta, p; \bar{\theta}; \bar{V}_0 G)]. \quad (29)$$

Теперь предположим, что при некотором значении $\rho^2 = \lambda$ имеет место равенство $\Phi(\eta^2, \lambda; \bar{\theta}; G) = 0$, т. е. для функции G выполняется условие нормировки $G|_{\rho^2=\lambda} = 1$. Тогда РГ-свойство уравнения (14) в обозначениях $x = \eta^2/\lambda$, $y = \rho^2/\lambda$ можно записать в виде

$$G(x, y; \bar{\theta}) = G(x, t; \bar{\theta})G\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}; \bar{\theta}G^2(x, t; \bar{\theta})\right),$$

где t – отличный от нуля непрерывный параметр. Возведя обе части последнего равенства в квадрат и затем умножив на $\bar{\theta}$, мы получим для инвариантной относительно РГ-преобразований величины

$$B(x, y; \bar{\theta}) = \bar{\theta}G^2(x, y; \bar{\theta})$$

функциональное уравнение

$$B(x, y; \bar{\theta}) = B\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}; B(x, t; \bar{\theta})\right) \quad (30)$$

со следующим условием нормировки:

$$B(x, 1; \bar{\theta}) = \bar{\theta}. \quad (31)$$

Уравнение (30) является замкнутым и может быть решено в общем виде [7], [8]. Однако для практических целей более удобно иметь дело с дифференциальными уравнениями Ли в силу непрерывности РГ. Чтобы получить уравнение Ли, например, для $B(x, y; \bar{\theta})$, продифференцируем обе части равенства (30) по y и затем положим $t = y$. В результате имеем

$$y \frac{\partial B(x, y; \bar{\theta})}{\partial y} = \beta \left(\frac{x}{y}; B(x, y; \bar{\theta}) \right), \quad (32)$$

где

$$\beta(x, \bar{\theta}) = \left. \frac{\partial B(x, y; \bar{\theta})}{\partial y} \right|_{y=1},$$

а граничным условием служит условие нормировки (31). Приведенные выше РГ-уравнения оказываются особенно полезными при исследовании асимптотических свойств функции $G(x, y; \bar{\theta})$. Например, чтобы определить поведение функции $G(x, y; \bar{\theta})$, когда $x \ll y$ и $y \rightarrow 0$, выберем точку нормировки λ , удовлетворяющую неравенству $\eta^2 \ll \rho^2 < \lambda$, и в уравнении (32) перейдем к пределу, устремляя η^2 к нулю. Тогда, обозначая

$$\begin{aligned} B(y; \bar{\theta}) &= \lim_{x \rightarrow 0} B(x, y; \bar{\theta}), \\ \beta(\bar{\theta}) &= \left. \frac{\partial B(y; \bar{\theta})}{\partial y} \right|_{y=1}, \end{aligned} \quad (33)$$

мы приходим к следующему уравнению:

$$y \frac{\partial B(y; \bar{\theta})}{\partial y} = \beta(B(y; \bar{\theta})) \quad (34)$$

с граничным условием

$$B(1; \bar{\theta}) = \bar{\theta}. \quad (35)$$

Уравнение (34) совместно с равенством (35) можно записать в форме уравнения Гелл-Манна–Лоу:

$$\int_{\bar{\theta}}^{B(y; \bar{\theta})} \beta^{-1}(t) dt = \ln y,$$

очень удобной для анализа поведения инвариантного объема $B(y; \bar{\theta})$ в области малых значений y или $\rho^2 \ll \lambda$ [9]. Таким образом, согласно РГ-уравнениям, эффективным параметром, характеризующим интенсивность объемного взаимодействия в малой окрестности точек $\eta = 0$ и $\rho = 0$, является инвариантный объем. Поэтому, чтобы определить асимптотику, например, функции $G(y; \bar{\theta})$ при $y \rightarrow 0$, необходимо знать в этом случае поведение величины $B(y; \bar{\theta})$, которое, в свою очередь, определяется свойствами функции $\beta(B)$ в соответствии с (33). Поскольку для вычисления функции $\beta(B)$ обычно используется теория возмущений, то реально можно судить о ее поведении лишь в малой окрестности точки $B = 0$, в которой $\beta(0) = 0$. Действительно, если в этой окрестности величина $\beta(B)$ положительна, то инвариантный объем $B(y; \bar{\theta})$ стремится к нулю, когда $y \rightarrow 0$. Если же функция $\beta(B)$ отрицательна вблизи нуля, то при $y \rightarrow 0$ величина $B(y; \bar{\theta})$ возрастает, в результате чего мы выходим за рамки применимости теории возмущений.

3. АСИМПТОТИКА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Обратимся к уравнению (21) и рассмотрим функцию $F(\zeta, p; \bar{\theta}; \bar{V})$ в его правой части, определяемую посредством ряда согласно выражениям (11) и (12). Переход от одного члена этого ряда к следующему сопровождается появлением интеграла, который на примере перехода от первого члена ряда ко второму имеет вид

$$I(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) = - \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d} \bar{\theta}(\mathbf{p}_2) \bar{V}(\zeta, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \bar{V}(\zeta, \mathbf{p} - \mathbf{p}_2), \quad (36)$$

что свидетельствует о РГ-инвариантности основного уравнения. Если теперь под знаком интеграла в (36) функцию $\bar{V}$ заменить на $\bar{V}_0$, т.е. использовать “нулевое” приближение, то, учитывая (13) и (22), после замены переменных $p = \eta p'$, $p_1 = \eta p'_1$, $p_2 = \eta p'_2$ мы получим, что $I(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) = O(\eta^{2(s-1)})$, когда $\eta \rightarrow 0$. Это означает, что в случае $s \leq 1$ ($d \leq 4$) рассматриваемое ограничение на самопересечения траектории оказывает существенное влияние на искомый вид асимптотики плотности вероятности $W_n(\mathbf{r})$. Поскольку в окрестности точек $\eta = 0$ и $p = 0$ переменные η и p присутствуют в (21) главным образом в виде комбинации $\eta^2 + p^2 \equiv \rho^2$, то для значений $s \leq 1$ ($d \leq 4$) величина $\Phi(\eta^2, \rho^2; \bar{\theta}; G)$ как функция от ρ должна неограниченно возрастать при $\rho \rightarrow 0$. Поэтому точки $p_{\pm} \equiv \pm i\eta$ не являются простыми нулями функции $\bar{V}^{-1}(\zeta, p)$, и, следовательно, функция $\Phi(\eta^2, \rho^2; \bar{\theta}; G)$ ведет себя в окрестности точек $p_{\pm} \equiv \pm i\eta$, как $O(\rho^{-2\mu})$, при $\rho \rightarrow 0$, где $0 < \mu < 1$. Вследствие того же ограничения на самопересечения траектории функция $\Phi(\eta^2, \rho^2; \bar{\theta}; G)$ должна неограниченно возрастать и при $|\rho| \rightarrow \infty$. Из приведенных выше обсуждений предполагаемого поведения функции $\Phi(\eta^2, \rho^2; \bar{\theta}; G)$, а также из уравнений (27) и (28) следует, что в качестве исходного приближения для искомой функции $\bar{V}(\zeta, p)$ можно принять функцию

$$\mathcal{V}(\eta, p) = A \rho^{2(\mu-1)} \bar{K}_{1-\mu}(a\rho), \quad (37)$$

в которой $\bar{K}_{\kappa}(z) = z^{\kappa} K_{\kappa}(z)$, а значения параметров A , a и $\mu = \mu(d)$ при выполнении условий

$$0 < \mu < 1, \quad 2 \leq d < 4 \quad (0 \leq s < 1)$$

должны быть еще найдены. Параметр a является некоторой характеристической длиной, пропорциональной величине $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ с коэффициентом пропорциональности, зависящим от размерности пространства $\mathbb{R}^d$. Тогда согласно формулам (26) и (37) соответствующее приближение для функции $\hat{V}(\eta, r)$ есть

$$\hat{\mathcal{V}}(\eta, r) = (2\pi)^{-d/2} A R^{-2\nu} \bar{K}_{\nu}(\eta R), \quad (38)$$

где

$$R^2 \equiv r^2 + a^2, \quad \nu \equiv \mu + s, \quad s < \nu < 1.$$

Ниже мы воспользуемся асимптотическим поведением функции $K_{\kappa}(z)$, $\kappa \neq 1$, при малых и больших значениях аргумента z :

$$\begin{aligned} \frac{2^{1-\kappa}}{\Gamma(\kappa)} \bar{K}_{\kappa}(z) &= 1 - \frac{\Gamma(1-\kappa)}{\Gamma(1+\kappa)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa} + \frac{1}{(1-\kappa)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + O(z^{2(1+\kappa)}), \quad z \rightarrow 0, \\ K_{\kappa}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} [1 + O(z^{-1})], \quad |z| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (39)$$

Кроме того, функция $K_\kappa(z)$ при каждом фиксированном значении $z \neq 0$ является целой функцией от индекса κ , который здесь связан с величиной d . Для того чтобы найти значение параметра μ , воспользуемся следующим способом. В соответствии с формулой (25), исходным приближением (37) и его следствием (38) рассмотрим для плотности вероятности $W_n(\mathbf{r})$ приближение

$$\mathcal{W}_n(\mathbf{r}) = \left[\int_{\bar{\gamma}} \zeta^n \mathcal{V}(\eta, 0) d\zeta \right]^{-1} \int_{\bar{\gamma}} \zeta^n \hat{\mathcal{V}}(\eta, \mathbf{r}) d\zeta, \quad (40)$$

для которого получим асимптотическую оценку, когда $n \rightarrow \infty$, но значение r при этом остается фиксированным. Поскольку плотность $\mathcal{W}_n(\mathbf{r})$ – положительная величина и, следовательно,

$$\text{Im } \mathcal{W}_n(\mathbf{r}) = 0, \quad (41)$$

то выполнения этого условия потребуем и для ее асимптотики. Далее, в выражении (40) перейдем от переменной ζ к переменной η с помощью формулы (24), имеющей теперь вид

$$\zeta - 1 = z_0(\bar{w}(i\eta) - 1) + F(\zeta, i\eta; \bar{\theta}; \mathcal{V}) - F(1, 0; \bar{\theta}; \mathcal{V}), \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} F(\zeta, p; \bar{\theta}; \mathcal{V}) = & - \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \bar{\theta}(\mathbf{p}_1) \mathcal{V}(\eta, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1) + \\ & + \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d} \bar{\theta}(\mathbf{p}_1) \bar{\theta}(\mathbf{p}_2) \times \\ & \times \mathcal{V}(\eta, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \mathcal{V}(\eta, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \mathcal{V}(\eta, \mathbf{p} - \mathbf{p}_2) - \dots \end{aligned} \quad (43)$$

Для исследования сходимости ряда в (43) рассмотрим интеграл

$$\mathcal{I}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) = - \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d} \bar{\theta}(\mathbf{p}_2) \mathcal{V}(\eta, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \mathcal{V}(\eta, \mathbf{p} - \mathbf{p}_2), \quad (44)$$

реализующий переход от первого члена этого ряда к его второму члену, подобно интегралу (36). Для краткости оценим величину интеграла $\mathcal{I}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ при $\eta = 0$, область интегрирования для которого мы ограничим малым объемом шара радиуса $|\mathbf{p}_2| = p_0$ с центром в точке $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$. В результате мы получим величину порядка $O(p_0^{4\mu+2s-2})$ в случае $p_0 \rightarrow 0$. Отсюда следует, что сходимость интеграла (44) на нижнем пределе обеспечивается выполнением одного из эквивалентных условий

$$\mu > \frac{1-s}{2}, \quad \nu > \frac{1+s}{2}$$

в силу равенства $\nu = \mu + s$, а сходимость его на верхнем пределе обусловлена экспоненциальным стремлением к нулю подынтегральной функции. Вычисление интегралов в (43) в окрестности точек $p = 0$ и $\eta = 0$ приводит к следующему результату:

$$F(\zeta, p; \bar{\theta}; \mathcal{V}) = \sigma(p) + \tau(p)\eta^{2\nu} + O(a^2\eta^2), \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma(p) &= -A_0 a^{-2\nu} \bar{\theta}(p) + A_1 a^{2(1+s-3\nu)} \bar{\theta}^2(p) \bar{K}_{3\nu-s-1}(ap) - \dots, \\ \tau(p) &= \frac{A_0 \Gamma(1-\nu)}{4^\nu \Gamma(1+\nu)} \bar{\theta}(p) - A_2 a^{2(1+s-2\nu)} \bar{\theta}^2(p) \bar{K}_{2\nu-s-1}(ap) + \dots, \\ A_0 &= c_0 A, \quad A_1 = c_1 A^3, \quad A_2 = c_2 A^3,\end{aligned}$$

c_0, c_1, c_2 суть определенные положительные числа.

Подставим теперь выражение (45) в (42) при малых значениях η , учитывая равенство $\bar{w}(i\eta) - \bar{w}(0) = O(\eta^2 \langle r^2 \rangle)$, а также соотношения

$$\begin{aligned}\sigma(i\eta) - \sigma(0) &= O(A^3 v^2 \eta^{2(3\nu-s-1)}), \quad \eta \rightarrow 0, \\ \tau(i\eta) - \tau(0) &= O(A^3 v^2 \eta^{2(2\nu-s-1)}), \quad \eta \rightarrow 0.\end{aligned}$$

В результате мы получим искомую связь между переменными ζ и η :

$$\zeta - 1 = \tau_0 \eta^{2\nu} + O(A^3 v^2 \eta^{2(3\nu-s-1)}), \quad \tau_0 > 0, \quad (46)$$

где положительное значение величины $\tau_0 \equiv \tau(0)$, как следует из указанной выше формулы для $\tau(p)$, обеспечивается соответствующим выбором числовой величины $A^2 v a^{2(1+s-2\nu)}$, в которой $1 + s - 2\nu < 0$.

Обратимся теперь к формуле (40) и выполним асимптотическую оценку плотности $\mathcal{W}_n(\mathbf{r})$, когда $n \rightarrow \infty$, но значение r при этом остается фиксированным. С этой целью в интегралах формулы (40) удобно ввести новую переменную интегрирования ξ посредством равенства $\zeta - 1 = \tau_0 a^{-2\nu} \xi$, вследствие которого из (46) следует

$$\xi = (a\eta)^{2\nu} + O(A^3 v^2 \eta^{2(3\nu-s-1)}), \quad \eta \rightarrow 0, \quad (47)$$

а контур интегрирования $\bar{\gamma}$ в (40) по этой переменной тогда будет расположен в ее правой полуплоскости. Теперь проведем разрез в комплексной плоскости переменной ξ вдоль ее отрицательной вещественной оси и в обоих интегралах формулы (40) сдвинем контур интегрирования $\bar{\gamma}$ бесконечно далеко в левую полуплоскость, обходя особые точки подынтегральных функций, среди которых точка $\xi = 0$ имеет наибольшую вещественную часть. Поэтому наибольший вклад в величину $\mathcal{W}_n(\mathbf{r})$ при $n \rightarrow \infty$ вносит результат интегрирования в (40) по той части контура $\bar{\gamma}$, которая охватывает указанный разрез $(-\infty, 0]$. Далее, если обозначить через $\xi_- = \xi e^{-i\pi}$ и $\xi_+ = \xi e^{i\pi}$, где $\xi > 0$, значения переменной ξ соответственно на нижнем и на верхнем берегах разреза $(-\infty, 0]$ и в формуле (40) учесть результат интегрирования лишь по контуру, охватывающему этот разрез, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_n(\mathbf{r}) &\sim \left[\int_0^\infty e^{-n\tau_0 a^{-2\nu} \xi} (\mathcal{V}(\eta_+, 0) - \mathcal{V}(\eta_-, 0)) d\xi \right]^{-1} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty e^{-n\tau_0 a^{-2\nu} \xi} (\hat{\mathcal{V}}(\eta_+, r) - \hat{\mathcal{V}}(\eta_-, r)) d\xi, \quad n \rightarrow \infty,\end{aligned} \quad (48)$$

а переменные $\eta_- = \eta_-(\xi)$ и $\eta_+ = \eta_+(\xi)$ согласно (47) связаны с ξ вблизи точки $\xi = 0$ на нижнем и верхнем берегах разреза $(-\infty, 0]$ как

$$\begin{aligned}\xi e^{-i\pi} &= (a\eta_-)^{2\nu} + O((a\eta_-)^{2(3\nu-s-1)}), \quad \eta_- \rightarrow 0, \\ \xi e^{i\pi} &= (a\eta_+)^{2\nu} + O((a\eta_+)^{2(3\nu-s-1)}), \quad \eta_+ \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Асимптотическая оценка интегралов в (48) при $n \rightarrow \infty$ дает

$$\mathcal{W}_n(\mathbf{r}) \sim C_0 \frac{(r^2 + a^2)^{1-\nu}}{(\tau_0 n)^{(2-\mu)/\nu}} \left[\frac{e^{i\pi/\nu} - e^{-i\pi/\nu}}{e^{i\pi(\mu-1)/\nu} - e^{-i\pi(\mu-1)/\nu}} \right], \quad (49)$$

где C_0 – определенная положительная постоянная. Согласно условию (41) величина, фигурирующая в квадратных скобках асимптотического выражения (49), должна быть положительной. Последнее требование соблюдается при выполнении равенства

$$\frac{\pi}{\nu} + \frac{\pi}{\nu}(1 - \mu) = 2\pi k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

которое совместимо с условием $\nu = \mu + s$ лишь для $k = 1$. Отсюда находим

$$\mu = \frac{2}{3}(1 - s) = \frac{4 - d}{3}, \quad \nu = \frac{s + 2}{3} = \frac{d + 2}{6}.$$

Таким образом, искомая асимптотика плотности $\mathcal{W}_n(\mathbf{r})$ при $n \rightarrow \infty$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{W}_n(\mathbf{r}) \sim C_0 (r^2 + a^2)^{(1-s)/3} (\tau_0 n)^{-2}.$$

Здесь следует отметить, что отличие поведения последнего выражения от асимптотики плотности нормального распределения при $n \rightarrow \infty$ становится менее существенным, когда размерность d растет, приближаясь к $d = 4$. Этот вывод можно объяснить ослаблением эффекта, обусловленного запретом самопересечений траектории, при увеличении пространственной размерности. Теперь в соответствии с приближением (37) для функции $\bar{V}(\zeta, p)$ определим приближение $\bar{G}$ для величины G аналогично равенству (27):

$$\mathcal{V}(\eta, p) = \bar{V}_0(\eta, p) \bar{G}, \quad (50)$$

и проверим будет ли функция $\bar{G}$ удовлетворять в определенном смысле уравнению

$$\bar{G}^{-1} = 1 + \Phi(\eta^2, \rho^2; \bar{\theta}; \bar{G}),$$

аналогичному уравнению (28).

Эту проверку мы проведем при $\eta = 0$ и в окрестности точки $p = 0$, где по предположению находится точка нормировки $p^2 = \lambda$. С этой целью обратимся к формулам (29) и (43) и вычислим асимптотику функции

$$\Phi(0, p^2; \bar{\theta}; \bar{G}) = \bar{V}_0(0, p) [F(1, 0; \bar{\theta}; \mathcal{V}) - F(1, p; \bar{\theta}; \mathcal{V})] \quad (51)$$

при $p^2 \rightarrow 0$. Подставляя в правую часть (51) выражение для $F(\zeta, p; \bar{\theta}; \mathcal{V})$ из (45), приходим к равенству

$$\Phi(0, p^2; \bar{\theta}; \bar{G}) = \bar{V}_0(0, p) [\sigma(0) - \sigma(p)],$$

в котором

$$\sigma(0) - \sigma(p) = A_0 a^{-2\nu} v [\Lambda_{s+1}(r_0 p) - 1] + A_1 a^{-2\nu} v^2 [\bar{K}_1(0) - \Lambda_{s+1}^2(r_0 p) \bar{K}_1(ap)],$$

$$\Lambda_{s+1}(z) = 1 - \frac{z^2}{4(s+2)} + O(z^4), \quad z \rightarrow 0,$$

$$\bar{K}_1(z) = 1 + \frac{z^2}{2} \ln \frac{z}{2} + (2\gamma - 1) \left(\frac{z}{2} \right)^2 + O(z^4 \ln z), \quad z \rightarrow 0.$$

Учитывая в (51) приведенные выше значения функций $\Lambda_{s+1}(z)$ и $\bar{K}_1(z)$, мы приходим к следующему выражению:

$$\Phi(0, p^2; \bar{\theta}; \bar{G}) = -\chi z_0^{-1} a^{-2} v^2 A^3 \ln(a^2 p^2) + \Omega(A, a, r_0) + O(r_0^2 p^2 \ln(a^2 p^2)),$$

когда $p \rightarrow 0$, где не зависящая от p величина $\Omega(A, a, r_0)$ связывает указанные параметры задачи, а χ – некоторое положительное число, зависящее от размерности пространства. Таким образом, с одной стороны, согласно определениям (37) и (50) в малой окрестности точки $p = 0$ имеем

$$\left. \frac{\partial \bar{G}(0, p)}{\partial \ln p^2} \right|_{p^2=\lambda} = \mu, \quad (52)$$

а с другой стороны, функция $\bar{G}(0, p)$ должна удовлетворять уравнению

$$\bar{G}^{-1}(0, p) = 1 + \Phi(0, p^2; \bar{\theta}; \bar{G}) \quad (53)$$

в его дифференциальной форме

$$\left. \frac{\partial \bar{G}(0, p)}{\partial \ln p^2} \right|_{p^2=\lambda} = - \left. \frac{\partial \Phi(0, p^2; \bar{\theta}; \bar{G})}{\partial \ln p^2} \right|_{p^2=\lambda}, \quad (54)$$

согласно РГ-уравнению (34). Следовательно, правые части уравнений (52) и (54) должны совпадать, чтобы выражение (37) с найденными значениями μ и ν можно было рассматривать в качестве исходного приближения для решения основного уравнения. Отсюда находим, что

$$A = \mathcal{C}(d)[z_0 \langle r^2 \rangle v^{-2}]^{1/3},$$

где $\mathcal{C}(d)$ – положительное число, зависящее от размерности пространства $\mathbb{R}^d$.

Теперь мы можем установить явный вид функций $\mathcal{V}(\eta, 0)$ и $\hat{\mathcal{V}}(\eta, \mathbf{r})$ и, следовательно, найти с помощью равенства (40) асимптотику плотности вероятности. Последнюю мы определим с помощью метода перевала, когда $(r/a) \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$, но отношение (r/na) фиксировано и мало. В результате для главного члена асимптотического разложения плотности $\mathcal{W}_n(\mathbf{r})$ при указанных выше условиях имеем

$$\mathcal{W}_n(\mathbf{r}) \sim C_d \langle R \rangle^{-d} Z^{(4-d)D/6} e^{-c_d Z^D},$$

где

$$\langle R \rangle = (\tau_0 n)^{3/(d+2)}, \quad Z \equiv \frac{R}{\langle R \rangle} = \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{(\tau_0 n)^{3/(d+2)}}, \quad D = \frac{d+2}{d-1},$$

а c_d и C_d – вполне определенные положительные числа [10].

Случай $d = 4$ особый и его следует рассматривать отдельно. Тем не менее полученный результат позволяет нам предположить, что в случае $d > 4$ асимптотика плотности вероятности при рассмотренных выше условиях должна иметь форму нормального распределения [11], [12]. Это означает, что в этом случае запрет самопересечений траектории оказывает несущественное влияние на распределение расстояния между концами траектории блуждающей частицы.

4. КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ САМОИЗБЕГАЮЩИХ БЛУЖДЕНИЙ

Обратимся к формулам (25) и (26), связывающим плотность вероятности $W_n(\mathbf{r})$ с функцией $\bar{V}(\zeta, \mathbf{p})$, для которой получено основное уравнение в рассматриваемой задаче. Введем обозначения

$$\bar{Q}_n \equiv \int_{\bar{\gamma}} d\zeta \zeta^n \bar{V}(\zeta, 0), \quad \tilde{Q}(\zeta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Q}_n^{-1} \zeta^n,$$

тогда согласно равенству (3) мы получим

$$EW_n(\mathbf{r}) = (q^{-1} - 1) \int_{\bar{\gamma}} d\zeta \tilde{Q}(\zeta) \hat{V}(q^{-1}\zeta, \mathbf{r}), \quad q^{-1} = 1 + N^{-1}.$$

Аналогично изложенному выше подходу запишем исходное приближение (40) посредством равенства

$$\mathcal{W}_n(\mathbf{r}) = U_n^{-1} \int_{\bar{\gamma}} d\zeta \zeta^n \hat{\mathcal{V}}(\eta, \mathbf{r}),$$

в котором

$$U_n \equiv \int_{\bar{\gamma}} d\zeta \zeta^n \mathcal{V}(\eta, 0), \quad (55)$$

а связь между переменными ζ и η определена в (46). Теперь усредним указанное выражение для $\mathcal{W}_n(\mathbf{r})$ по распределению (2):

$$E\mathcal{W}_n(\mathbf{r}) = (1 - q) \int_{\bar{\gamma}} d\zeta \tilde{U}(q\zeta) \hat{\mathcal{V}}(\eta, \mathbf{r}), \quad (56)$$

где

$$\tilde{U}(\zeta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{-1} \zeta^n.$$

Однако из равенства (55) с помощью формулы обращения имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n U_n = \frac{2\pi}{iz} \mathcal{V}\left(\left(\frac{1-z}{\tau_0 z}\right)^{1/2\nu}, 0\right),$$

откуда получим, что согласно выражению (37) асимптотическое поведение суммы в последнем равенстве описывается следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n U_n \sim \frac{\bar{A}}{i} \left(\frac{\tau_0}{1-z}\right)^{(1+2s)/(2+s)}, \quad z \rightarrow 1 - 0,$$

где $\bar{A} = 2\pi A \bar{K}_{1-\mu}(0)$. Тогда тауберова теорема утверждает, что

$$U_n \sim \frac{\bar{A}}{i\Gamma((1+2s)/(2+s))} \tau_0^{(1+2s)/(2+s)} n^{-(1-s)/(2+s)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

вследствие чего ряд, представляющий функцию $\tilde{U}(q\zeta)$ под знаком интеграла в (56), сходится при условии $0 \leq |\zeta| < q^{-1}$. Так как U_n^{-1} суть коэффициенты ряда, представляющего функцию $\tilde{U}(z)$, то, используя таубернову теорему в обратном порядке, получим

$$\tilde{U}\left(\frac{\zeta}{\zeta_0}\right) \sim \frac{i}{A} \Gamma\left(\frac{3}{2+s}\right) \Gamma\left(\frac{1+2s}{2+s}\right) \tau_0^{-(1+2s)/(2+s)} \left(\frac{\zeta_0}{\zeta_0 - \zeta}\right)^{3/(2+s)}, \quad (57)$$

$$\zeta \rightarrow \zeta_0 \equiv q^{-1}.$$

Поскольку наибольший интерес здесь представляет поведение функции $\text{EW}_n(\mathbf{r})$ для больших значений r/a и N , то в силу свойств функции $\hat{\mathcal{V}}(\eta, \mathbf{r})$ главный вклад в величину интеграла в (56) вносит область интегрирования с малыми значениями $|\zeta_0 - \zeta|$ или $|N^{-1} - \tau_0 \eta^{2\nu}|$ согласно (46). Поэтому для оценки интеграла в (56) при $r/a \gg 1$ и $N \gg 1$ мы воспользуемся асимптотическим выражением функции $\tilde{U}(\zeta/\zeta_0)$ в (57) и запишем формулу (56) в виде

$$\text{EW}_n(\mathbf{r}) \sim \frac{\nu C}{i(1-s)NR^{2\nu}\tau_0^{(1+2s)/(2+s)}} \frac{d}{d\zeta_0} \int_{\bar{\gamma}} d\zeta (\zeta_0 - \zeta)^{-(1-s)/(2+s)} \overline{K}_\nu(\eta R), \quad (58)$$

где

$$C = \frac{3}{(2\pi)^{s+2} \overline{K}_{1-\mu}(0)} \Gamma\left(\frac{3}{2+s}\right) \Gamma\left(\frac{1+2s}{2+s}\right).$$

Для оценки интеграла в (58) проведем разрез в комплексной плоскости переменной ζ по лучу $[\zeta_0, \infty)$ и сдвинем контур интегрирования $\bar{\gamma}$ бесконечно далеко в правую полуплоскость. Тогда, учитывая экспоненциальный характер стремления к нулю подынтегральной функции при $\zeta \rightarrow +\infty$, мы получим после интегрирования по указанному контуру искомый результат:

$$\text{EW}_n(\mathbf{r}) \sim \frac{C}{1-s} \sin\left(\frac{1-s}{2+s}\pi\right) (\tau_0 N)^{-d/2\nu} J\left(\frac{R}{(\tau_0 N)^{1/2\nu}}\right)$$

– асимптотику плотности вероятности расстояния r между концами траектории частиц канонического ансамбля, блуждающих без самопересечений в $\mathbb{R}^d$, где

$$J(x) = \int_0^\infty dt t^{-(1-s)/(2+s)} \overline{K}_{1-\nu}(x(1+t)^{1/2\nu})$$

– монотонно убывающая функция в области $(0, \infty)$.

Список литературы

- [1] К. Хуанг, *Статистическая механика*, Мир, М., 1966.
- [2] М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, М., 1977.
- [3] В. И. Алхимов, “ d -Мерная модель канонического ансамбля открытых струн”, *ТМФ*, **180:1** (2014), 125–144.
- [4] В. И. Алхимов, “Эффект исключенного объема в статистике самоизбегающих блужданий”, *УФН*, **164:6** (1994), 561–601.
- [5] Е. Титчмарш, *Теория функций*, Наука, М., 1980.
- [6] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1967.

- [7] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1976.
- [8] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [9] M. Gell-Mann, F. E. Low, “Quantum electrodynamics at small distances”, *Phys. Rev.*, **95**:5 (1954), 1300–1312.
- [10] V. I. Alkhimov, “Self-avoiding random walk in $d < 4$ dimensions”, *Phys. Lett. A*, **133**:1–2 (1988), 15–17.
- [11] D. Bridges, T. Spencer, “Self-avoiding walk in 5 or more dimensions”, *Commun. Math. Phys.*, **97**:1 (1985), 125–148.
- [12] T. Hara, G. Slade, “The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions”, *Rev. Math. Phys.*, **4**:2 (1992), 235–327.

Поступила в редакцию 25.01.2016,
после доработки 14.02.2016