Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Макаров, В. И. Матвеев, Ионизация в двухмодовом квантованном электромагнитном поле, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 1, 25–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9157>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:46:47

© 2017 г.

Д. Н. Макаров*, В. И. Матвеев*

ИОНИЗАЦИЯ В ДВУХМОДОВОМ КВАНТОВАННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Найдено аналитическое решение уравнения Шредингера для электрона в двухмодовом квантованном электромагнитном поле. Полученное решение позволяет рассчитывать спектры фотоэлектронов и скорости ионизации атомов в сильных электромагнитных полях.

Ключевые слова: квантованное электромагнитное поле, двухмодовое электромагнитное поле, ионизация, уравнение Шредингера, аналитическое решение, фотон, атом.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9157>

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование ионизации атома электромагнитным полем является важной частью современной физики. Несмотря на достаточно длительный период изучения этого процесса [1]–[3], теория ионизации атома активно развивается в настоящее время [4]. Такое развитие, в первую очередь, связано с созданием мощных лазеров, напряженность поля которых может быть много больше значений напряженности атомных полей (см. [5], где $\epsilon \sim 10^{12}$ В см⁻¹), и проведением численных расчетов. Кроме того, в настоящее время активно развиваются методы генерации ультракоротких импульсов, длительность которых уже приблизилась к аттосекундным масштабам (длительность импульса $\sim 10^{-18}$ с), а также исследуется их взаимодействие с веществом [6]. В теоретическом описании взаимодействия электромагнитного поля с атомами вещества в основном используется классическое электромагнитное поле [1], [4], при этом не учитываются квантовые свойства электромагнитного поля. Развитие квантовой теории ионизации (атом и электромагнитное поле неклассические) является фундаментальной задачей современной физики, поскольку может привести к появлению совершенно новых, неизученных явлений. Такое развитие стимулировалось созданием теории неклассических состояний электромагнитного поля и их экспериментальным обнаружением [7], [8].

Работа выполнена в рамках КГЗ Министерства образования и науки РФ (N 3.1726.2014/К), а также при частичной поддержке РФФИ (грант № 15-02-01894) и стипендии Президента РФ (СП-1800.2015.1).

*Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия. E-mail: makarovd0608@yandex.ru, mezon98@mail.ru

В настоящей работе рассмотрено взаимодействие сильного двухмодового квантованного электромагнитного поля с атомом. В реальности взаимодействие атома с двухмодовым электромагнитным полем можно представить как взаимодействие атома в поле двух скрещенных лазерных полей. Если напряженность двухмодового электромагнитного поля много больше атомного, то электрон в атоме можно считать свободным, что позволяет получить волновую функцию такой системы в аналитическом виде. Исследование уравнения Шредингера для атома в квантованном двухмодовом электромагнитном поле является новым и достаточно интересным не только с прикладной, но и с фундаментальной точки зрения, поскольку влияние двухмодового поля на электрон невозможно описать в рамках одномодового поля в случае сильных электромагнитных полей. Ионизация, возникающая при взаимодействии одномодового сильного электромагнитного поля с атомом, была рассмотрена в работе [9], где показано, что полное, квантово-механическое рассмотрение приводит к новым эффектам в фотоионизации. В работе [10] исследована динамика модельной атомной системы в одномодовом квантованном поле. Отметим, что впервые похожая задача в случае одномодового электромагнитного поля для уравнения Дирака была решена в [11], а позднее в работе [12]. Нерелятивистское рассмотрение для одномодового электромагнитного поля впервые было выполнено в работе [13]. Следует отметить, что работа [9] близка к нашей, отличие только в том, что у нас электромагнитное поле двухмодовое. На первый взгляд может показаться, что введение дополнительной моды не сильно отразится на поведении атомной системы в сильном электромагнитном поле. Нами показано, что наличие второй моды приводит к существенному изменению волновой функции системы “электрон в атоме + электромагнитное поле”, что делает невозможным описание поведения такой системы в терминах волновой функции одномодового поля. Поиск волновых функций для таких систем – достаточно сложная задача, основной метод решения ее состоит в диагонализации гамильтониана, что и было сделано нами в рассматриваемом случае. Некоторые общие вопросы, связанные с теорией поведения таких квантовых систем, можно найти в [7]–[11].

Изучение процессов фотоионизации в квантованном электромагнитном поле затруднено по сравнению с классическим электромагнитным полем, поскольку уравнения Шредингера в первом случае значительно сложнее, чем во втором. Известно, что даже в дипольном случае не существует аналитической волновой функции электрона в атоме при взаимодействии с классическим электромагнитным полем. Численное решение уравнения Шредингера в случае классического электромагнитного поля достаточно сложное и в сильных электромагнитных полях не приводит к хорошим численным результатам [4]. Поэтому поиск аналитических решений для квантованного электромагнитного поля является актуальным.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим взаимодействие двухмодового электромагнитного поля с электроном в атоме. Уравнение Шредингера в этом случае имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}} \right)^2 + \hat{H}_f + U(\mathbf{r}) \right\} \Psi, \quad (1)$$

где m_e , $-e$ – масса и заряд электрона соответственно,

$$\hat{H}_f = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{u}} \hbar \omega \left(\hat{a}_{\mathbf{k}, \mathbf{u}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}, \mathbf{u}} + \frac{1}{2} \right)$$

– гамильтониан электромагнитного поля, $U(\mathbf{r})$ – атомный потенциал, $\hat{a}_{\mathbf{k}, \mathbf{u}}^+$ и $\hat{a}_{\mathbf{k}, \mathbf{u}}$ – операторы рождения и уничтожения фотонов с волновым вектором $\mathbf{k}$ и поляризацией $\mathbf{u}$, а векторный потенциал

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{u}} \sqrt{\frac{2\pi c^2 \hbar}{\omega V_f}} (\mathbf{u} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \hat{a}_{\mathbf{k}, \mathbf{u}} + \mathbf{u}^* e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \hat{a}_{\mathbf{k}, \mathbf{u}}^+). \quad (2)$$

Суммирование здесь и выше ведется по всем возможным значениям волнового вектора $\mathbf{k}$ и поляризации $\mathbf{u}$. В случае двухмодового электромагнитного поля $\sum_{\mathbf{k}, \mathbf{u}}$ заменится на сумму двух слагаемых, где у первой моды поля волновой вектор $\mathbf{k}_1$ с поляризацией $\mathbf{u}_1$, а у второй моды волновой вектор $\mathbf{k}_2$ с поляризацией $\mathbf{u}_2$. Далее, для удобства, перейдем в атомную систему единиц $\hbar = 1$, $m_e = 1$, $e = 1$. Теперь рассмотрим выражение (1) в дипольном приближении. В этом приближении для двухмодового электромагнитного поля векторный потенциал, выраженный через полевые переменные, имеет вид

$$\hat{\mathbf{A}} = a_1 \mathbf{u}_1 q_1 + a_2 \mathbf{u}_2 q_2, \quad (3)$$

где $a_1 = \sqrt{4\pi c^2 / \omega_1 V_f}$, $a_2 = \sqrt{4\pi c^2 / \omega_2 V_f}$, а ω_1 , ω_2 – частоты первой и второй мод соответственно (будем условно считать $\omega_2 > \omega_1$, если частоты полей разные), V_f – объем квантования, а q_1 , q_2 – полевые переменные первой и второй мод соответственно. В итоге выражение (1) примет вид

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2} \left(-i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \beta_1 \mathbf{u}_1 q_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 q_2 \right)^2 + \frac{\omega_1}{2} \left(q_1^2 - \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} \right) + \frac{\omega_2}{2} \left(q_2^2 - \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right) + U(\mathbf{r}) \right\} \Psi, \quad (4)$$

где $\beta_1 = \sqrt{4\pi / \omega_1 V_f}$, $\beta_2 = \sqrt{4\pi / \omega_2 V_f}$. Далее будем считать, что электромагнитное поле настолько сильное, что потенциалом $U(\mathbf{r})$ можно пренебречь. В итоге нам надо решить стационарное уравнение Шредингера $\hat{H}\Psi = E\Psi$, где

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(-i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \beta_1 \mathbf{u}_1 q_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 q_2 \right)^2 + \frac{\omega_1}{2} \left(q_1^2 - \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} \right) + \frac{\omega_2}{2} \left(q_2^2 - \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right). \quad (5)$$

Например, если считать, что второго поля нет ($\beta_2 = 0$ и $\omega_2 = 0$), то получим выражение, рассмотренное в работе [9] для одномодового поля.

Скорость ионизации w можно рассчитать по формуле [1]

$$w = 2\pi \int |T_{f,i}|^2 \delta(E_f - E_i) dk, \quad (6)$$

где $T_{f,i}$ – матричный элемент перехода системы из начального состояния с энергией E_i в конечное состояние с энергией E_f . В начальном состоянии мы будем

пренебрегать влиянием электромагнитного поля на волновую функцию электрона в атоме, а в конечном состоянии будем точно учитывать взаимодействие электрона с электромагнитным полем в континууме, но при этом пренебрегать взаимодействием с атомным потенциалом.

Таким образом, нужно решить уравнение Шредингера с гамильтонианом (5), после этого по формуле (6) можно рассчитать скорость ионизации.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Рассмотрим стационарное уравнение Шредингера с гамильтонианом (5). Представим рассматриваемое дифференциальное уравнение в виде

$$\hat{H}'\Psi' = E\Psi', \quad (7)$$

где $\hat{H}' = \hat{S}\hat{H}\hat{S}^{-1}$, $\Psi' = \hat{S}\Psi$, а $\hat{S}$ – некоторый унитарный оператор, $\hat{S}^{-1}$ – оператор, обратный $\hat{S}$ ($\hat{S}^{-1}\hat{S} = 1$). Найдя решение уравнения Шредингера (7), получим искомую волновую функцию при обратном преобразовании $\Psi = \hat{S}^{-1}\Psi'$. Далее введем такую систему координат, где по оси z направлен некоторый вектор $\mathbf{S}$, а в плоскости xOz лежит вектор $\mathbf{\Sigma}$, где векторы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{\Sigma}$ определены ниже. Решение будем искать в виде $\Psi = \hat{S}^{-1}\Psi'$, где оператор

$$\begin{aligned} \hat{S} = & \exp\left\{i\xi_2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q_2} + i\lambda_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial q_2} + i\xi_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial q_1}\right\} \exp\left\{-i\lambda_2 x \frac{\partial}{\partial z}\right\} \times \\ & \times \exp\left\{-i\xi q_2 \frac{\partial}{\partial q_1}\right\} \exp\left\{i\eta q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}\right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Следует отметить, что выбор оператора $\hat{S}$ в виде (8) производится в результате анализа возможности диагонализации стационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом (5). В выражении (8) постоянные величины ξ_1 , ξ_2 , ξ , η , λ_1 , λ_2 являются неизвестными, мы найдем их ниже.

Теперь наша задача заключается в нахождении таких ξ_1 , ξ_2 , ξ , η , λ_1 , λ_2 , чтобы гамильтониан $\hat{H}'$ в уравнении (7) стал диагональным. Для этого введем вспомогательный гамильтониан

$$\hat{\tilde{H}} = \exp\left\{-i\xi q_2 \frac{\partial}{\partial q_1}\right\} \exp\left\{i\eta q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}\right\} \hat{H} \exp\left\{-i\eta q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}\right\} \exp\left\{i\xi q_2 \frac{\partial}{\partial q_1}\right\}. \quad (9)$$

Подберем такие значения ξ , η , чтобы “перекрестных” значений по q_1 и q_2 не было (т. е. чтобы пропало произведение $q_1 q_2$):

$$\xi = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}, \quad \eta = i \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} - \alpha}{\gamma}.$$

Проведя необходимые выкладки, получим

$$\hat{\tilde{H}} = -\frac{1}{2}\Delta - i q_1 \nabla \mathbf{S} - i q_2 \nabla \mathbf{\Sigma} + q_1^2 W^2 + q_2^2 \Lambda^2 - V^2 \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} - L^2 \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \frac{\gamma \beta_1}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \mathbf{u}_1 + \frac{\beta_2}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \right) \mathbf{u}_2, \\
 \mathbf{S} &= \beta_1 \mathbf{u}_1 - \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \beta_2 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} - \alpha}{\gamma} \mathbf{u}_2, \\
 W^2 &= \frac{\omega_2}{\omega_1} (\omega_2 + \beta_2^2) \left(1 + \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^2 - \frac{\alpha \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}{\gamma^2} \right) - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}{2}, \\
 \Lambda^2 &= \frac{1}{4} (\omega_2 + \beta_2^2) \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \right) + \frac{1}{8} \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\gamma^2}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}, \\
 V^2 &= \frac{\omega_1}{4} \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \right), \quad L^2 = \omega_2 \left(1 + \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^2 \left(1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}{\alpha} \right) \right), \\
 \alpha &= \frac{\omega_2}{\omega_1} (\omega_2 + \beta_2^2) - (\omega_1 + \beta_1^2), \quad \gamma = 2 \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \beta_1 \beta_2 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Далее найдем гамильтониан

$$\begin{aligned}
 \hat{H}' &= \exp \left\{ i \xi_2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q_2} + i \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial q_2} + i \xi_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial q_1} \right\} \exp \left\{ -i \lambda_2 x \frac{\partial}{\partial z} \right\} \hat{H} \times \\
 &\times \exp \left\{ i \lambda_2 x \frac{\partial}{\partial z} \right\} \exp \left\{ -i \xi_2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q_2} - i \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial q_2} - i \xi_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial q_1} \right\}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Выбрав неизвестные параметры $\xi_1, \xi_2, \lambda_1, \lambda_2$ таким образом, чтобы гамильтониан $\hat{H}'$ стал диагональным, получим

$$\begin{aligned}
 \hat{H}' &= -\frac{1}{2} \Delta + q_1^2 W^2 + q_2^2 \Lambda^2 - V^2 \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} - L^2 \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + \\
 &+ \left(\frac{S^2}{4W^2} + \frac{1}{2} \frac{(\Sigma \mathbf{S}/S)^2}{2\Lambda^2 - ((\Sigma \times \mathbf{S})/S)^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\Sigma \times \mathbf{S}}{S} \right)^2 \frac{1}{4\Lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2},
 \end{aligned} \tag{13}$$

при этом $\xi_1, \xi_2, \lambda_1, \lambda_2$ выбирались в виде

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \frac{S}{2W^2}, & \xi_2 &= \frac{|\Sigma \times \mathbf{S}|}{2S\Lambda^2}, \\
 \lambda_1 &= \frac{\Sigma \mathbf{S}}{S} \frac{1}{2\Lambda^2 - (\Sigma \times \mathbf{S}/S)^2}, & \lambda_2 &= -i \frac{1}{S^2} \frac{|\Sigma \times \mathbf{S}| \Sigma \mathbf{S}}{2\Lambda^2 - (\Sigma \times \mathbf{S}/S)^2}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Решить уравнение Шредингера с гамильтонианом (13) не представляет труда, поскольку все переменные разделены, и эти решения имеют вид плоской волны и волновых функций гармонического осциллятора. Сначала запишем собственное значение энергии гамильтониана (13):

$$\begin{aligned}
 E_{\mathbf{k},m,n} &= \frac{k_x^2}{2} \left(1 - \frac{(\Sigma \times \mathbf{S})^2}{2S^2\Lambda^2} \right) + \frac{k_z^2}{2} \left(1 - \left(\frac{S^2}{2W^2} + \frac{1}{S^2} \frac{(\Sigma \mathbf{S})^2}{2\Lambda^2 - ((\Sigma \times \mathbf{S})/S)^2} \right) \right) + \\
 &+ \frac{k_y^2}{2} + 2VW \left(m + \frac{1}{2} \right) + 2L\Lambda \left(n + \frac{1}{2} \right),
 \end{aligned} \tag{15}$$

где k_x, k_y, k_z – проекции волнового вектора свободной частицы $\mathbf{k}$ на соответствующие оси координат, а $n, m = 0, 1, 2, \dots$ – квантовые числа. Далее выпишем собственную волновую функцию гамильтониана (13):

$$\Psi'_{\mathbf{k},m,n} = C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} C_n e^{-(\Lambda/L)(q_2^2/2)} H_n\left(q_2 \sqrt{\frac{\Lambda}{L}}\right) C_m e^{-(W/V)(q_1^2/2)} H_m\left(q_1 \sqrt{\frac{W}{V}}\right), \quad (16)$$

где $C_{\mathbf{k}}$ – нормировочный множитель для волновой функции электрона, H_n – полиномы Эрмита, а нормировочные волновые функции для электромагнитных полей

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \left(\frac{\Lambda}{L}\right)^{-1/4}, \quad C_m = \frac{1}{\sqrt{2^m m! \sqrt{\pi}}} \left(\frac{W}{V}\right)^{-1/4}. \quad (17)$$

Для нахождения волновой функции Ψ нужен оператор $\hat{S}^{-1}$, который известен, поскольку известны все параметры в операторе $\hat{S}$. Подействовав оператором $\hat{S}^{-1}$ на волновую функцию Ψ' , достаточно просто получить искомую волновую функцию, поскольку после действия $\hat{S}^{-1}$ на волновую функцию электрона получим операторы смещения. В итоге получим

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{k},m,n} = & C_{\mathbf{k}} C_n C_m e^{-\lambda_2 k_z x + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \exp\left(-\frac{\Lambda}{2L}(q_2 + \lambda_1 k_z + \xi_2 k_x - i\eta q_1)^2\right) \times \\ & \times H_n\left((q_2 + \lambda_1 k_z + \xi_2 k_x - i\eta q_1) \sqrt{\frac{\Lambda}{L}}\right) \times \\ & \times \exp\left(-\frac{W}{2V}(q_1(1 + \xi\eta) + \xi_1 k_z + i\xi q_2)^2\right) \times \\ & \times H_m\left((q_1(1 + \xi\eta) + \xi_1 k_z + i\xi q_2) \sqrt{\frac{W}{V}}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Из выражения (18) видно, что состояние системы, описываемой гамильтонианом (5), нельзя выразить через состояния с заданным числом “чистых” фотонов. Кроме того, полученный результат не может быть выражен через состояние “одетых” фотонов одномодового электромагнитного поля [9]. Также из общего вида выражения (18) следует, что нельзя выделить какую-либо частицу отдельно, и поэтому все частицы этой системы формально взаимодействуют друг с другом.

4. ИОНИЗАЦИЯ АТОМА

При расчете ионизации атома скрещенным лазерным полем необходимо знание следующих параметров системы: средние значения квадратов модулей амплитуд напряженности первого и второго лазерных полей – ϵ_1^2 и ϵ_2^2 . Также нужно выписать закон сохранения энергии, который необходим при расчете скорости ионизации (6).

Определим напряженности поля (см., например, [9]):

$$\omega_1 m_0 = \frac{\epsilon_1^2}{8\pi} V_f, \quad \omega_2 n_0 = \frac{\epsilon_2^2}{8\pi} V_f, \quad (19)$$

где m_0, n_0 – число фотонов в первом и втором поле соответственно. Тогда получим, что постоянные β_1 и β_2 , которые присутствуют в выражении (18), можно выразить

через число фотонов и напряженность поля в виде

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1^2}{2\omega_1^2 m_0}}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2^2}{2\omega_2^2 n_0}}. \quad (20)$$

Выражения (20) необходимы в таком виде, поскольку в (18) пропадает зависимость от V_f .

Далее рассмотрим разность $E_f - E_i$ в (6), где $E_i = -E_\delta + \omega_1(m_0 + 1/2) + \omega_1(n_0 + 1/2)$, а E_f определяется выражением (15), где $E_\delta = |E_\delta|$ – энергия электрона в атоме. В большинстве задач при взаимодействии сильного электромагнитного поля с веществом величины n_0 , m_0 следует считать большими, $n_0 \gg 1$ и $m_0 \gg 1$ [9], поэтому все расчеты далее будут выполняться при этих условиях. Рассмотрим $E_f - E_i$, считая, что $n = n_0 - l$, а $m = m_0 - L$, где l , L – количество поглощенных фотонов. Отметим, что о поглощенных фотонах в этой задаче нужно говорить условно, так как в начальном состоянии n_0 , m_0 речь идет о “чистых” фотонах, а в конечном состоянии n , m – об “одетых”. Значения L и l задают все возможные процессы, разрешенные законом сохранения энергии, и, суммируя по L и l , можно получить полную скорость ионизации. Покажем, что даже при $n_0 \rightarrow \infty$, $m_0 \rightarrow \infty$ разность энергий $E_f - E_i$ будет конечной величиной (хотя по отдельности величины E_f и E_i стремятся к бесконечности). Например, для одномодового поля в работе [9] показано, что итоговый результат для скорости ионизации при $n_0 \gg 1$ не зависит от n_0 . Рассмотрим два случая, которые интересны при исследовании ионизации атома: 1) два одинаковых скрещенных лазерных поля при $\alpha \ll \gamma$; 2) скрещенные лазерные поля при $\alpha \gg \gamma$. Остальные случаи рассматривать не будем, поскольку скорость ионизации зависит от числа фотонов в поле, а нас интересует случай, когда мы знаем только частоту лазерного поля и его напряженность. При $\alpha \gg \gamma$ также можно рассмотреть случай двух одинаковых скрещенных полей, но при этом считать, что $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega$.

В первом случае одинаковых скрещенных полей имеем $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = \epsilon^2$, $n_0 = m_0 = s$. В итоге закон сохранения энергии имеет вид

$$E_f - E_i = \frac{k^2}{2} + E_\delta + \frac{\epsilon^2}{2\omega^2} - \omega(L + l), \quad (21)$$

а основные параметры для этого случая

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, & \beta_1 &= \beta_2 = \beta, & \gamma &= 2\beta^2 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2, & \Lambda &= \frac{\sqrt{\omega}}{2}, & L &= \sqrt{\omega}, \\ W &= \sqrt{\omega}, & V &= \frac{\sqrt{\omega}}{2}, & \xi_1 &= \frac{\beta}{\sqrt{2}\omega} \sqrt{1 - |\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2|}, & \xi_2 &= \frac{\sqrt{2}\beta}{\omega} \sqrt{1 + |\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2|}, & (22) \\ \Sigma \mathbf{S} &= 0, & \xi &= \frac{i}{2} \frac{\gamma}{|\gamma|}, & \eta &= i \frac{\gamma}{|\gamma|}. \end{aligned}$$

Во втором случае, когда $\alpha \gg \gamma$, закон сохранения энергии имеет вид

$$E_f - E_i = \frac{k^2}{2} + E_\delta + \frac{\epsilon_1^2}{4\omega_1^2} + \frac{\epsilon_2^2}{4\omega_2^2} - \omega_1 L - \omega_2 l, \quad (23)$$

а основные параметры –

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma} &= \beta_2 \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{S} = \beta_1 \mathbf{u}_1, \quad W^2 = \frac{\omega_1}{2}, \quad \Lambda^2 = \frac{\omega_2}{2}, \quad V^2 = \frac{\omega_1}{2}, \quad L^2 = \frac{\omega_2}{2}, \\ \xi_1 &= \frac{\beta_1}{\omega_1}, \quad \xi_2 = \beta_2 \frac{|\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2|}{\omega_2}, \quad \lambda_1 = \frac{\beta_2 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2}{\omega_2}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta_2^2 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 |\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2|}{\omega_2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее выпишем матричный элемент в общем виде для рассмотренных случаев:

$$T_{f,i} = F(\mathbf{k}) \langle \Phi_{\mathbf{k},m,n} | \hat{I} | \Phi_0 \rangle, \quad (25)$$

где оператор взаимодействия

$$\begin{aligned} \hat{I} &= (\beta_1 q_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 q_2 \mathbf{u}_2) \mathbf{k} + \frac{1}{2} (\beta_1 q_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 q_2 \mathbf{u}_2)^2, \\ F(\mathbf{k}) &= C_{\mathbf{k}} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \phi_0(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (26)$$

В случае скрещенных двух одинаковых лазерных полей

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{k},m,n} &= C_n C_m \exp \left[- \left(\frac{q_1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{|\gamma|} q_2 + \xi_1 k_z \right)^2 \right] \times \\ &\times \exp \left[- \frac{1}{4} \left(q_2 + \frac{\gamma}{|\gamma|} q_1 + \xi_2 k_x \right)^2 \right] \times \\ &\times H_m \left(\sqrt{2} \left(\frac{q_1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{|\gamma|} q_2 + \xi_1 k_z \right) \right) H_n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_2 + \frac{\gamma}{|\gamma|} q_1 + \xi_2 k_x \right) \right), \\ \Phi_0 &= C_s^2 e^{-q_1^2/2} e^{-q_2^2/2} H_s(q_1) H_s(q_2). \end{aligned} \quad (27)$$

В случае $\alpha \gg \gamma$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{k},m,n} &= \exp \left[- \frac{1}{2} \left(q_1 + \frac{\beta_1}{\omega_1} k_z - \frac{\gamma}{2\alpha} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} q_2 \right)^2 \right] \times \\ &\times \exp \left[- \frac{1}{2} \left(q_2 + k_z \lambda_1 + k_x \xi_2 + \frac{\gamma}{2\alpha} \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} q_1 \right)^2 \right] \times \\ &\times H_m \left(q_1 + \frac{\beta_1}{\omega_1} k_z - \frac{\gamma}{2\alpha} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} q_2 \right) \times \\ &\times H_n \left(q_2 + k_z \lambda_1 + k_x \xi_2 + \frac{\gamma}{2\alpha} \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} q_1 \right), \\ \Phi_0 &= C_{n_0} C_{m_0} e^{-q_1^2/2} e^{-q_2^2/2} H_{m_0}(q_1) H_{n_0}(q_2). \end{aligned} \quad (28)$$

Матричные элементы (25) с волновыми функциями (27) и (28) не вычисляются в аналитическом виде. Численный расчет этих выражений и нахождение приближенных аналитических формул для (25) в настоящей работе не проводились. Заметим, что в выражении (28) нельзя отбросить какой-либо из членов, например $(\gamma/2\alpha)q_1$, несмотря на то что $\gamma \sim 1/\sqrt{nm} \ll 1$ при $n \gg 1$ и $m \gg 1$. Это связано с тем, что основной вклад в интеграл (25) вносят $q_1 \sim \sqrt{m}$ и $q_2 \sim \sqrt{n}$, что в итоге ведет к равнозначности всех членов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе решено уравнение Шредингера для электрона в двухмодовом квантованном электромагнитном поле. Полученное решение позволяет проводить расчеты ионизации атома в двух скрещенных лазерных полях большой интенсивности. Точное решение (18) уравнения Шредингера с гамильтонианом (5) важно не только для теории ионизации, но и с фундаментальной точки зрения, поскольку поведение сложной квантовой системы представлено в аналитическом виде. Кроме того, полученный результат (18) указывает на характер связи рассмотренной системы, в которой все частицы формально взаимодействуют друг с другом. Отметим, что спин электрона не вносит значимой поправки в нерелятивистском случае и его не учитывают [1]–[3]. Действительно, энергия электрона в электромагнитном поле пропорциональна напряженности электромагнитного поля E (в дипольном случае в калибровке “длины” [4], [8]), и энергия, связанная с действием электромагнитного поля на спин частицы, пропорциональна E/c , что пренебрежимо мало.

Список литературы

- [1] Л. В. Келдыш, “Ионизация в поле сильной электромагнитной волны”, *ЖЭТФ*, **47**:5 (1965), 1945–1957.
- [2] В. С. Попов, “Туннельная и многофотонная ионизация атомов и ионов в сильном лазерном поле (теория Келдыша)”, *УФН*, **174**:9 (2004), 921–951.
- [3] Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, “Туннельная и надбарьерная ионизация атомов и ионов в поле лазерного излучения”, *УФН*, **168**:5 (1998), 531–549.
- [4] Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, С. В. Попруженко, В. С. Попов, “Современное развитие теории нелинейной ионизации атомов и ионов”, *УФН*, **185**:1 (2015), 3–34.
- [5] V. Yanovsky, V. Chvykov, G. Kalinchenko, P. Rousseau, T. Planchon, T. Matsuoka, A. Maksimchuk, J. Nees, G. Cheriaux, G. Mourou, K. Krushelnick, “Ultra-high intensity-300-TW laser at 0.1 Hz repetition rate”, *Opt. Express*, **16**:3 (2008), 2109–2114.
- [6] F. Krausz, M. Ivanov, “Attosecond physics”, *Rev. Modern Phys.*, **81**:1 (2009), 163–234.
- [7] Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Наука, М., 2000.
- [8] М. О. Скалли, М. С. Зубайри, *Квантовая оптика*, Физматлит, М., 2003.
- [9] И. А. Гоносков, Г. А. Вугальтер, В. А. Миронов, “Ионизация в квантованном электромагнитном поле”, *ЖЭТФ*, **132**:6 (2007), 1278–1290.
- [10] И. А. Буренков, О. В. Тихонова, “Ионизация и стабилизация атома в квантовом электромагнитном поле”, *Письма в ЖЭТФ*, **97**:6 (2013), 409–414.
- [11] И. Берсон, “Электрон в квантованном поле монохроматической электромагнитной волны”, *ЖЭТФ*, **56**:5 (1969), 1627–1633.
- [12] D. S. Guo, T. Aberg, “Quantum electrodynamical approach to multiphoton ionisation in the high-intensity H field”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **21**:24 (1988), 4577–4585.
- [13] D. S. Guo, G. W. F. Drake, “Stationary solutions for an electron in an intense laser field. I. Single-mode case”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25**:11 (1992), 3383–3397.

Поступила в редакцию 24.01.2016,
после доработки 23.03.2016