Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Рубаков, О кротовых норах в моделях с обобщенными полями галилеонов, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 2, 337–342

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9160>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:07:02

© 2016 г.

В. А. Рубаков^{*†}

О КРотовых НОРАХ В МОДЕЛЯХ С ОБОБЩЕННЫМИ ПОЛЯМИ ГАЛИЛЕОНОВ

Рассмотрен класс теорий с обобщенными полями галилеонов в рамках общей теории относительности в пространстве-времени с числом пространственных измерений больше двух. Показано, что эти теории не допускают стабильных статических сферически-симметричных асимптотически плоских лоренцевых кротовых нор.

Ключевые слова: кротовые норы, поле галилеона.

DOI: 10.4213/tmf9160

1. ВВЕДЕНИЕ И СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Поля галилеонов и их обобщения [1]–[8] могут нарушать изотропное условие энергодоминантности (ИУЭ) без очевидных несогласованностей [6], [7], [9], [10]. Поэтому естественно попытаться использовать такие теории для построения примеров статических сферически-симметричных асимптотически плоских лоренцевых кротовых нор [11]–[15] в классической общей теории относительности, сама возможность существования которых требует нарушения ИУЭ [13], [16], [17].

Наиболее изученный класс теорий с обобщенными полями галилеонов описывается лагранжианами вида [6], [7] (сигнатура метрики есть $(+, -, \dots, -)$)

$$L = -\frac{1}{2\kappa}R + F(\pi, X) + K(\pi, X)\Box\pi, \quad (1)$$

где первое слагаемое – лагранжиан Эйнштейна–Гильберта, $\kappa = 8\pi G$, π – поле галилеона, F и K – произвольные функции и $X = \nabla_\mu \pi \nabla^\mu \pi$, $\Box\pi = \nabla_\mu \nabla^\mu \pi$. Статическая сферически-симметричная кротовая нора в пространстве-времени размерности $d+2$ описывается метрикой

$$ds^2 = a^2(r)dt^2 - dr^2 - c^2(r)\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2)$$

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 14-22-00161.

^{*}Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия. E-mail: rubakov@minus.inr.ac.ru

[†]Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

где x^α и $\gamma_{\alpha\beta}$ – координаты и метрика на единичной d -мерной сфере. Координата r изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, а метрические коэффициенты положительны и ограничены снизу:

$$a(r) \geq a_{\min} > 0, \quad c(r) \geq R_{\min} > 0, \quad (3)$$

где $R_{\min}$ – радиус горловины кротовой норы. Мы рассматриваем асимптотически плоские кротовые норы. Для $d \geq 2$ (размерность пространства-времени больше или равна четырем) поведение метрики вдали от такой кротовой норы имеет вид

$$a \rightarrow a_{\pm}, \quad \frac{c(r)}{r} \rightarrow \pm 1 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \pm\infty, \quad (4)$$

где $a_{\pm}$ – положительные постоянные. Для самосогласованности поле галилеона, поддерживающее кротовую нору, тоже должно быть статическим и сферически-симметричным, $\pi = \pi(r)$.

В работе [18] отмечалось, что трудно состыковать свойства тензора энергии-импульса поля галилеона, который мог бы поддерживать кротовую нору, и требование стабильности (отсутствия духов и градиентных неустойчивостей среди возмущений поля галилеона над предполагаемым решением $\pi(r)$). В случае трехмерного пространства-времени ($d = 1$) анализ работы [18] был достаточен для того, чтобы исключить существование кротовых нор при очень мягких условиях на асимптотическое поведение производной $\pi'(r)$ на пространственной бесконечности (см. также работу [19]). Однако аргументы работы [18], относящиеся к кротовым норам в пространствах более высоких размерностей, были не вполне однозначными.

В настоящей работе мы рассматриваем пространственно-временные многообразия размерности больше трех ($d \geq 2$). Наша цель – завершить анализ и показать, что в теориях с лагранжианами вида (1) стабильные кротовые норы со свойствами (2)–(4) отсутствуют. Наша аргументация носит весьма общий характер; в частности, не требуется делать никаких предположений об асимптотическом поведении $\pi(r)$ при $r \rightarrow \pm\infty$.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 обсуждаются общие свойства сферически-симметричных полей галилеонов и возмущений над ними. Наш основной результат приведен в разделе 3, а раздел 4 содержит заключительные замечания.

2. ПОЛЕ ГАЛИЛЕОНА И ВОЗМУЩЕНИЯ НАД НИМ

Тензор энергии-импульса поля галилеона имеет вид

$$T_{\mu\nu} = 2F_X \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi + 2K_X \square \pi \cdot \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi - \partial_\mu K \partial_\nu \pi - \partial_\nu K \partial_\mu \pi - g_{\mu\nu} F + g_{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \partial_\lambda K \partial_\rho \pi,$$

где $F_\pi = \partial F / \partial \pi$, $F_X = \partial F / \partial X$ и т.д., а $\partial_\mu K = K_\pi \partial_\mu \pi + 2K_X \nabla^\lambda \pi \nabla_\mu \nabla_\lambda \pi$. Его компоненты для статического сферически-симметричного случая, когда $\pi = \pi(r)$, равны

$$T_0^0 = -F - K_\pi \pi'^2 + 2\pi'^2 \pi'' K_X, \quad (5a)$$

$$T_r^r = -2\pi'^2 F_X - F + K_\pi \pi'^2 + 2K_X \pi'^3 \left(\frac{a'}{a} + d \frac{c'}{c} \right), \quad (5b)$$

$$T_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha T_0^0. \quad (5b)$$

Для вывода квадратичного лагранжиана, описывающего возмущения поля галилеона с большими импульсами и частотами, запишем полное уравнение поля

$$(-2F_X + 2K_\pi - 2K_{X\pi} \nabla_\mu \pi \nabla^\mu \pi - 2K_X \square \pi) \square \pi + (-4F_{XX} + 4K_{X\pi}) \nabla^\mu \pi \nabla^\nu \pi \nabla_\mu \nabla_\nu \pi - \\ - 4K_{XX} \nabla^\mu \pi \nabla^\nu \pi \nabla_\mu \nabla_\nu \pi \square \pi + 4K_{XX} \nabla^\nu \pi \nabla^\lambda \pi \nabla_\mu \nabla_\nu \pi \nabla^\mu \nabla_\lambda \pi + \\ + 2K_X \nabla^\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\mu \nabla_\nu \pi + 2K_X R_{\mu\nu} \nabla^\mu \pi \nabla^\nu \pi + \dots = 0;$$

здесь и далее многоточие обозначает слагаемые без вторых производных. Последнее слагаемое в этом уравнении отражает особенность теорий с полем галилеона: уравнение для поля галилеона содержит вторые производные метрики, а уравнения Эйнштейна содержат вторые производные поля галилеона [6] (см. также работу [7]). Это же свойство имеет место для линеаризованных уравнений, описывающих возмущения поля галилеона. Тем не менее линеаризованная теория может быть сведена к теории, где имеются только возмущения поля галилеона. Прием состоит в том, чтобы отынтегрировать возмущения метрики из уравнений для возмущений поля галилеона, используя уравнения Эйнштейна [6].

Линеаризованные уравнения для возмущений поля галилеона могут быть записаны в следующем виде:

$$-2[F_X + K_X \square \pi - K_\pi + \nabla_\nu (K_X \nabla^\nu \pi)] \nabla_\mu \nabla^\mu \chi - \\ -2[2(F_{XX} + K_{XX} \square \pi) \nabla^\mu \pi \nabla^\nu \pi - 2(\nabla^\mu K_X) \nabla^\nu \pi - 2K_X \nabla^\mu \nabla^\nu \pi] \nabla_\mu \nabla_\nu \chi + \\ + 2K_X R_{\mu\nu}^{(1)} \nabla^\mu \pi \nabla^\nu \pi + \dots = 0, \quad (6)$$

где π – фоновое решение, χ – возмущение поля галилеона над этим решением и $R_{\mu\nu}^{(1)}$ линеен по возмущениям метрики. Используем теперь уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu},$$

или

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{d-1} g_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda \right),$$

линеаризуем тензор энергии-импульса и получим для последнего слагаемого в уравнении (6) выражение

$$2K_X R_{\mu\nu}^{(1)} \nabla^\mu \pi \nabla^\nu \pi = -2\kappa K_X^2 \left(-\frac{2(d-2)}{d-1} X^2 \square \chi + 4X \nabla^\mu \pi \nabla^\nu \pi \nabla_\mu \nabla_\nu \chi \right) + \dots$$

Линеаризованное уравнение для возмущений поля галилеона можно получить из следующего квадратичного лагранжиана:

$$L^{(2)} = [F_X + K_X \square \pi - K_\pi + \nabla_\nu (K_X \nabla^\nu \pi)] \nabla_\mu \chi \nabla^\mu \chi + \\ + [2(F_{XX} + K_{XX} \square \pi) \nabla^\mu \pi \nabla^\nu \pi - 2(\nabla^\mu K_X) \nabla^\nu \pi - 2K_X \nabla^\mu \nabla^\nu \pi] \nabla_\mu \chi \nabla_\nu \chi - \\ - \frac{2(d-2)}{d-1} \kappa K_X^2 X^2 \nabla_\mu \chi \nabla^\mu \chi + 4\kappa K_X^2 X \nabla^\mu \pi \nabla^\nu \pi \nabla_\mu \chi \nabla_\nu \chi.$$

В случае статического сферически-симметричного фонового решения имеем

$$L^{(2)} = a^{-2} \mathcal{G}^{00} \dot{\chi}^2 - \mathcal{G}^{rr} (\chi')^2 - c^{-2} \mathcal{G}^{\Omega\gamma\alpha\beta} \partial_{\alpha\chi} \partial_{\beta\chi} + \dots,$$

где невыписанные слагаемые не содержат производных поля χ , а эффективная метрика равна

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{00} &= F_X - K_\pi - K'_X \pi' - 2K_X \pi'' - 2dK_X \frac{c'}{c} \pi' - \frac{2(d-1)}{d} \kappa K_X^2 \pi'^4, \\ \mathcal{G}^\Omega &= F_X - K_\pi - K'_X \pi' - 2K_X \pi'' - 2(d-1)K_X \frac{c'}{c} \pi' - 2K_X \frac{a'}{a} \pi' - \frac{2(d-1)}{d} \kappa K_X^2 \pi'^4, \\ \mathcal{G}^{rr} &= F_X - 2F_{XX} \pi'^2 - K_\pi + K'_X \pi' - 2K_X \pi' \left(\frac{a'}{a} + d \frac{c'}{c} \right) + \\ &\quad + 2K_{XX} \pi'^2 \pi'' + 2K_{XX} \pi'^3 \left(\frac{a'}{a} + d \frac{c'}{c} \right) + \frac{2(d+1)}{d} \kappa K_X^2 \pi'^4.\end{aligned}$$

Фоновое решение устойчиво, только если $\mathcal{G}^{00} > 0$, $\mathcal{G}^{rr} \geq 0$, $\mathcal{G}^\Omega \geq 0$ для всех r , в противном случае имеются духи или градиентные неустойчивости. Далее мы покажем, что свойство $\mathcal{G}^{00} > 0$ не может выполняться для несингулярной кротовой норы.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Комбинация уравнений Эйнштейна дает

$$T^0_0 - T^r_r = -\frac{d}{\kappa} \frac{a}{c} \left(\frac{c'}{a} \right)'. \quad (7)$$

Скомбинируем уравнения (5a), (5b) и (7) и получим соотношение

$$2\frac{c}{a} \pi'^2 \mathcal{G}^{00} = -\frac{d}{dr} \left(2\frac{c}{a} K_X \pi'^3 + \frac{d}{\kappa} \frac{c'}{a} \right) - \frac{2(d-1)}{d} \kappa K_X \pi'^3 \left(2\frac{c}{a} K_X \pi'^3 + \frac{d}{\kappa} \frac{c'}{a} \right). \quad (8)$$

Теперь естественно ввести переменную

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{c^{d-1}} \left(2\frac{c}{a} K_X \pi'^3 + \frac{d}{\kappa} \frac{c'}{a} \right)$$

и представить соотношение (8) в виде

$$\frac{2}{ac^{d-2}} \pi'^2 \mathcal{G}^{00} = -\mathcal{Q}' - \frac{d-1}{d} \kappa ac^{d-2} \mathcal{Q}^2. \quad (9)$$

Условие отсутствия духов и градиентных неустойчивостей $\mathcal{G}^{00} > 0$ выполнено, только если

$$\frac{\mathcal{Q}'}{\mathcal{Q}^2} < -\frac{d-1}{d} \kappa ac^{d-2}. \quad (10)$$

Напомним, что мы рассматриваем случай $d \geq 2$ и что функции $a(r)$ и $c(r)$ ограничены снизу (см. условия (3)). Таким образом, соотношение (10) дает

$$\frac{\mathcal{Q}'}{\mathcal{Q}^2} < -\mathcal{C},$$

где $\mathcal{C}$ – положительная величина. Проинтегрируем последнее неравенство от r до $r' > r$ и получим

$$\mathcal{Q}^{-1}(r) - \mathcal{Q}^{-1}(r') < -\mathcal{C}(r' - r) \quad \text{для всех } r' > r.$$

Предположим теперь, что $Q(r') > 0$ при каком-либо r' . Тогда

$$Q^{-1}(r) < Q^{-1}(r') - \mathcal{C}(r' - r).$$

При уменьшении значения r от r' до $-\infty$ величина $Q^{-1}(r)$ сначала положительна, остается ограниченной сверху и при некотором r становится ограниченной сверху отрицательным числом. Поэтому график функции $Q^{-1}(r)$ пересекает нуль, и это означает, что величина $Q(r)$ становится бесконечной, а полевая конфигурация имеет сингулярность.

Величина $Q(r)$ также не может быть всюду отрицательной. Если $Q(r)$ отрицательна при некотором r , то

$$Q^{-1}(r') > Q^{-1}(r) + \mathcal{C}(r' - r).$$

При возрастании значения r' от r до $+\infty$ правая часть неравенства возрастает и при некотором r' становится положительной. График функции $Q^{-1}(r')$ опять-таки пересекает нуль, и конфигурация вновь сингулярна.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В заключение сделаем два замечания. Во-первых, добавление обычной материи, удовлетворяющей ИУЭ, не помогает. Соотношение (9) при этом модифицируется следующим образом:

$$\frac{2}{ac^{d-2}}\pi'^2\mathcal{G}^{00} = -Q' - \frac{d-1}{d}\kappa ac^{d-2}Q^2 - \frac{1}{ac^{d-2}}(T_0^0 - T_r^r)_M,$$

где последнее слагаемое обусловлено обычной материей, для которой справедливо ИУЭ $(T_0^0 - T_r^r)_M > 0$. Поэтому неравенство (10) остается в силе, и наш довод не изменяется.

Во-вторых, наш результат выглядит весьма техническим. Замечательно, тем не менее, что теории с обобщенными галилеонами и лагранжианами типа (1) не позволяют построить решения в виде кротовых нор, и, следовательно, в них отсутствуют машины времени [13]. В этой связи было бы интересно понять, обладают ли таким же свойством теории с более общими лагранжианами со вторыми производными, приводящие к уравнениям поля второго порядка, а также теории с p -формами [5].

Благодарности. Автор благодарен М. Либанову за полезные обсуждения и С. Дезеру и А. Викману за интересную переписку.

Список литературы

- [1] G. W. Horndeski, *Internat. J. Theor. Phys.*, **10**:6 (1974), 363–384.
- [2] D. B. Fairlie, J. Govaerts, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **373**:1 (1992), 214–232, arXiv: hep-th/9110022; D. B. Fairlie, J. Govaerts, *Phys. Lett. B*, **281**:1–2 (1992), 49–53, arXiv: hep-th/9202056; *J. Math. Phys.*, **33**:10 (1992), 3543–3566, arXiv: hep-th/9204074.
- [3] M. A. Luty, M. Porrati, R. Rattazzi, *JHEP*, **09** (2003), 029, 22 pp., arXiv: hep-th/0303116; A. Nicolis, R. Rattazzi, *JHEP*, **06** (2004), 059, 29 pp., arXiv: hep-th/0404159.
- [4] A. Nicolis, R. Rattazzi, E. Trincherini, *Phys. Rev. D*, **79**:6 (2009), 064036, 21 pp., arXiv: 0811.2197.

- [5] C. Deffayet, S. Deser, G. Esposito-Farèse, *Phys. Rev. D*, **82**:6 (2010), 061501, 5 pp., arXiv: 1007.5278.
- [6] C. Deffayet, O. Pujolas, I. Sawicki, A. Vikman, *JCAP*, **10**:10 (2010), 026, 37 pp., arXiv: 1008.0048.
- [7] T. Kobayashi, M. Yamaguchi, J. Yokoyama, *Phys. Rev. Lett.*, **105**:23 (2010), 231302, 4 pp., arXiv: 1008.0603.
- [8] A. Padilla, V. Sivanesan, *JHEP*, **04** (2013), 032, arXiv: 1210.4026.
- [9] P. Creminelli, A. Nicolis, E. Trincherini, *JCAP*, **10**:11 (2010), 021, 25 pp., arXiv: 1007.0027; K. Hinterbichler, A. Joyce, J. Khoury, G. E. J. Miller, *JCAP*, **12**:12 (2012), 030, 27 pp., arXiv: 1209.5742; P. Creminelli, K. Hinterbichler, J. Khoury, A. Nicolis, E. Trincherini, *JHEP*, **02** (2013), 006, 23 pp., arXiv: 1209.3768; K. Hinterbichler, A. Joyce, J. Khoury, G. E. J. Miller, *Phys. Rev. Lett.*, **110**:24 (2013), 241303, 5 pp., arXiv: 1212.3607; B. Elder, A. Joyce, J. Khoury, *Phys. Rev. D*, **89**:4 (2014), 044027, 15 pp., arXiv: 1311.5889.
- [10] T. Qiu, J. Evslin, Y.-F. Cai, M. Li, X. Zhang, *JCAP*, **11**:10 (2011), 036, 25 pp., arXiv: 1108.0593; D. A. Easson, I. Sawicki, A. Vikman, *JCAP*, **11**:11 (2011), 021, 28 pp., arXiv: 1109.1047; Y.-F. Cai, D. A. Easson, R. Brandenberger, *JCAP*, **12**:8 (2012), 020, arXiv: 1206.2382; M. Osipov, V. Rubakov, *JCAP*, **13**:11 (2013), 031, arXiv: 1303.1221; M. Koehn, J. L. Lehnert, B. A. Ovrut, *Phys. Rev. D*, **90**:2 (2014), 025005, 19 pp., arXiv: 1310.7577.
- [11] M. Visser, *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking*, AIP Series in Computational and Applied Mathematical Physics, AIP, Woodbury, NY, 1995.
- [12] M. S. Morris, K. S. Thorne, *Amer. J. Phys.*, **56**:5 (1988), 395–412.
- [13] M. S. Morris, K. S. Thorne, U. Yurtsever, *Phys. Rev. Lett.*, **61**:13 (1988), 1446–1449.
- [14] И. Д. Новиков, Н. С. Кардашев, А. А. Шацкий, *УФН*, **177**:9 (2007), 1017–1023.
- [15] А. А. Шацкий, И. Д. Новиков, Н. С. Кардашев, *УФН*, **178**:5 (2008), 481–488.
- [16] D. Hochberg, M. Visser, *Phys. Rev. D*, **56**:8 (1997), 4745–4755, arXiv: gr-qc/9704082; M. Visser, D. Hochberg, “Generic wormhole throats”, *Internal Structure of Black Holes and Spacetime Singularities* (Haifa, Israel, June 29–July 3, 1997), Annals of the Israel Physical Society, **13**, eds. L. M. Burko, A. Ori, IOP, Bristol, 1997, 249–295, arXiv: gr-qc/9710001.
- [17] D. Hochberg, M. Visser, *Phys. Rev. D*, **58**:4 (1998), 044021, 14 pp., arXiv: gr-qc/9802046.
- [18] В. А. Пубаков, *ТМФ*, **187**:2 (2016), 332–343, arXiv: 1509.08808.
- [19] S. Deser, R. Jackiw, G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.*, **68**:3 (1992), 267–269.

Поступила в редакцию 1.02.2016