Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Тебер, А. В. Котиков, Метод уникальностей и оптическая проводимость графена: новое применение мощной техники многопетлевых вычислений, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 3, 519–532

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9161>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:19:00

© 2017 г.

С. Тебер^{*†}, А. В. Котиков[‡]

МЕТОД УНИКАЛЬНОСТЕЙ И ОПТИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ГРАФЕНА: НОВОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МОЩНОЙ ТЕХНИКИ МНОГОПЕТЛЕВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Дан краткий обзор метода уникальностей, являющегося мощным средством расчета многопетлевых диаграмм Фейнмана в теориях с конформной симметрией. Метод применен в импульсном пространстве. Показана его эффективность при расчете двухпетлевой безмассовой диаграммы Фейнмана пропагаторного типа с нецелым индексом на центральной линии. Полученный результат использован для вычисления оптической проводимости графена в инфракрасной лоренц-инвариантной неподвижной точке. Проанализировано влияние контрчленов. Проведено сравнение с нерелятивистским пределом.

Ключевые слова: метод уникальностей, многопетлевые вычисления, графен, оптическая проводимость, контрчлены.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9161>

1. ВВЕДЕНИЕ

Основой теории возмущений квантовой теории поля является точное вычисление многопетлевых диаграмм Фейнмана, что имеет решающее значение для оценки ренормгрупповых функций, т. е. β -функций и аномальных размерностей полей, которые, в свою очередь, имеют широкие приложения в физике элементарных частиц, в статистической механике и в физике конденсированных сред. В заключительной части настоящей статьи мы остановимся на применении расчетов для нахождения оптической проводимости графена.

В рамках квантовой теории поля начиная с 1980-х годов был разработан ряд мощных методов для вычисления размерно-регуляризованных диаграмм Фейнмана.

А. В. Котиков поддержан РФФИ (грант № 16-02-00790_a).

^{*}Université Pierre et Marie Curie, Sorbonne Universités, Paris, France

[†]Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies, CNRS, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Paris, France. E-mail: teber@lpthe.jussieu.fr

[‡]Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: kotikov@theor.jinr.ru

Одним из наиболее широко используемых методов является интегрирование по частям (ИПЧ), которое было введено Васильевым, Письмаком и Хонконеном [1], а также Четыркиным и Ткачёвым [2]. Этот метод позволяет уменьшить число сложных диаграмм Фейнмана, выразив их через ограниченный набор так называемых “мастер-интегралов”. В настоящее время эта процедура автоматизирована и реализована в компьютерных программах, в основном с помощью алгоритма, предложенного Лапорта [3]. В некоторых простых случаях мастер-интегралы сами могут быть вычислены с помощью ИПЧ. В целом, однако, для этой цели в комбинации с ИПЧ необходимо использовать и другие методы.

Одним из хорошо известных методов является техника, основанная на использовании полиномов Гегенбауэра [4], [5]. Еще один очень мощный, но, возможно, менее популярный метод – это метод уникальностей, на представлении которого мы и сосредоточимся в дальнейшем. Метод получил свое название от так называемого соотношения уникальности, известного также как соотношение звезда–треугольник или как соотношение Янга–Бакстера, которое широко используется в теориях с конформной симметрией. Исторически это соотношение, вероятно, впервые было использовано для вычисления трехмерных интегралов в работе [6].

В рамках многопетлевых расчетов метод уникальностей был введен впервые Васильевым, Письмаком и Хонконеном [1]. Метод в принципе позволяет вычислить сложные диаграммы Фейнмана путем использования последовательности простых преобразований (в том числе ИПЧ) без выполнения каких-либо явных интегрирований. Таким образом, этот метод значительно упрощает проведение многопетлевых вычислений [1], [7]–[9]. Как яркий пример отметим первое полностью аналитическое выражение для пятипетлевой β -функции в модели φ^4 , которое было получено Казаковым именно с помощью этой техники [8], [9]. Однако для каждой диаграммы задача нахождения соответствующей последовательности преобразований является весьма нетривиальной.

В настоящей работе мы представляем метод уникальностей в импульсном пространстве в близкой аналогии с обзором [10], где метод был применен в координатном пространстве. В качестве примера расчета мы показываем, как вычислить двухпетлевую безмассовую диаграмму Фейнмана пропагаторного типа с нецелым индексом на центральной линии. Найденный результат мы применяем для получения оптической проводимости графена в инфракрасной лоренц-инвариантной неподвижной точке.

Всюду далее в статье, за исключением раздела 5, мы работаем в евклидовом пространстве и полагаем $\hbar = c = 1$.

2. ДВУХПЕТЛЕВАЯ БЕЗМАССОВАЯ ДИАГРАММА ФЕЙНМАНА ПРОПАГАТОРНОГО ТИПА

Мы используем размерную регуляризацию и выполняем все вычисления в евклидовом пространстве-времени размерности $D = 4 - 2\varepsilon$. Более того, нам будет удобно ввести переменную λ такую, что $D = 2 + 2\lambda$ и, соответственно, $\lambda = 1 - \varepsilon$. Наше основное внимание сосредоточено на двухпетлевой безмассовой диаграмме пропагаторного типа (так называемый r -интеграл) в импульсном пространстве (см. рис. 1). Эта диаграмма является одним из основных элементов многопетлевых вычислений.

Рис. 1. Двухпетлевая безмассовая диаграмма Фейнмана пропагаторного типа

Она имеет следующий вид:

$$J(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \iint \frac{d^D k_1 d^D k_2}{k_1^{2\alpha_1} k_2^{2\alpha_2} (k_2 - p)^{2\alpha_3} (k_1 - p)^{2\alpha_4} (k_2 - k_1)^{2\alpha_5}} \quad (1)$$

с произвольными индексами α_i и внешним моментом p . Размерный анализ для диаграммы J дает ее размерность:

$$d_F = 2 \left(D - \sum_{i=1}^5 \alpha_i \right). \quad (2)$$

Одной из основных целей расчета многопетлевой диаграммы пропагаторного типа является вычисление ее (безразмерной) коэффициентной функции C_D , которую мы определим как

$$I_D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = C_D \left[\begin{array}{c} \alpha_1 \quad \alpha_2 \\ \alpha_4 \quad \alpha_3 \end{array} \right] = \frac{p^{d_F}}{\pi^D} J(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5). \quad (3)$$

Далее мы получим ее в виде ряда Лорана по ε .

Процесс вычисления рассматриваемой двухпетлевой безмассовой диаграммы имеет долгую историю (см. работу [11] для обзора). Когда все индексы являются целыми числами, диаграмму легко можно вычислить, например, с помощью ИПЧ. Однако для произвольных (нецелых) значений всех индексов расчет является весьма нетривиальным. Поэтому обычно исследуются только некоторые частные случаи (см., например, работы [1], [2], [4], [5], [8], [9], [12]–[21]).

Для случая, когда все индексы имеют вид $\alpha_i = 1 + a_i \varepsilon$, диаграмма известна в виде ε -разложения. После двух десятилетий вычислений [4], [8], [9], [12], [13], [16] разложение до порядка ε^9 было получено в работе [18]. Расчет разложения был автоматизирован в работе [19] с помощью представления диаграммы как комбинаций двойных рядов. В принципе такое представление позволяет находить коэффициенты разложения до произвольного порядка по ε , однако возникают ограничения, связанные с компьютерными мощностями.

В некоторых частных случаях известно точное значение диаграммы. В случае, когда два индекса на соседних ребрах произвольные (а остальные индексы являются целыми числами), диаграмма впервые была вычислена точно с использованием метода полиномов Гегенбауэра [4]. Позднее этот результат был получен заново с применением ИПЧ [1], [2].

Десять лет спустя новый класс сложных диаграмм, в которых индексы двух смежных ребер являются целыми числами, а три других индекса – произвольными, был вычислен точно в работе [5] на основе развития техники полиномов Гегенбауэра. Для этого класса диаграмм аналогичные результаты были получены также

в работе [16], где использовался анзац для решения рекуррентных соотношений, вытекающих из ИПЧ для этой диаграммы. Все эти результаты выражаются в виде комбинаций обобщенных гипергеометрических функций ${}_3F_2$ с аргументом, равным единице [5], [16], [21].

Простейшая нетривиальная диаграмма, принадлежащая этому классу, – это диаграмма с одним произвольным индексом на центральной линии. Ее коэффициентная функция имеет следующий вид:

$$I(\alpha) = C_D \left[\begin{array}{c} 1 \quad \bullet \quad 1 \\ \circ \quad \vdots \quad \circ \\ 1 \quad \bullet \quad 1 \end{array} \right] = \frac{p^{2(2-\alpha)}}{\pi^D} J(1, 1, 1, 1, \alpha). \quad (4)$$

Заметим, что результат для этой диаграммы в виде однократного ряда был получен впервые в работе [9]. Затем в работе [5] результат был найден в виде одной ${}_3F_2$ -функции с аргументом, равным единице:

$$I(\alpha) = -2\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda - \alpha)\Gamma(1 - 2\lambda + \alpha) \times \\ \times \left[\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(3\lambda - \alpha - 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + 2\lambda)\Gamma(n + 1)}{n!\Gamma(n + 1 + \alpha)} \frac{1}{n + 1 - \lambda + \alpha} + \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi(2\lambda - \alpha)}{\Gamma(2\lambda)} \right]. \quad (5)$$

В настоящей статье мы рассмотрим более простой случай, когда индекс α связан с размерностью пространства следующим образом: $\alpha = \lambda = D/2 - 1$, т. е.

$$I(\lambda) = C_D \left[\begin{array}{c} 1 \quad \bullet \quad 1 \\ \circ \quad \vdots \quad \circ \\ 1 \quad \bullet \quad 1 \end{array} \right] = \frac{p^{2(2-\lambda)}}{\pi^D} J(1, 1, 1, 1, \lambda), \quad \lambda = \frac{D}{2} - 1. \quad (6)$$

Результат для такой диаграммы был известен ранее (см. работу [1] и обсуждения в статьях [15]):

$$I(\lambda) = 3 \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(1 - \lambda)}{\Gamma(2\lambda)} [\psi'(\lambda) - \psi'(1)]. \quad (7)$$

Для его нахождения был использован метод уникальностей в координатном пространстве. В недавней работе [20] данное выражение было получено с помощью более простого и прозрачного подхода с использованием метода уникальностей в импульсном пространстве.

3. МЕТОД УНИКАЛЬНОСТЕЙ

Далее мы проводим анализ всех диаграмм в импульсном пространстве. Будем считать, что все алгебраические манипуляции, связанные с числителями пропагаторов разных моделей, уже сделаны. Поэтому диаграммы, которые мы рассматриваем, содержат только скалярные пропагаторы вида $1/k^{2\alpha}$, где α называется индексом пропагатора. Сами пропагаторы представим графически в виде линии

$$\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k^{2\alpha}}. \quad (8)$$

Индекс диаграммы (или ее подграфа) определяется как сумма индексов входящих в него линий. Обычные линии имеют индекс 1, а простые треугольники и вершины имеют индексы 3. Важное значение в дальнейшем будет иметь понятие уникального треугольника и уникальной вершины. В импульсном пространстве треугольник и вершина называются уникальными, если их индексы равны $D = 2 + 2\lambda$ и $D/2 = 1 + \lambda$ соответственно (см. сводную табл. 1).

Таблица 1. Индексы линий, треугольников и вершин в импульсном пространстве.

	Линия	Треугольник	Вершина
Произвольный	α	$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$	$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
Обычный	1	3	3
Уникальный	$\frac{D}{2} = 2 - \varepsilon = 1 + \lambda$	$D = 4 - 2\varepsilon = 2 + 2\lambda$	$\frac{D}{2} = 2 - \varepsilon = 1 + \lambda$

С помощью этих определений и графических обозначений цепочки сводятся к произведению пропагаторов:

$$\overset{\alpha}{\bullet} \text{---} \overset{\beta}{\bullet} = \overset{\alpha + \beta}{\text{---}}. \quad (9)$$

Простые петли содержат интегрирование:

$$\text{Петля}(\alpha, \beta) = \pi^{D/2} A(\alpha, \beta) \overset{\alpha + \beta - D/2}{\text{---}}, \quad (10)$$

где

$$A(\alpha, \beta) = \frac{a(\alpha)a(\beta)}{a(\alpha + \beta - D/2)}, \quad a(\alpha) = \frac{\Gamma(D/2 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (11)$$

Таким образом, многие многопетлевые диаграммы можно вычислить без явных интегрирований, используя приведенные выше правила в комбинации с некоторыми тождествами между диаграммами. Центральное место в настоящей работе отведено соотношению уникальности (т. е. соотношению звезда–треугольник), которое связывает так называемый уникальный треугольник с уникальной вершиной:

$$\text{Треугольник}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \stackrel{\sum_i \alpha_i = D}{=} \pi^{D/2} A(\alpha_1, \alpha_2) \text{Вершина}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3), \quad (12)$$

где $\tilde{\alpha}_i = D/2 - \alpha_i$ есть индекс, дуальный к α_i .

Другое важное тождество имеет форму рекуррентного соотношения и может быть получено из ИПЧ:

$$\begin{aligned} (D - \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_5) \text{Диаграмма}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) &= \alpha_2 \left[\text{Диаграмма}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \text{ с } \alpha_2 \text{ на } + \text{ и } - \right] + \\ &+ \alpha_3 \left[\text{Диаграмма}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \text{ с } \alpha_3 \text{ на } - \text{ и } + \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где $+$ или $-$ в диаграммах в правой части уравнения означает увеличение или уменьшение индекса линии на 1 по отношению к его значению в левой части. В дальнейшем для простоты мы будем считать, что линии без индекса представляют собой обычные линии, т. е. линии с индексом 1.

4. РАСЧЕТ ДИАГРАММЫ

Диаграмму $I(\lambda)$ можно вычислить с помощью полученных ранее правил и соотношений. Приведем лишь четыре элементарных шага (см. работу [20] для более подробной информации).

На первом шаге мы заменяем центральную линию на петлю, используя свойство (10), чтобы сделать правый треугольник уникальным, а на втором шаге применяем соотношение уникальности (12). Графически эти два шага выглядят следующим образом:

$$J(1, 1, 1, 1, \lambda) = \text{diagram} = \frac{1}{\pi^{D/2} A(1, 2\lambda)} \text{diagram} = \text{diagram} \frac{1}{p^{2(1-\lambda)}}. \quad (14)$$

Третий шаг состоит в использовании ИПЧ (13) с тем, чтобы превратить последнюю диаграмму в последовательность цепочек и простых петель:

$$(-2\delta) \text{diagram} = 2(\lambda + \delta) \left[\text{diagram} - \text{diagram} \right]. \quad (15)$$

Полученные в правой части диаграммы можно непосредственно проинтегрировать с помощью уравнений (9) и (10). Обратим внимание на то, что в формуле (15) введен дополнительный параметр регуляризации δ .

Четвертый (и последний) шаг состоит в переходе к пределу $\delta \rightarrow 0$, который можно выполнить с помощью следующего разложения гамма-функции:

$$\Gamma(x + \varepsilon) = \Gamma(x) \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{(k-1)}(x) \frac{\varepsilon^k}{k!} \right], \quad (16)$$

$$\psi(x) = \psi^{(0)}(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad \psi^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} \psi(x),$$

где $\psi^{(k)}$ есть k -я производная ψ -функции.

Итак, все расчеты сделаны, что дает

$$\text{diagram} = \frac{\pi^D}{p^2} 3 \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(2\lambda)} [\psi'(\lambda) - \psi'(1)]. \quad (17)$$

Подставляя этот результат в уравнение (14) и используя (6), получаем окончательный результат [1], [15] для коэффициентной функции (7). В четырехмерном случае ($\lambda \rightarrow 1$ или $D \rightarrow 4$) результат хорошо известен: $I(1) = 6\zeta(3)$. В трехмерном случае ($\lambda \rightarrow 1/2$ или $D \rightarrow 3$) (см. также работы [15], [20], [22]) результат трансцендентно более сложен ($\zeta(2) = \pi^2/6$): мы имеем $I(1/2) = 6\pi\zeta(2)$.

5. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Возвращаясь в пространство Минковского, рассмотрим низкоэнергетическое эффективное действие, описывающее взаимодействие фермионного поля, живущего в пространстве размерности $d_e = D_e + 1$, с абелевым калибровочным полем, живущим в пространстве размерности $d_\gamma = D_\gamma + 1$:

$$S = \sum_{\sigma=1}^{N_F} \int dt d^{D_e} x \left[\bar{\psi}_\sigma (i\gamma^0 \partial_t + iv\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}) \psi_\sigma - e \bar{\psi}_\sigma \gamma^0 A_0 \psi_\sigma + e \frac{v}{c} \bar{\psi}_\sigma \vec{\gamma} \cdot \vec{A} \psi_\sigma \right] + \int dt d^{D_\gamma} x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2a} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right], \quad (18)$$

где ψ_σ – четырехкомпонентный спинор со спином σ , величина которого изменяется от 1 до N_F (для графена $N_F = 2$), v – скорость Ферми, c – скорость света, которая неявно содержится в действии калибровочных полей $\partial_\mu = ((1/c)\partial_t, \vec{\nabla})$, a – параметр фиксации калибровки и γ^μ – (4×4) -матрицы Дирака, удовлетворяющие обычной алгебре: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Поскольку мы будем использовать размерную регуляризацию, полезна следующая параметризация¹⁾:

$$d_\gamma = 4 - 2\varepsilon_\gamma, \quad d_e = 2 + 2\lambda - 2\varepsilon_\gamma. \quad (19)$$

Случай графена соответствует $\varepsilon_\gamma \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow 1/2$, т.е. фермион живет в пространстве размерности $d_e = 2 + 1$ и взаимодействует с калибровочным полем, живущим в пространстве размерности $d_\gamma = 3 + 1$.

Рассматривая действие (18) при произвольных d_γ и d_e , получаем следующие правила Фейнмана.

Фермионный пропагатор имеет вид

$$S_0(p) = \frac{i\cancel{p}}{p^2}, \quad \cancel{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - v\vec{\gamma} \cdot \vec{p}. \quad (20)$$

Фотонный пропагатор определяется по формуле

$$\tilde{D}_0^{\mu\nu}(\bar{q}) = \frac{i}{(4\pi)^{1-\lambda}} \frac{\Gamma(\lambda)}{(-\bar{q}^2)^\lambda} \left(g^{\mu\nu} - \tilde{\xi} \frac{\bar{q}^\mu \bar{q}^\nu}{\bar{q}^2} \right), \quad \bar{q}^\mu = (q^0/c, \vec{q}), \quad (21)$$

где $\tilde{\xi} = \lambda\xi = \lambda(1-a)$. Это так называемый “редуцированный” пропагатор, полученный из обычного фотонного пропагатора в пространстве размерности D_γ путем интегрирования всех пространственных координат, перпендикулярных D_e -мерной мембране. Вершина имеет вид ($j = 1, 2$ – пространственные индексы)

$$\Gamma_0^0 = -ie\gamma^0, \quad \Gamma_0^j = -ie\frac{v}{c}\gamma^j. \quad (22)$$

¹⁾Параметр λ связан с ε_e из работы [22] соотношением $\lambda = 1 - \varepsilon_e$.

Взаимодействие фермионного поля с калибровочным характеризуется безразмерной константой связи $\alpha_g = e^2/4\pi v$. Хорошо известно, что в графене эффект взаимодействий приводит к перенормировке скорости Ферми, которая стремится к скорости света в инфракрасной области [23]. Экспериментальное значение скорости мало [24]: $v \approx c/300$. Следовательно, можно игнорировать все эффекты запаздывания. В таком (нерелятивистском) пределе $\Gamma_0^j = 0$ и правила Фейнмана сильно упрощаются (для произвольного значения λ):

$$S_0(p) = \frac{i\not{p}}{p^2}, \quad \tilde{D}_0^{00}(\vec{q}) = \frac{i}{(4\pi)^{1-\lambda}} \frac{\Gamma(\lambda)}{(|\vec{q}|^2)^\lambda}, \quad \Gamma_0^0 = -ie\gamma^0 \quad (v \ll c), \quad (23)$$

где $p^\mu = (p^0, v\vec{p})$. Константа связи – величина порядка единицы: $\alpha_g \approx 300/137 \approx 2$.

Поскольку мы имеем “бегущую” скорость, в инфракрасной области достижима лоренц-инвариантная фиксированная точка [23]: $v \rightarrow c$ и $\alpha_g \rightarrow \alpha \approx 1/137$. В этой фиксированной точке правила Фейнмана также можно упростить (опять же для произвольного λ):

$$S_0(p) = \frac{i\not{p}}{p^2}, \quad \tilde{D}_0^{\mu\nu}(q) = \frac{i}{(4\pi)^{1-\lambda}} \frac{\Gamma(\lambda)}{(-q^2)^{1/2}} \left(g^{\mu\nu} - \tilde{\xi} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right), \quad \Gamma^\mu = -ie\gamma^\mu \quad (v = c),$$

где импульсы имеют вид $k^\mu = (k^0, \vec{k})$, так что мы можем положить $v = c = 1$ в этом пределе. Эта релятивистская модель относится к классу так называемых безмассовых редуцированных моделей квантовой электродинамики (КЭД) [25] (иногда называемых также псевдо-КЭД [26]). Инвариантность Лоренца, присущая этой модели, позволяет применять ковариантные методы расчета безмассовых диаграмм Фейнмана. Квадратный корень, входящий в пропагатор фотона, приводит к нетривиальным диаграммам с нецелыми индексами, которые мы уже рассмотрели в предыдущих разделах.

С учетом приведенных выше правил мы теперь сосредоточимся на вычислении радиационных поправок к поляризационному оператору $\Pi^{\mu\nu}(q)$. Подсчет степеней указывает на то, что эта функция является свободной от расходимостей в пределе $\varepsilon_\gamma \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow 1/2$, который нам и нужен. Поэтому в дальнейшем мы выполняем все вычисления для $\varepsilon_\gamma \rightarrow 0$, считая λ произвольным. В самом конце мы полагаем $\lambda = 1/2$. Расчеты, справедливые для любых ε_γ и λ , можно найти в работе [22]. После того как вычислен поляризационный оператор, он может быть связан с доступной для наблюдения так называемой оптической проводимостью с помощью следующего соотношения:

$$\sigma(q_0) = - \lim_{\vec{q} \rightarrow 0} \frac{i q_0}{|\vec{q}|^2} \Pi^{00}(q_0, \vec{q}). \quad (24)$$

Используя параметризацию $\Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi(q^2)(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)$, которая вытекает из условия сохранения тока, мы можем написать $\sigma(q_0) = i q_0 v^2 \Pi(q_0^2, \vec{0})$. В нерелятивистском пределе наиболее удобным является вычисление $\Pi^{00}(q)$, в то время как в релятивистском пределе – вычисление $\Pi(q^2)$.

В отсутствие электрон-электронного взаимодействия поляризационный оператор сводится к простой петле (см. рис. 2):

$$i\Pi_1^{\mu\nu}(q) = - \int [d^d k] \text{Tr} [(-ie\gamma^\mu) S_0(k+q)(-ie\gamma^\nu) S_0(k)], \quad [d^d k] = \frac{d^d k}{(2\pi)^d}. \quad (25)$$

Рис. 2. Однопетлевые диаграммы: поляризация вакуума (а), собственная энергия фермиона (б) и вершина (в).

Прямые вычисления приводят при $\varepsilon_\gamma \rightarrow 0$ к

$$\Pi_1(q^2) = -4N_F \frac{e^2 \Gamma(\lambda)}{(4\pi)^{1+\lambda} (-q^2)^{1-\lambda}} \frac{\Gamma(1+\lambda)\Gamma(1-\lambda)}{(1+2\lambda)\Gamma(2\lambda)}. \quad (26)$$

В случае $\lambda = 1/2$, который представляет особый интерес, $\Pi_1(q^2) = -e^2 N_F / (8\sqrt{-q^2})$. Отсюда мы находим минимальную проводимость графена ($N_F = 2$) [27] в виде

$$\sigma_0 = \frac{e^2}{4\hbar}. \quad (27)$$

Поскольку этот результат получен для невзаимодействующих фермионов, он справедлив для любого значения v/c . Как мы увидим ниже, это не так для поправок более высокого порядка.

В последнее десятилетие проводится обширная работа для улучшения понимания электрон-электронного взаимодействия (см. работы [28]–[32]). Эксперименты, описанные в работе [33], указывают на то, что эффекты взаимодействия являются слабыми и приводят к отклонению лишь на 2% от результатов, полученных для невзаимодействующих фермионов (см. работу [34] для обзора). Теоретически было показано, что отсутствуют поправки к оптической проводимости, порожденные короткодействующим взаимодействием между фермионами [31].

Мы получим результат в случае дальнего действия, при этом стандартная процедура расчета заключается в использовании теории возмущений для вычисления поправки взаимодействия $\mathcal{C}$ к проводимости,

$$\sigma = \sigma_0(1 + \alpha\mathcal{C} + O(\alpha^2)), \quad (28)$$

которая связана с двухпетлевой поправкой к поляризованному оператору (см. соответствующие диаграммы на рис. 3). Результаты вычисления диаграмм могут быть представлены следующим образом:

$$\Pi_2^{\mu\nu}(q) = 2\Pi_{2a}^{\mu\nu}(q) + \Pi_{2b}^{\mu\nu}(q), \quad (29a)$$

$$i\Pi_{2a}^{\mu\nu}(q) = - \int [d^d k] \text{Tr} [(-ie\gamma^\nu)S_0(k+q)(-ie\gamma^\mu)S_0(k)(-i\Sigma_1(k))S_0(k)], \quad (29b)$$

$$i\Pi_{2b}^{\mu\nu}(q) = - \int [d^d k_2] \text{Tr} [(-ie\gamma^\nu)S_0(k_2+q)(-ie\Lambda_1^\mu(k_2, q))S_0(k_2)], \quad (29c)$$

Рис. 3. Двухпетлевые диаграммы поляризации вакуума.

где $\Sigma_1(k)$ – однопетлевая собственная энергия (см. рис. 2б), $\Lambda_1^\mu(k_2, q)$ – однопетлевая вершинная часть (см. рис. 2в), которые определяются как

$$-i\Sigma_1(k) = \int [d^d e p] (-ie\gamma_\mu) S_0(k+p) (-ie\gamma_\nu) \tilde{D}_0^{\mu\nu}(p), \quad (30a)$$

$$-ie\Lambda_1^\mu(k_2, q) = \int [d^d e k_1] \tilde{D}_0^{\alpha\beta}(k_1 - k_2) (-ie\gamma_\alpha) S_0(k_1 + q) (-ie\gamma^\mu) S_0(k_1) (-ie\gamma_\beta). \quad (30b)$$

Теперь мы рассмотрим расчеты этих диаграмм и соответствующую оптическую проводимость в нерелятивистском и релятивистском пределах. В нерелятивистском пределе ($v \ll c$) в большинстве случаев результаты, полученные с помощью вычисления этих диаграмм, находятся в согласии с работой Мищенко [28]:

$$\mathcal{C} = \frac{19 - 6\pi}{12} \approx 0.013 \quad (v \ll c). \quad (31)$$

Интересно, что соотношение $\alpha_g \mathcal{C} \approx 0.02$ находится также в согласии с экспериментом. Кроме того, анализируя равенства (24), Мищенко обнаружил, что результат представим в виде суммы: $\mathcal{C} = \mathcal{C}_a + \mathcal{C}_b$, где $\mathcal{C}_a = 1/4$ является вкладом диаграммы на рис. 3а и $\mathcal{C}_b = (8 - 3\pi)/6$ является вкладом диаграммы на рис. 3б. Таким образом, мы замечаем, что “сложный” вклад, пропорциональный π , возникает в (31) только из-за “сложной” диаграммы (см. рис. 3б).

Вычисление соответствующей поправки в неподвижной инфракрасной точке имеет меньшее отношение к эксперименту, однако представляет академический интерес. После вычисления лоренц-алгебры в уравнениях (29) и поворота Вика в евклидовом пространстве ($q_0 = iq_{E0}$) диаграммы сводятся к комбинации скалярных интегралов, рассмотренных в предыдущих разделах. Все эти интегралы представимы в виде комбинаций простых петель и цепочек, за исключением одного, возникающего из диаграммы на рис. 3б. Этот интеграл совпадает с $I(\lambda)$, заданным в (6), и двухпетлевая поправка к поляризационному оператору имеет вид (для $\varepsilon_\gamma \rightarrow 0$)

$$\Pi_2(q^2) = 4N_F \frac{e^4 \Gamma(\lambda)}{(4\pi)^{3+\lambda} (-q^2)^{1-\lambda}} \frac{16\Gamma(1+\lambda)\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(3+2\lambda)} C_1(\lambda), \quad (32a)$$

$$C_1(\lambda) = 2\lambda - \frac{5}{2} - \frac{3}{2\lambda} + \frac{1}{1+\lambda} + \frac{3}{2}\lambda(1+\lambda)[\psi'(\lambda) - \psi'(1)], \quad (32b)$$

Рис. 4. Диаграммы с контрчленами для двухпетлевой поляризации вакуума.

где был использован результат (7). Добавляя однопетлевые вклады, получаем

$$\Pi(q^2) = \Pi_1(q^2)(1 + \alpha C(\lambda) + O(\alpha^2)), \quad (33a)$$

$$C(\lambda) = -\frac{1}{\pi\lambda(1+\lambda)}C_1(\lambda) = -\frac{1}{2\pi}\left(3[\psi'(\lambda+2) - \psi'(1)] + \frac{4}{1+\lambda} + \frac{1}{(1+\lambda)^2}\right). \quad (33b)$$

В случае $\lambda = 1/2$ имеем [20], [22]

$$C^* = C(1/2) = \frac{92 - 9\pi^2}{18\pi} \approx 0.056 \quad (v = c). \quad (34)$$

Таким образом, в релятивистском пределе, общая поправка к проводимости даже меньше, чем в нерелятивистском: $\alpha C^* \approx 4 \cdot 10^{-4}$. Интересно отметить, что “сложный” вклад в (34) совпадает со вкладом из (31), т.е. разница между результатами в разных кинематических пределах возникает в основном из-за простых диаграмм (см. рис. 3а). Последние содержат как расходимости фермионную собственную энергию, которая и отвечает за “бегучесть” скорости Ферми.

В случае $v \ll c$ результат (31) содержит вклады от контрчленов диаграмм, изображенных на рис. 3 (см. также обсуждение в работах [29], [30]). Покажем, что такие вклады отсутствуют в релятивистском пределе $v = c$. Контрчлены диаграмм представлены графически на рис. 4 и включают в себя четыре вклада:

$$\tilde{\Pi}_2^{\mu\nu}(q) = 2\tilde{\Pi}_{2a}^{\mu\nu}(q) + 2\tilde{\Pi}_{2b}^{\mu\nu}(q). \quad (35)$$

Первый член $2\tilde{\Pi}_{2a}$ приходит из сингулярной части внутренних петель двух первых диаграмм на рис. 3а, т.е. это однопетлевая фермионная собственная энергия (см. рис. 2б). Второй член $2\tilde{\Pi}_{2b}$ приходит из сингулярной части двух внутренних треугольников в последней диаграмме, т.е. это однопетлевая вершина (см. рис. 2в). Эти однопетлевые диаграммы были вычислены в работе [22] и имеют вид

$$\Sigma_{1V}(k^2) = -\frac{e^2\Gamma(\lambda)(-k^2)^{-\varepsilon_\gamma}}{(4\pi)^{d_\gamma/2}} \left[\frac{2(\lambda - \varepsilon_\gamma)^2}{1 + \lambda - 2\varepsilon_\gamma} - \xi(\lambda - \varepsilon_\gamma) \right] A(1, \lambda), \quad (36a)$$

$$\Lambda_1^\mu = \frac{e^2\Gamma(\lambda)m^{-2\varepsilon_\gamma}}{(4\pi)^{d_\gamma/2}} \gamma^\mu \left[\frac{2(\lambda - \varepsilon_\gamma)^2}{1 + \lambda - \varepsilon_\gamma} - \xi\lambda \right] \frac{\Gamma(\varepsilon_\gamma)}{\Gamma(1 + \lambda)}, \quad (36b)$$

где мы использовали замену $\Sigma_1(k) = \not{k}\Sigma_{1V}(k^2)$, а также функцию $A(\alpha, \beta)$, определенную в (11), и массу m , которая рассматривается в качестве инфракрасного регуляризатора в выражении (36b) для поправки к вершине.

Результаты для $\tilde{\Pi}_{2a}$ и $\tilde{\Pi}_{2b}$ могут быть представлены как

$$\tilde{\Pi}_{2a}^{\mu\nu}(q) = -\text{Sing}[\Sigma_{1V}(k^2)] \Pi_1^{\mu\nu}(q), \quad \tilde{\Pi}_{2b}^{\mu\nu}(q) = -\text{Sing}[\Lambda^\mu/\gamma^\mu] \Pi_1^{\mu\nu}(q), \quad (37)$$

где k – внутренний импульс, $\Pi_1^{\mu\nu}(q)$ – однопетлевой вклад (26). Перенормировку однопетлевой вершины можно представить в виде $\text{Sing}[\Lambda^\mu] \equiv \gamma^\mu \text{Sing}[\Lambda^\mu/\gamma^\mu]$. В схеме минимальных вычитаний для любой функции $F(\epsilon_\gamma)$ оператор Sing определяется следующим образом:

$$\text{Sing}[F(\epsilon_\gamma)] \equiv \frac{1}{\epsilon_\gamma} F(\epsilon_\gamma = 0), \quad \epsilon_\gamma = \frac{4 - d_\gamma}{2}. \quad (38)$$

С помощью этого определения мы получаем из соотношений (36), что

$$\text{Sing}[\Sigma_{1V}(k^2)] = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{2\lambda}{1+\lambda} - \xi \right] \frac{1}{\epsilon_\gamma}, \quad (39a)$$

$$\text{Sing}[\Lambda^\mu/\gamma^\mu] = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{2\lambda}{1+\lambda} - \xi \right] \frac{1}{\epsilon_\gamma}. \quad (39b)$$

Данные выражения в точности противоположны друг другу, поэтому вклад контрчленов (35) равен нулю. Строго говоря, этот результат является следствием тождества Уорда для редуцированной КЭД, в которой существует связь между перенормировками волновой функции и вершины.

Благодарности. Авторы благодарны оргкомитету V Международной конференции “Модели квантовой теории поля” (MQFT-2015) за приглашение.

Список литературы

- [1] А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, Ю. Р. Хонконен, “ $1/n^2$ -Разложение: расчет индексов η и ν в порядке $1/n^2$ для произвольной размерности”, *ТМФ*, **47**:3 (1981), 291–306.
- [2] K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov, “Integration by parts: the algorithm to calculate β -functions in 4 loops”, *Nucl. Phys. B*, **192**:1 (1981), 159–204; F. V. Tkachov, “A theorem on analytical calculability of 4-loop renormalization group functions”, *Phys. Lett. B*, **100**:1 (1981), 65–68.
- [3] S. Laporta, “High-precision calculation of multiloop Feynman integrals by difference equations”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **15**:32 (2000), 5087–5159.
- [4] K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev, F. V. Tkachov, “New approach to evaluation of multiloop Feynman integrals: the Gegenbauer polynomial x -space technique”, *Nucl. Phys. B*, **174**:2–3 (1980), 345–377.
- [5] A. V. Kotikov, “The Gegenbauer polynomial technique: the evaluation of a class of Feynman diagrams”, *Phys. Lett. B*, **375**:1–4 (1996), 240–248.
- [6] M. D’Eramo, L. Pelitti, G. Parisi, “Theoretical predictions for critical exponents at the λ -point of Bose liquids”, *Lett. Nuovo Cimento*, **2**:17 (1971), 878–880.
- [7] Н. И. Усюкина, “О вычислении многопетлевых диаграмм теории возмущений”, *ТМФ*, **54**:1 (1983), 124–129.
- [8] Д. И. Казаков, “Вычисление фейнмановских интегралов методом “уникальностей””, *ТМФ*, **58**:3 (1984), 343–353.
- [9] Д. И. Казаков, “Многопетлевые вычисления: метод уникальностей и функциональные уравнения”, *ТМФ*, **62**:1 (1985), 127–135; D. I. Kazakov, “The method of uniqueness, a new powerful technique for multiloop calculations”, *Phys. Lett. B*, **133**:6 (1983), 406–410.
- [10] D. I. Kazakov, *Analytical methods for multiloop calculations: two lectures on the method of uniqueness*, Preprint JINR E2-84-410, JINR, Dubna, 1984.
- [11] A. G. Grozin, “Massless two-loop self-energy diagram: historical review”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **27**:19 (2012), 1230018, 22 pp.

- [12] D. J. Broadhurst, “Exploiting the 1, 440-fold symmetry of the master two-loop diagram”, *Z. Phys. C: Part. Fields*, **32**:2 (1986), 249–253.
- [13] D. T. Barfoot, D. J. Broadhurst, “ $Z_2 \times S_6$ symmetry of the two-loop diagram”, *Z. Phys. C*, **41**:1 (1988), 81–85.
- [14] J. A. Gracey, “On the evaluation of massless Feynman diagrams by the method of uniqueness”, *Phys. Lett. B*, **277**:4 (1992), 469–473.
- [15] N. A. Kivel, A. S. Stepanenko, A. N. Vasil’ev, “On the calculation of $2 + \varepsilon$ RG functions in the Gross–Neveu model from large- N expansions of critical exponents”, *Nucl. Phys. B*, **424**:3 (1994), 619–627; A. Н. Васильев, С. Э. Деркачев, Н. А. Кивель, А. С. Степаненко, “ $1/n$ -Разложение в модели Гросса–Нэве: расчет индекса η в порядке $1/n^3$ методом конформного бутстрапа”, *ТМФ*, **94**:2 (1993), 179–192, arXiv: hep-th/9302034.
- [16] D. J. Broadhurst, J. A. Gracey, D. Kreimer, “Beyond the triangle and uniqueness relations: non-zeta counterterms at large N from positive knots”, *Z. Phys. C*, **75**:3 (1997), 559–574.
- [17] D. J. Broadhurst, A. V. Kotikov, “Compact analytical form for non-zeta terms in critical exponents at order $1/N^3$ ”, *Phys. Lett. B*, **441**:1–4 (1998), 345–353.
- [18] D. J. Broadhurst, “Where do the tedious products of ζ ’s come from?”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, **116** (2003), 432–436.
- [19] I. Bierenbaum, S. Weinzierl, “The massless two-loop two-point function”, *Eur. Phys. J. C*, **32**:1 (2003), 67–78.
- [20] A. V. Kotikov, S. Teber, “Note on an application of the method of uniqueness to reduced quantum electrodynamics”, *Phys. Rev. D*, **87**:8 (2013), 087701, 5 pp.
- [21] A. V. Kotikov, S. Teber, “Two-loop fermion self-energy in reduced quantum electrodynamics and application to the ultrarelativistic limit of graphene”, *Phys. Rev. D*, **89**:6 (2014), 065038, 24 pp.
- [22] S. Teber, “Electromagnetic current correlations in reduced quantum electrodynamics”, *Phys. Rev. D*, **86**:2 (2012), 025005, 9 pp.
- [23] J. González, F. Guinea, M. A. H. Vozmediano, “Non-Fermi liquid behavior of electrons in the half-filled honeycomb lattice (A renormalization group approach)”, *Nucl. Phys. B*, **424**:3 (1994), 595–618.
- [24] D. C. Elias, R. V. Gorbachev, A. S. Mayorov, S. V. Morozov, A. A. Zhukov, P. Blake, L. A. Ponomarenko, I. V. Grigorieva, K. S. Novoselov, F. Guinea, A. K. Geim, “Dirac cones reshaped by interaction effects in suspended graphene”, *Nature Phys.*, **7**:9 (2011), 701–704.
- [25] E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, “Dynamical chiral symmetry breaking on a brane in reduced QED”, *Phys. Rev. D*, **64**:10 (2001), 105028, 16 pp.
- [26] E. C. Marino, “Quantum electrodynamics of particles on a plane and the Chern–Simons theory”, *Nucl. Phys. B*, **408**:3 (1993), 551–564; N. Dorey, N. E. Mavromatos, “QED₃ and two-dimensional superconductivity without parity violation”, *Nucl. Phys. B*, **386**:3 (1992), 614–680; A. Kovner, B. Rosenstein, “Kosterlitz–Thouless mechanism of two-dimensional superconductivity”, *Phys. Rev. B*, **42**:7 (1990), 4748–4751.
- [27] A. W. W. Ludwig, M. P. A. Fisher, R. Shankar, G. Grinstein, “Integer quantum Hall transition: An alternative approach and exact results”, *Phys. Rev. B*, **50**:11 (1994), 7526–7552.
- [28] E. G. Mishchenko, “Minimal conductivity in graphene: Interaction corrections and ultraviolet anomaly”, *Europhys. Lett.*, **83**:1 (2008), 17005, 5 pp.
- [29] I. F. Herbut, V. Juričić, O. Vafek, “Coulomb interaction, ripples, and the minimal conductivity of graphene”, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:4 (2008), 046403, 4 pp.; D. E. Sheehy, J. Schmalian, “Optical transparency of graphene as determined by the fine-structure constant”, *Phys. Rev. B*, **80**:19 (2009), 193411, 4 pp.; V. Juričić, O. Vafek, I. F. Herbut, “Conductivity of interacting massless Dirac particles in graphene: collisionless regime”, *Phys. Rev. B*, **82**:23 (2010), 235402, 32 pp.; F. de Juan, A. G. Grushin, M. A. H. Vozmediano, “Renormalization of Coulomb interaction in graphene: Determining observable quantities”, *Phys. Rev. B*, **82**:12 (2010), 125409, 7 pp.; S. H. Abedinpour, G. Vignale, A. Principi,

- M. Polini, W.-K. Tse, A. H. MacDonald, “Drude weight, plasmon dispersion, and ac conductivity in doped graphene sheets”, *Phys. Rev. B*, **84**:4 (2011), 045429, 14 pp.; I. Sodemann, M. M. Fogler, “Interaction corrections to the polarization function of graphene”, *Phys. Rev. B*, **86**:11 (2012), 115408, 8 pp.; B. Rosenstein, M. Lewkowicz, T. Maniv, “Chiral anomaly and strength of the electron-electron interaction in graphene”, *Phys. Rev. Lett.*, **110**:6 (2013), 066602, 5 pp.; G. Gazzola, A. L. Cherciglia, L. A. Cabral, M. C. Nemes, M. Sampaio, “Conductivity of Coulomb interacting massless Dirac particles in graphene: regularization-dependent parameters and symmetry constraints”, *Europhys. Lett.*, **104**:2 (2013), 27002, 6 pp., arXiv:1305.6334; J. Link, P. P. Orth, D. E. Sheehy, J. Schmalian, “Universal collisionless transport of graphene”, *Phys. Rev. B*, **93** (2016), 235447, arXiv:1511.05984.
- [30] S. Teber, A. V. Kotikov, “Interaction corrections to the minimal conductivity of graphene via dimensional regularization”, *Europhys. Lett.*, **107**:5 (2014), 57001, 7 pp.
- [31] A. Giuliani, V. Mastropietro, M. Porta, “Absence of interaction corrections in the optical conductivity of graphene”, *Phys. Rev. B*, **83**:19 (2011), 195401, 6 pp.
- [32] I. F. Herbut, V. Mastropietro, “Universal conductivity of graphene in the ultrarelativistic regime”, *Phys. Rev. B*, **87**:20 (2013), 205445, 5 pp.
- [33] K. F. Mak, M. Y. Sfeir, Y. Wu, C. H. Lui, J. A. Misewich, T. F. Heinz, “Measurement of the optical conductivity of graphene”, *Phys. Rev. Lett.*, **101**:19 (2008), 196405, 4 pp.; R. R. Nair, P. Blake, A. N. Grigorenko, K. S. Novoselov, T. J. Booth, T. Stauber, N. M. R. Peres, A. K. Geim, “Fine structure constant defines visual transparency of graphene”, *Science*, **320**:5881 (2008), 1308.
- [34] N. M. R. Peres, “The transport properties of graphene: an introduction”, *Rev. Modern Phys.*, **82**:3 (2010), 2673–2700.