Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Градусов, С. Л. Яковлев, О теории возмущений
в задаче рассеяния для системы трех частиц, *ТМФ*, 2017,
том 191, номер 1, 63–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9166>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 03:49:45

© 2017 г.

В. А. Градусов*, С. Л. Яковлев*

О ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЧАСТИЦ

Рассматривается задача рассеяния для системы трех нерелятивистских частиц при энергиях ниже порога развала системы на три свободные частицы. Считается, что потенциалы взаимодействия представимы суммой двух слагаемых, одно из которых является малым возмущением. Разработана схема теории возмущений для решения задачи рассеяния на базе трехчастичных уравнений Фаддеева.

Ключевые слова: теория возмущений, непрерывный спектр, задача рассеяния для системы трех частиц.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9166>

Посвящается памяти Л. Д. Фаддеева

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах квантовой механики взаимодействие между частицами можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых является малой добавкой (возмущением). Естественным в таком случае является решение задачи с невозмущенным потенциалом с последующим уточнением этого решения путем учета тем или иным способом малого возмущения. Такой подход получил название теории возмущений [1]. Для задачи рассеяния теория возмущений сводится к построению так называемого борновского ряда (в более общем виде – борновского ряда искаженных волн в случае нетривиального невозмущенного потенциала) для амплитуды рассеяния. Частичные суммы этого ряда называются борновскими приближениями соответствующих порядков. Базой для построения борновского ряда служит уравнение Липпмана–Швингера. Формализм теории возмущений хорошо разработан для системы двух частиц [2], [3]. Однако для систем трех и большего числа частиц теория возмущений для задачи рассеяния требует дальнейшего развития прежде всего потому, что двухчастичную теорию нельзя формально перенести на случай трех частиц. Последнее связано с нефредгольмовостью уравнения

Работа поддержана СПбГУ (грант № 11.38.241.2015), РФФИ (грант № 14-02-00326).

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: s.yakovlev@spbu.ru

Липпмана–Швингера для случая трех частиц. Следствием является то, что это уравнение для системы трех частиц не гарантирует единственность решения задачи рассеяния [4] и поэтому не может служить базой для построения рядов теории возмущений.

Как известно, система уравнений Фаддеева [5] для трех частиц имеет единственное решение и, следовательно, уравнения этой системы можно положить в основу теории возмущений вместо уравнения Липпмана–Швингера. В этом случае матричная структура уравнений Фаддеева приводит к необходимости рассматривать существенно более сложные конструкции для элементов рядов теории возмущений, что к настоящему времени не реализовано в полной мере. Помимо многих других ситуаций, примерами, в которых востребованы результаты трехчастичной теории возмущений, могут служить задачи, рассмотренные в статьях [6] и [7].

Целью настоящей работы является последовательная разработка формальной схемы теории возмущений, основанной на уравнениях Фаддеева, для решения задачи рассеяния в системе трех частиц при энергиях ниже порога развала системы на три частицы. Случай энергии выше порога развала также можно рассмотреть аналогичным образом, но это требует использования некоторых дополнительных конструкций. Последние заметно усложняют формализм, и по этой причине случай энергий выше порога развала системы на три частицы будет рассмотрен в отдельной публикации.

Настоящая работа состоит из введения, трех разделов и заключения. В разделе 2 дано краткое изложение стандартного формализма теории возмущений для задачи рассеяния в системе двух частиц с целью представить основные положения, которые необходимо обобщить на случай системы трех частиц. В разделе 3 дается постановка задачи рассеяния для трех частиц на основе уравнений Фаддеева. В разделе 4 последовательно изложен формализм теории возмущений, базирующийся на трехчастичных уравнениях Фаддеева. В заключении коротко сформулированы полученные результаты и обозначены пути дальнейших обобщений.

2. СИСТЕМА ДВУХ ЧАСТИЦ

В данном разделе мы даем краткий обзор основных положений теории возмущений для задачи рассеяния в системе двух частиц. Хотя большинство формул данного раздела можно найти в стандартных руководствах по теории рассеяния (см., например, работы [2], [3]), здесь мы приводим необходимые для дальнейших обобщений результаты, вводя при этом соответствующие обозначения.

Оператор Шредингера для системы двух частиц представляется в виде

$$h(\lambda) = h_0 + v + \lambda w. \quad (1)$$

Оператор h_0 дается выражением

$$h_0 = -\Delta, \quad (2)$$

в котором через Δ обозначен лапласиан в $\mathbb{R}^3$. Слагаемые $v \equiv v(\mathbf{x})$ и $w \equiv w(\mathbf{x})$ представляют потенциалы взаимодействия между частицами. Вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ описывает относительное положение частиц. Здесь и далее векторы обозначаются жирным

прифтом. В дальнейшем под $\hat{x}$ понимается единичный вектор $\hat{x} = \mathbf{x}/x$, где x – длина вектора $\mathbf{x}$, т.е. $x = |\mathbf{x}|$. Предполагается, что слагаемое λw в (1) является малой добавкой к потенциалу v . Степень малости определяется вещественной константой связи λ . Потенциалы v и w считаются короткодействующими, точнее предполагается, что они являются вещественнозначными непрерывными функциями, для которых справедлива оценка

$$|v(\mathbf{x})| \leq C(1+x)^{-1-\theta}, \quad \theta > 0, \quad (3)$$

где $C > 0$ – некоторая константа.

Формально решение задачи рассеяния для уравнения Шредингера с гамильтонианом (1), записанного в виде

$$[k^2 - h(\lambda)]\psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \lambda) = 0,$$

где введено обозначение $\psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \lambda) \equiv \psi^{(\pm)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \lambda)$, дается формулой

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \lambda) = \lim_{\eta \rightarrow +0} \pm i\eta r(\lambda, k^2 \pm i\eta)\phi(\mathbf{k}). \quad (4)$$

Здесь $r(\lambda, z) = [z - h(\lambda)]^{-1}$ – резольвента оператора $h(\lambda)$, а $\phi(\mathbf{k}) \equiv \phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{k})}$ – собственная функция оператора h_0 (падающая волна). Представление (4) стандартным образом приводит к уравнению Липпмана–Швингера

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \lambda) = \phi(\mathbf{k}) + r_0(k^2 \pm i0)[v + \lambda w]\psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \lambda). \quad (5)$$

В этом уравнении $r_0(z) = (z - h_0)^{-1}$ – резольвента оператора h_0 . Использование в уравнении (5) хорошо известной асимптотики ядра резольвенты (функции Грина) $r_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', k^2 \pm i0)$ при $x \rightarrow \infty$ и $x' \ll x$:

$$r_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', k^2 \pm i0) \sim -(4\pi)^{-1} \frac{e^{\pm i k x}}{x} \phi^*(\mathbf{x}', \pm \mathbf{k}'), \quad \mathbf{k}' = k\hat{x}, \quad (6)$$

позволяет записать функцию $\psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \lambda)$ при $x \rightarrow \infty$ в виде

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \lambda) \sim \phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}) + a^{(\pm)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \lambda) \frac{e^{\pm i k x}}{x}. \quad (7)$$

Последнее представление определяет амплитуду рассеяния $a^{(\pm)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \lambda)$, которая дается интегралом

$$a^{(\pm)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \lambda) = -(4\pi)^{-1} \int d\mathbf{q} \phi^*(\mathbf{q}, \pm \mathbf{k}') [v(\mathbf{q}) + \lambda w(\mathbf{q})] \psi^{(\pm)}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \lambda). \quad (8)$$

В формулах (6), (8) и далее символом “*” обозначается комплексное сопряжение. Заметим, что условие (3) на потенциалы взаимодействия гарантирует лишь неабсолютную сходимость интеграла в (8) при $\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}$. Абсолютная сходимость имеет место при более сильном условии $\theta > 2$ в (3) (см., например, статью [8]). Также следует заметить, что в кулоновском случае ($\theta = 0$) интеграл в (8) расходится и придать ему смысл удастся только при рассмотрении этого интеграла в смысле обобщенных функций. Последнее, в частности, отражает тот факт, что асимптотическое

поведение решения (7) в случае кулоновского потенциала взаимодействия перестает быть справедливым. В данной работе мы ограничиваемся исследованием случая короткодействующих потенциалов, для которых $\theta > 0$. Кулоновский случай будет рассмотрен в другой работе. В дальнейшем для интегралов вида (8) удобно использовать стандартное сокращенное обозначение, с помощью которого (8) записывается как

$$a^{(\pm)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \lambda) = -(4\pi)^{-1} \langle \phi(\pm \mathbf{k}') | [v + \lambda w] | \psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \lambda) \rangle. \quad (9)$$

Поскольку формулы для функций со знаками “+” и “−” аналогичны, то для упрощения обозначений далее в основном рассматривается случай функций со знаком “+”, которые обозначаются $\psi \equiv \psi^{(+)}$ и $a \equiv a^{(+)}$.

В рамках теории возмущений решение уравнения (5) строится в виде степенного ряда

$$\psi(\mathbf{k}, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \psi_n(\mathbf{k}), \quad (10)$$

в котором коэффициенты $\psi_n(\mathbf{k})$ определяются рекуррентно из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \psi_0(\mathbf{k}) &= \phi(\mathbf{k}) + r_0(k^2 + i0)v\psi_0(\mathbf{k}), \\ \psi_n(\mathbf{k}) &= r_0(k^2 + i0)w\psi_{n-1}(\mathbf{k}) + r_0(k^2 + i0)v\psi_n(\mathbf{k}), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Равенства в (11) представляют собой набор уравнений Липпмана–Швингера с невозмущенным потенциалом v и набором свободных членов, вычисляемых рекуррентно. При этом величина $\psi_0(\mathbf{k})$ является решением задачи рассеяния для уравнения Шредингера с невозмущенным гамильтонианом $h(0)$. Заметим, что уравнения (11) можно решить относительно $\psi_n(\mathbf{k})$ с помощью резольвенты $r(z, 0)$:

$$\psi_n(\mathbf{k}) = r(k^2 + i0, 0)w\psi_{n-1}(\mathbf{k}), \quad n \geq 1, \quad (12)$$

что более привычно, однако для обобщения на случай системы трех частиц форма (11) является более подходящей.

Используя асимптотическое представление (6) в уравнениях (11), приходим для $\psi(\mathbf{k})$ к выражению (7), в котором амплитуда рассеяния дается рядом

$$a(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \lambda) = -(4\pi)^{-1} \sum_{n \geq 0} \lambda^n a_n(\mathbf{k}', \mathbf{k}). \quad (13)$$

Коэффициенты $a_n(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ этого ряда определяются по формулам

$$a_0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \langle \phi(\mathbf{k}') | v | \psi_0(\mathbf{k}) \rangle, \quad (14)$$

$$a_n(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \langle \phi(\mathbf{k}') | w | \psi_{n-1}(\mathbf{k}) \rangle + \langle \phi(\mathbf{k}') | v | \psi_n(\mathbf{k}) \rangle, \quad n \geq 1. \quad (15)$$

Первый член разложения (13), как и выше равный $-(4\pi)^{-1}a_0(\mathbf{k}', \mathbf{k})$, непосредственно связан с задачей рассеяния для невозмущенного уравнения Шредингера с гамильтонианом $h(0)$ и, как следует из (14), представляет собой амплитуду рассеяния этой задачи.

Формулы (10)–(15) в концентрированном виде представляют формализм теории возмущений для задачи рассеяния в системе двух частиц. Подчеркнем еще раз, что в данной работе мы не исследуем вопросы сходимости соответствующих разложений. Для задачи двух тел обсуждение этих условий можно найти, например, в работах [2], [3].

В задаче рассеяния для трех частиц нам понадобятся и собственные функции дискретного спектра операторов $h(\lambda)$. Эти функции удовлетворяют однородному уравнению

$$\psi(\lambda) = r_0(\epsilon)[v + \lambda w]\psi(\lambda). \quad (16)$$

Согласно результатам работ [4], [9] уравнение (16) может иметь нетривиальное решение только для дискретного набора вещественных $\epsilon(\lambda) < 0$. При этом если в условиях на поведение потенциалов (3) параметр $\theta > 1$, то этот набор конечен. Соответствующие функции $\psi(\lambda) \equiv \psi(\mathbf{x}, \lambda)$ квадратично интегрируемы:

$$\langle \psi(\lambda) | \psi(\lambda) \rangle \equiv \int d\mathbf{x} |\psi(\mathbf{x}, \lambda)|^2 = N^2 < \infty, \quad (17)$$

а пары $\psi(\lambda)$ и $\epsilon(\lambda)$ удовлетворяют уравнению

$$h(\lambda)\psi(\lambda) = \epsilon(\lambda)\psi(\lambda). \quad (18)$$

В дальнейшем мы считаем, что $\theta > 1$ и при каждом λ существует только одно такое значение $\epsilon(\lambda)$, тем самым дискретный спектр операторов $h(\lambda)$ состоит из одного собственного значения. Собственную функцию $\psi(\lambda)$ мы считаем нормированной на единицу, т.е. $N = 1$. В силу вещественности потенциалов собственную функцию $\psi(\lambda)$ можно выбрать вещественной.

В рамках стандартной теории возмущений для дискретного спектра функции $\psi(\lambda)$ и $\epsilon(\lambda)$ даются степенными рядами [1], [3]

$$\psi(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \psi^{(n)}, \quad (19)$$

$$\epsilon(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \epsilon^{(n)}. \quad (20)$$

Здесь начальная пара $\psi^{(0)}$, $\epsilon^{(0)}$ отвечает невозмущенному оператору $h(0)$:

$$h(0)\psi^{(0)} = \epsilon^{(0)}\psi^{(0)}, \quad (21)$$

а поправки вычисляются рекуррентно [3] и в случае, например, первого порядка даются хорошо известными формулами:

$$\begin{aligned} \epsilon^{(1)} &= \langle \psi^{(0)} | w | \psi^{(0)} \rangle, \\ \psi^{(1)} &= [\epsilon^{(0)} - h(0) + \epsilon^{(0)} | \psi^{(0)} \rangle \langle \psi^{(0)} |]^{-1} [-\epsilon^{(1)} + w] \psi^{(0)}. \end{aligned}$$

Приведем, наконец, решение уравнения Липпмана–Швингера

$$r(z, \lambda) = r_0(z) + r_0(z)[v + \lambda w]r(z, \lambda) \quad (22)$$

для резольвенты $r(z, \lambda) = [z - h(\lambda)]^{-1}$, полученное по методу теории возмущений. В этом случае $r(z, \lambda)$ представляется разложением

$$r(z, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n r^{(n)}(z), \quad (23)$$

коэффициенты которого определяются рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} r^{(0)}(z) &= r_0(z) + r_0(z)vr^{(0)}(z), \\ r^{(n)}(z) &= r_0(z)wr^{(n-1)}(z) + r_0(z)vr^{(n)}(z), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Полезно заметить, что в силу (4) $r^{(n)}$ и ψ_n связаны соотношением

$$\psi_n(\mathbf{k}) = \lim_{\eta \rightarrow +0} i\eta r^{(n)}(k^2 + i\eta)\phi(\mathbf{k}), \quad (25)$$

а $r^{(0)}(z) = r(z, 0)$.

3. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЧАСТИЦ НА БАЗЕ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА

В этом разделе мы приводим постановку задачи рассеяния для системы трех частиц и формулируем уравнения Фаддеева для компонент трехчастичной волновой функции для рассеяния частицы на связанной паре частиц при энергиях ниже порога развала системы на три свободные частицы. Предполагается, что частицы являются нерелятивистскими и бесспиновыми. Относительное положение частиц описывается посредством координат Якоби [4] $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_\gamma, \mathbf{y}_\gamma\}$, $\gamma = 1, 2, 3$, $\mathbf{x}_\gamma, \mathbf{y}_\gamma \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^6$, отвечающих одной из фиксированных пар частиц γ . Оператор Шредингера для рассматриваемой системы имеет вид

$$H(\lambda) = H_0 + \sum_{\gamma=1}^3 (V_\gamma + \lambda W_\gamma), \quad (26)$$

где $H_0 = -\Delta_{\mathbf{x}_\gamma} - \Delta_{\mathbf{y}_\gamma}$, а V_γ и W_γ суть операторы умножения на функции $v_\gamma(\mathbf{x}_\gamma)$ и $w_\gamma(\mathbf{x}_\gamma)$ соответственно, которые задают потенциалы взаимодействия между частицами пары γ . Потенциалы взаимодействия считаются короткодействующими и подчиняющимися оценкам (3). В каждом из парных потенциалов взаимодействия присутствует малая добавка λw_γ . Степень малости добавочных потенциалов для удобства описывается единой вещественной константой связи λ . Как и в предыдущем разделе мы не конкретизируем эту степень малости возмущения, концентрируясь в данной работе на построении формальной схемы теории возмущений и оставляя вопросы сходимости на будущее.

Наряду с трехчастичным оператором $H(\lambda)$ в дальнейшем рассматриваются также парные операторы Шредингера в трехчастичном пространстве:

$$H_\alpha(\lambda) = H_0 + V_\alpha + \lambda W_\alpha. \quad (27)$$

Собственные функции операторов $H_\alpha(\lambda)$ вида

$$\Phi_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, \lambda) \equiv \Phi_\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{p}_\alpha, \lambda) = \psi_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, \lambda)\phi(\mathbf{y}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha), \quad (28)$$

удовлетворяющие уравнению

$$H_\alpha(\lambda)\Phi_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, \lambda) = E\Phi_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, \lambda), \quad (29)$$

где $|\mathbf{p}_\alpha| = p_\alpha(\lambda) = \sqrt{E - \epsilon_\alpha(\lambda)}$, определяют состояние системы трех тел, называемое двухчастичным каналом. В таком состоянии частицы пары α находятся в связанном состоянии с энергией $\epsilon_\alpha(\lambda) < 0$ и волновой функцией $\psi_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, \lambda)$, а третья частица не взаимодействует с частицами связанной пары и движется свободно с относительным импульсом $\mathbf{p}_\alpha$. Модуль вектора $\mathbf{p}_\alpha$ зависит от λ , но мы не будем явно указывать эту зависимость в обозначениях везде, где это не ведет к недоразумениям. Функции $\psi_\alpha(\lambda) \equiv \psi_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, \lambda)$ удовлетворяют уравнениям

$$h_\alpha(\lambda)\psi_\alpha(\lambda) = \epsilon_\alpha(\lambda)\psi_\alpha(\lambda) \quad (30)$$

с операторами $h_\alpha(\lambda) = h_0 + v_\alpha + \lambda w_\alpha \equiv -\Delta_{\mathbf{x}_\alpha} + v_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) + \lambda w_\alpha(\mathbf{x}_\alpha)$. Мы будем считать, что двухчастичные операторы $h_\alpha(\lambda)$ при каждом $\alpha = 1, 2, 3$ обладают теми же свойствами, что и $h(\lambda)$ из предыдущего раздела, в частности, дискретный спектр каждого из операторов $h_\alpha(\lambda)$ содержит лишь одно собственное значение $\epsilon_\alpha(\lambda) < 0$ с нормированной вещественной собственной функцией $\psi_\alpha(\lambda) \equiv \psi_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, \lambda)$. Соответствующий двухчастичный канал считается открытым при энергии E , если выполняется неравенство $E - \epsilon_\alpha \geq 0$, и закрытым в противном случае.

В данной работе мы рассматриваем трехчастичные задачи рассеяния, в которых все двухчастичные каналы открыты, а канал, отвечающий трехчастичному континууму¹⁾, закрыт. В терминах энергии это соответствует условиям $E - \epsilon_\beta(\lambda) \geq 0$, $\beta = 1, 2, 3$, и $E < 0$. Для таких энергий имеется три типа решений задачи рассеяния: $\Psi^{(\beta)}(\mathbf{p}_\beta, \lambda)$, $\beta = 1, 2, 3$, каждый из которых определяется начальным состоянием $\Phi_\beta(\mathbf{p}_\beta, \lambda)$ из соответствующего двухчастичного канала [5]:

$$\Psi^{(\beta)}(\mathbf{p}_\beta, \lambda) = \lim_{\eta \rightarrow +0} i\eta R(E + i\eta)\Phi_\beta(\mathbf{p}_\beta, \lambda), \quad (31)$$

где $E = \epsilon_\beta(\lambda) + p_\beta^2$ и $R(z) = [z - H(\lambda)]^{-1}$. Как уже отмечалось во введении, для нахождения $\Psi^{(\beta)}(\mathbf{p}_\beta, \lambda)$ необходимо использовать не уравнения Липпмана–Швингера, как в случае двух частиц, а уравнения Фаддеева [4], [5]. Эти уравнения формулируются для компонент функций $\Psi^{(\beta)}(\mathbf{p}_\beta, \lambda)$. Опишем эти компоненты и уравнения для них, следуя статье [10]. Сначала необходимо ввести компоненты резольвенты $R(z)$ по формулам

$$R_{\alpha\beta}(z, \lambda) = R_0(z)\delta_{\alpha\beta} + R_0(z)(V_\alpha + \lambda W_\alpha)R(z, \lambda), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (32)$$

Эти компоненты удовлетворяют уравнениям Фаддеева

$$R_{\alpha\beta}(z, \lambda) = R_\alpha(z, \lambda)\delta_{\alpha\beta} + R_\alpha(z, \lambda)[V_\alpha + \lambda W_\alpha] \sum_{\gamma \neq \alpha} R_{\gamma\beta}(z, \lambda), \quad (33)$$

в которых $R_\alpha(z, \lambda) = [z - H_\alpha(\lambda)]^{-1}$. Резольвента $R(z, \lambda)$ восстанавливается по компонентам суммированием по первому индексу:

$$R(z, \lambda) = \sum_{\alpha} R_{\alpha\beta}(z, \lambda) \quad (34)$$

¹⁾Этот канал формируется собственными функциями оператора H_0 лишь при неотрицательных энергиях.

при произвольном фиксированном β . Компоненты волновой функции $\Psi_\alpha^{(\beta)}(\mathbf{p}_\beta, \lambda)$, $\alpha = 1, 2, 3$, определяются с помощью компонент резольвенты (32) по аналогичной (31) формуле:

$$\Psi_\alpha^{(\beta)}(\mathbf{p}_\beta, \lambda) = \lim_{\eta \rightarrow +0} i\eta R_{\alpha\beta}(E + i\eta, \lambda) \Phi_\beta(\mathbf{p}_\beta, \lambda), \quad (35)$$

и благодаря уравнениям (33) удовлетворяют системе уравнений Фаддеева

$$\Psi_\alpha^{(\beta)}(\mathbf{p}_\beta, \lambda) = \delta_{\alpha\beta} \Phi_\beta(\mathbf{p}_\beta, \lambda) + R_\alpha(E^+, \lambda) [V_\alpha + \lambda W_\alpha] \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{(\beta)}(\mathbf{p}_\beta, \lambda). \quad (36)$$

Здесь введено обозначение $E^+ = E + i0$. Как и в случае резольвенты полная волновая функция восстанавливается из компонент суммированием:

$$\Psi^{(\beta)}(\mathbf{p}_\beta, \lambda) = \sum_\alpha \Psi_\alpha^{(\beta)}(\mathbf{p}_\beta, \lambda). \quad (37)$$

Имеется и обратное соотношение:

$$\Psi_\alpha^{(\beta)}(\mathbf{p}_\beta, \lambda) = R_0(E^+) [V_\alpha + \lambda W_\alpha] \Psi^{(\beta)}(\mathbf{p}_\beta, \lambda), \quad (38)$$

в котором $R_0(z) = (z - H_0)^{-1}$. Формула (38) показывает, что компонента $\Psi_\alpha^{(\beta)}$ формируется только той частью полной волновой функции $\Psi^{(\beta)}$, которая сосредоточена на области конфигурационного пространства, где отличен от нуля потенциал $v_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) + \lambda w_\alpha(\mathbf{x}_\alpha)$, действующий между частицами пары α . Последнее обстоятельство позволяет относительно легко вычислить асимптотику компоненты $\Psi_\alpha^{(\beta)}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_\beta, \lambda)$ в случае $y_\alpha = |\mathbf{y}_\alpha| \rightarrow \infty$ с помощью формулы [4]

$$R_\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{X}', E + i0, \lambda) \sim -(4\pi)^{-1} \psi_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, \lambda) \times \\ \times \frac{e^{i\sqrt{E-\epsilon_\alpha(\lambda)} y_\alpha}}{y_\alpha} \Phi_\alpha^*(\mathbf{X}', \sqrt{E-\epsilon_\alpha(\lambda)} \hat{y}_\alpha, \lambda) \quad (39)$$

для канальной функции Грина R_α при $y_\alpha \rightarrow \infty$, $E - \epsilon_\alpha(\lambda) \geq 0$, $E < 0$, в которой предполагается, что $|\mathbf{X}'| \ll y_\alpha$. В результате применения формулы (39) в системе (36) получается следующее представление:

$$\Psi_\alpha^{(\beta)}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_\beta, \lambda) \sim \delta_{\alpha\beta} \Phi_\beta(\mathbf{X}, \mathbf{p}_\beta, \lambda) + \mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda) Q_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, y_\alpha, p_\alpha, \lambda), \quad (40)$$

в котором $\mathbf{p}'_\alpha \equiv \sqrt{E - \epsilon_\alpha(\lambda)} \hat{y}_\alpha$, а через $Q_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, y_\alpha, p_\alpha, \lambda)$ обозначена кластерная сферическая волна

$$Q_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, y_\alpha, p_\alpha, \lambda) = \psi_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, \lambda) \frac{e^{ip_\alpha y_\alpha}}{y_\alpha}. \quad (41)$$

Здесь $p_\alpha = \sqrt{E - \epsilon_\alpha(\lambda)}$ и, следовательно, $p_\alpha = p'_\alpha$.

Функция $\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda)$ – амплитуда перехода системы “из канала β в канал α ” – дается интегралом

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda) = -(4\pi)^{-1} \int d\mathbf{Q} \Phi_\alpha^*(\mathbf{Q}, \mathbf{p}'_\alpha, \lambda) [v_\alpha(\mathbf{q}_\alpha) + \lambda w_\alpha(\mathbf{q}_\alpha)] \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{(\beta)}(\mathbf{Q}, \mathbf{p}_\beta, \lambda). \quad (42)$$

В дальнейшем для интегралов такого вида удобно использовать сокращенное обозначение, аналогичное обозначению в случае двух частиц, которое позволяет переписать предыдущую формулу в более компактном виде:

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_{\alpha}, \mathbf{p}_{\beta}, \lambda) = -(4\pi)^{-1} \left\langle \Phi_{\alpha}(\mathbf{p}'_{\alpha}, \lambda) \left| V_{\alpha} + \lambda W_{\alpha} \right| \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_{\gamma}^{(\beta)}(\mathbf{p}_{\beta}, \lambda) \right\rangle. \quad (43)$$

4. ТРЕХЧАСТИЧНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА

Уравнения (36) по своей структуре аналогичны уравнению (5), поэтому их можно решить с помощью приема, подобного тому, который был использован в разделе 2. Однако имеется и отличие от уравнения (5), состоящее в том, что трехчастичные уравнения содержат зависимость от константы связи λ не только в потенциальном члене λW_{α} , но от λ также зависят свободный член $\Phi_{\beta}(\mathbf{p}_{\beta}, \lambda)$, резольвенты $R_{\alpha}(E^{+}, \lambda)$ и модули импульсных переменных $p'_{\alpha}(\lambda) = \sqrt{E - \epsilon_{\alpha}(\lambda)}$ и $p_{\beta}(\lambda) = \sqrt{E - \epsilon_{\beta}(\lambda)}$. Это отличие является крайне важным, так как приводит к тому, что такие параметры каналов, как парные волновые функции связанных состояний и их энергии связи, получают требуемые возмущения в формулах типа (40). При этом возмущенные амплитуды перехода $\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_{\alpha}, \mathbf{p}_{\beta}, \lambda)$ появляются в асимптотике компонент волновых функций (40) как коэффициенты при возмущенных кластерных сферических волнах $Q_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha}, y_{\alpha}, p_{\alpha}, \lambda)$.

Данное отличие на первый взгляд препятствует применению приема раздела 2 для решения трехчастичных уравнений. Однако следует принять во внимание следующее обстоятельство. Резольвенты $R_{\alpha}(E^{+}, \lambda)$, волновые функции парных каналов $\Phi_{\alpha}(\mathbf{p}_{\alpha}, \lambda)$, волновые функции $\psi_{\alpha}(\lambda)$ связанных состояний пар частиц и энергии связи парных подсистем $\epsilon_{\alpha}(\lambda)$ полностью определяются двухчастичными данными и тем самым могут и должны быть построены на этапе решения задачи двух частиц с привлечением двухчастичной теории возмущений из раздела 2.

Согласно (43) для построения разложения по степеням константы связи для амплитуд $\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_{\alpha}, \mathbf{p}_{\beta}, \lambda)$ необходимо иметь следующие разложения для $\Phi_{\alpha}(\mathbf{p}'_{\alpha}, \lambda)$ и $\Psi_{\gamma}^{(\beta)}(\mathbf{p}_{\beta}, \lambda)$. Для первой величины соответствующее разложение вытекает из формулы (19) и (28) и имеет вид

$$\Phi_{\alpha}(\mathbf{p}_{\alpha}, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \Phi_{\alpha}^{(n)}(\mathbf{p}_{\alpha}), \quad (44)$$

где

$$\Phi_{\alpha}^{(n)}(\mathbf{p}_{\alpha}) = \psi_{\alpha}^{(n)} \phi(\mathbf{p}_{\alpha}). \quad (45)$$

Для построения разложения для $\Psi_{\gamma}^{(\beta)}(\mathbf{p}_{\beta}, \lambda)$ необходимо использовать исходные трехчастичные уравнения (36). В этих уравнениях для оператора $R_{\alpha}(E^{+}, \lambda)$ следует воспользоваться разложением двухчастичных резольвент (23) и выражением для ядра резольвенты $R_{\alpha}(z, \lambda)$:

$$R_{\alpha}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', z, \lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} d\zeta r_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha}, \mathbf{x}'_{\alpha}, z - \zeta, \lambda) \frac{\sin(\sqrt{\zeta} |\mathbf{y}_{\alpha} - \mathbf{y}'_{\alpha}|)}{|\mathbf{y}_{\alpha} - \mathbf{y}'_{\alpha}|}, \quad (46)$$

в которой функция $r_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}'_\alpha, z - \zeta, \lambda)$ есть ядро двухчастичной резольвенты $r_\alpha(z, \lambda) = (z - h_\alpha(\lambda))^{-1}$. В результате приходим к разложению

$$R_\alpha(z, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n R_\alpha^{(n)}(z). \quad (47)$$

Здесь ядра операторов $R_\alpha^{(n)}(z)$ даются формулой (46), в которой r_α следует заменить на $r_\alpha^{(n)}$ из разложений (23), записанных для резольвент операторов $h_\alpha(\lambda)$. Заметим также, что $R_\alpha^{(0)}(z) = R_\alpha(z, 0)$.

Помимо явной зависимости от константы связи λ , даваемой формулами (44) и (47), в уравнениях (36), (43) присутствует зависимость от λ через значения модулей импульсных переменных $p'_\alpha(\lambda)$ и $p_\beta(\lambda)$. Вывод искомым разложений по константе связи для амплитуд перехода мы осуществим в два этапа. На первом этапе мы получим разложения, порождаемые разложениями (44) и (47), а на втором этапе учтем упомянутую выше зависимость от констант связи модулей векторов $p'_\alpha(\lambda)$ и $p_\beta(\lambda)$.

Для реализации первого этапа мы воспользуемся приемом введения вспомогательной константы связи μ , не зависящей от λ , и будем считать, что модули указанных импульсов зависят от вспомогательной константы связи μ , а именно, $|\mathbf{p}'_\alpha| = p'_\alpha(\mu)$ и $|\mathbf{p}_\beta| = p_\beta(\mu)$. Тогда, подставляя представления (44) и (47) в систему (36), приходим к уравнениям вида

$$\Psi_\alpha(\mathbf{p}_\beta, \lambda) = \delta_{\alpha\beta} \sum_{n \geq 0} \lambda^n \Phi_\alpha^{(n)}(\mathbf{p}_\alpha) + \sum_{n \geq 0} \lambda^n R_\alpha^{(n)}(E^+) [V_\alpha + \lambda W_\alpha] \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma(\mathbf{p}_\beta, \lambda). \quad (48)$$

Аналогично двухчастичному случаю (10) теперь решение системы уравнений (48) строится в виде степенного ряда:

$$\Psi_\alpha(\mathbf{p}_\beta, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \Psi_\alpha^{(n)}(\mathbf{p}_\beta). \quad (49)$$

Для коэффициентов этого ряда получаем следующую цепочку уравнений:

$$\Psi_\alpha^{(0)}(\mathbf{p}_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \Phi_\beta^{(0)}(\mathbf{p}_\beta) + R_\alpha^{(0)}(E^+) V_\alpha \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{(0)}(\mathbf{p}_\beta), \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^{(n)}(\mathbf{p}_\beta) = & \delta_{\alpha\beta} \Phi_\beta^{(n)}(\mathbf{p}_\beta) + \sum_{m=0}^{n-1} [R_\alpha^{(n-1-m)}(E^+) W_\alpha + R_\alpha^{(n-m)}(E^+) V_\alpha] \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{(m)}(\mathbf{p}_\beta) + \\ & + R_\alpha^{(0)}(E^+) V_\alpha \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{(n)}(\mathbf{p}_\beta), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (51)$$

Отметим, что уравнения (50), (51) представляют собой уравнения Фаддеева с набором свободных членов, вычисляемых рекуррентно, и в силу доказанных для системы уравнений Фаддеева свойств существования и единственности [5] уравнения (50), (51) корректно определяют коэффициенты ряда (49). Выведенные представления дают возможность получить из (43) искомое разложение для амплитуд перехода:

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda) = -(4\pi)^{-1} \sum_{k \geq 0} \lambda^k \sum_{m=0}^k \left\langle \Phi_\alpha^{(k-m)}(\mathbf{p}'_\alpha) \left| V_\alpha + \lambda W_\alpha \right| \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{(m)}(\mathbf{p}_\beta) \right\rangle. \quad (52)$$

Формула (52) дает одно из решений задачи построения разложения теории возмущений для амплитуд перехода. Для полноты мы получим еще одно представление для этих амплитуд. Мы воспользуемся тем, что теория возмущений (10), (11) для двухчастичной задачи рассеяния фактически является реализацией метода итераций для решения уравнения второго рода (5) с малым оператором $r_0(k^2 + i0)\lambda w$. Именно эту процедуру мы обобщим на трехчастичный случай. Трехчастичные уравнения (36) в своей структуре имеют аналогичный малый оператор $R_\alpha(E^+, \lambda)\lambda W_\alpha$. Для того чтобы реализовать метод итераций в трехчастичном случае, мы вновь воспользуемся приемом введения вспомогательной константы связи. Рассмотрим двухпараметрическую систему уравнений

$$\Psi_\alpha(\mathbf{p}_\beta, g, \lambda) = \delta_{\alpha\beta}\Phi_\beta(\mathbf{p}_\beta, \lambda) + R_\alpha(E^+, \lambda)[V_\alpha + gW_\alpha] \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma(\mathbf{p}_\beta, g, \lambda). \quad (53)$$

Ясно, что решение уравнений (36) получается из решения системы (53) при $g = \lambda$.

Аналогично двухчастичному случаю (10) теперь решение системы уравнений (53) по методу итераций записывается в виде степенного ряда по степеням вспомогательной константы связи g :

$$\Psi_\alpha(\mathbf{p}_\beta, g, \lambda) = \sum_{n \geq 0} g^n \Psi_\alpha^{[n]}(\mathbf{p}_\beta, \lambda). \quad (54)$$

Коэффициенты этого ряда определяются рекуррентно из уравнений

$$\Psi_\alpha^{[0]}(\mathbf{p}_\beta, \lambda) = \delta_{\alpha\beta}\Phi_\beta(\mathbf{p}_\beta, \lambda) + R_\alpha(E^+, \lambda)V_\alpha \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[0]}(\mathbf{p}_\beta, \lambda), \quad (55)$$

$$\Psi_\alpha^{[n]}(\mathbf{p}_\beta, \lambda) = R_\alpha(E^+, \lambda)W_\alpha \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[n-1]}(\mathbf{p}_\beta, \lambda) + R_\alpha(E^+, \lambda)V_\alpha \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[n]}(\mathbf{p}_\beta, \lambda), \quad n \geq 1, \quad (56)$$

в полной аналогии с (11). Использование асимптотики (39) для резольвент ведет к следующему асимптотическому при $y_\alpha \rightarrow \infty$ представлению для $\Psi_\alpha(\mathbf{p}_\beta, g, \lambda)$:

$$\Psi_\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{p}_\beta, g, \lambda) \sim \delta_{\alpha\beta}\Phi_\beta(\mathbf{X}, \mathbf{p}_\beta, \lambda) + A_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, g, \lambda)Q_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, y_\alpha, p_\alpha, \lambda). \quad (57)$$

Амплитуда $A_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, g, \lambda)$ здесь дается рядом

$$A_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, g, \lambda) = -(4\pi)^{-1} \sum_{n \geq 0} g^n A_{\alpha\beta}^{[n]}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda), \quad (58)$$

коэффициенты которого выражаются в терминах $\Psi_\alpha^{[n]}(\mathbf{p}_\beta, \lambda)$ посредством формул

$$A_{\alpha\beta}^{[0]}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda) = \left\langle \Phi_\alpha(\mathbf{p}'_\alpha, \lambda) \left| V_\alpha \right| \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[0]}(\mathbf{p}_\beta, \lambda) \right\rangle, \quad (59)$$

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}^{[n]}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda) = & \left\langle \Phi_\alpha(\mathbf{p}'_\alpha, \lambda) \left| W_\alpha \right| \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[n-1]}(\mathbf{p}_\beta, \lambda) \right\rangle + \\ & + \left\langle \Phi_\alpha(\mathbf{p}'_\alpha, \lambda) \left| V_\alpha \right| \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[n]}(\mathbf{p}_\beta, \lambda) \right\rangle, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (60)$$

Подчеркнем, что благодаря примененному нами приему введения вспомогательной константы связи g мы получили для $\Psi_\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{p}_\beta, g, \lambda)$ асимптотическое представление (57), которое совпадает по форме с (40). В частности, амплитуда $A_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, g, \lambda)$ является коэффициентом при $Q_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, y_\alpha, p_\alpha, \lambda)$ – возмущенной кластерной сферической волне. Отсюда непосредственно следует, что искомая амплитуда $\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda)$ теперь получается из $A_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, g, \lambda)$ при $g = \lambda$:

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda) = A_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda, \lambda). \quad (61)$$

Если в случае двух частиц формулы типа (58) являются финальным результатом, то в трехчастичном случае это не так, и требуется дальнейшее построение разложений ингредиентов формул (60). Используя представления (44), (47) в уравнениях (55), приходим к разложению

$$\Psi_\alpha^{[0]}(\mathbf{p}_\beta, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \Psi_\alpha^{[0,n]}(\mathbf{p}_\beta), \quad (62)$$

в котором коэффициенты при степенях λ определяются из следующей цепочки уравнений Фаддеева:

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^{[0,n]}(\mathbf{p}_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} \Phi_\beta^{(n)}(\mathbf{p}_\beta) + \sum_{m=0}^{n-1} R_\alpha^{(n-m)}(E^+) V_\alpha \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[0,m]}(\mathbf{p}_\beta) + \\ &+ R_\alpha^{(0)}(E^+) V_\alpha \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[0,n]}(\mathbf{p}_\beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (63)$$

Для решения уравнений (56) также воспользуемся разложениями (47) и получим представление для $\Psi_\alpha^{[n]}(\mathbf{p}_\beta, \lambda)$ в виде степенного ряда:

$$\Psi_\alpha^{[n]}(\mathbf{p}_\beta, \lambda) = \sum_{m \geq 0} \lambda^m \Psi_\alpha^{[n,m]}(\mathbf{p}_\beta). \quad (64)$$

В этом разложении аналогично предыдущему коэффициенты даются решениями следующей цепочки уравнений Фаддеева:

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^{[n,m]}(\mathbf{p}_\beta) &= \sum_{k=0}^m R_\alpha^{(m-k)}(E^+) W_\alpha \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[n-1,k]}(\mathbf{p}_\beta) + \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} R_\alpha^{(m-k)}(E^+) V_\alpha \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[n,k]}(\mathbf{p}_\beta) + R_\alpha^{(0)}(E^+) V_\alpha \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[n,m]}(\mathbf{p}_\beta), \\ m &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (65)$$

Амплитуды $A_{\alpha\beta}^{[0]}$ и $A_{\alpha\beta}^{[n]}$ из (59), (60) в силу (62), (64) представляются степенными рядами. Мы дадим выражения для частичных сумм этих рядов, которые обозначим $\{A_{\alpha\beta}^{[0]}\}_K$ и $\{A_{\alpha\beta}^{[n]}\}_K$. Для $\{A_{\alpha\beta}^{[0]}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda)\}_K$ имеем равенство

$$\{A_{\alpha\beta}^{[0]}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda)\}_K = \sum_{m=0}^K \lambda^m \sum_{l=0}^m \left\langle \Phi_\alpha^{(m-l)}(\mathbf{p}'_\alpha) \middle| V_\alpha \middle| \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[0,l]}(\mathbf{p}_\beta) \right\rangle. \quad (66)$$

Для $\{A_{\alpha\beta}^{[n]}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda)\}_K$ получаем выражение

$$\begin{aligned} \{A_{\alpha\beta}^{[n]}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda)\}_K = & \sum_{m=0}^K \lambda^m \sum_{l=0}^m \left[\left\langle \Phi_\alpha^{(m-l)}(\mathbf{p}'_\alpha) \middle| W_\alpha \right| \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[n-1, l]}(\mathbf{p}_\beta) \right\rangle + \\ & + \left\langle \Phi_\alpha^{(m-l)}(\mathbf{p}'_\alpha) \middle| V_\alpha \right| \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[n, l]}(\mathbf{p}_\beta) \right]. \end{aligned} \quad (67)$$

Теперь мы имеем возможность дать окончательное представление для частичной суммы ряда для амплитуды $\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda)$. На основании (58) и (61) получаем, что

$$\{\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda)\}_N = -(4\pi)^{-1} \sum_{n=0}^N \lambda^n \{A_{\alpha\beta}^{[n]}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda)\}_{N-n}, \quad (68)$$

а полная амплитуда $\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda)$ дается пределом

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \{\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda)\}_N. \quad (69)$$

Нетрудно убедиться, что соответствующие частичные суммы ряда (52) и частичные суммы из (68) совпадают друг с другом. Мы не будем приводить здесь необходимые выкладки в силу их громоздкости. Вместо этого мы рассмотрим наиболее востребованный с практической точки зрения случай $N = 1$. Формула (52) в данном случае дает равенства

$$\begin{aligned} -4\pi \{\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda)\}_1 = & \left\langle \Phi_\alpha^{(0)}(\mathbf{p}'_\alpha) \middle| V_\alpha \right| \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{(0)}(\mathbf{p}_\beta) \right\rangle + \\ & + \lambda \left[\left\langle \Phi_\alpha^{(1)}(\mathbf{p}'_\alpha) \middle| V_\alpha \right| \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{(0)}(\mathbf{p}_\beta) \right\rangle + \\ & + \left\langle \Phi_\alpha^{(0)}(\mathbf{p}'_\alpha) \middle| V_\alpha \right| \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{(1)}(\mathbf{p}_\beta) \right] \rangle + \\ & + \lambda \left\langle \Phi_\alpha^{(0)}(\mathbf{p}'_\alpha) \middle| W_\alpha \right| \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{(0)}(\mathbf{p}_\beta) \right\rangle. \end{aligned} \quad (70)$$

Формула (68) приводит к представлению

$$\begin{aligned} -4\pi \{\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda)\}_1 = & \left\langle \Phi_\alpha^{(0)}(\mathbf{p}'_\alpha) \middle| V_\alpha \right| \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[0, 0]}(\mathbf{p}_\beta) \right\rangle + \\ & + \lambda \left\{ \left\langle \Phi_\alpha^{(1)}(\mathbf{p}'_\alpha) \middle| V_\alpha \right| \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[0, 0]}(\mathbf{p}_\beta) \right\rangle + \right. \\ & + \left. \left\langle \Phi_\alpha^{(0)}(\mathbf{p}'_\alpha) \middle| V_\alpha \right| \sum_{\gamma \neq \alpha} [\Psi_\gamma^{[0, 1]}(\mathbf{p}_\beta) + \Psi_\gamma^{[1, 0]}(\mathbf{p}_\beta)] \right\rangle \right\} + \\ & + \lambda \left\langle \Phi_\alpha^{(0)}(\mathbf{p}'_\alpha) \middle| W_\alpha \right| \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{[0, 0]}(\mathbf{p}_\beta) \right\rangle. \end{aligned} \quad (71)$$

Для того чтобы убедиться в идентичности представлений (70) и (71), заметим прежде всего, что из уравнения (50) и уравнения (63) при $n = 0$ следует, что $\Psi_\gamma^{(0)} = \Psi_\gamma^{[0, 0]}$.

Рассмотрим далее уравнение (51) при $n = 1$:

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^{(1)}(\mathbf{p}_\beta) = & \delta_{\alpha\beta} \Phi_\beta^{(1)}(\mathbf{p}_\beta) + [R_\alpha^{(0)}(E^+)W_\alpha + R_\alpha^{(1)}(E^+)V_\alpha] \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{(0)}(\mathbf{p}_\beta) + \\ & + R_\alpha^{(0)}(E^+)V_\alpha \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{(1)}(\mathbf{p}_\beta). \end{aligned} \quad (72)$$

Заметим теперь, что, сложив уравнение (63) при $n = 1$ с уравнением (65) при $n = 1$, $m = 0$, мы приходим к (72) и, следовательно,

$$\Psi_\gamma^{(1)} = \Psi_\gamma^{[0,1]} + \Psi_\gamma^{[1,0]}.$$

Последнее доказывает, что представления (70) и (71) дают один и тот же результат.

В завершение данного раздела получим полезные для приложений уравнения, определяющие функции из правой части формулы (70). Функция $\Phi_\alpha^{(0)}$ дается формулой (45) при $n = 0$. Функцию $\Phi_\alpha^{(1)}$ можно найти из уравнения

$$[\epsilon_\alpha^{(0)} + p_\alpha^2 - H_\alpha(0)]\Phi_\alpha^{(1)} = [-\epsilon_\alpha^{(1)} + W_\alpha]\Phi_\alpha^{(0)}. \quad (73)$$

Функции $\Psi_\alpha^{(0)}$ определяются уравнениями (50), которые являются интегральными уравнениями Фаддеева при отсутствии возмущения. Эти уравнения можно преобразовать также и к виду дифференциальных уравнений:

$$[E - H_\alpha(0)]\Psi_\alpha^{(0)} - V_\alpha \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{(0)} = 0. \quad (74)$$

Наконец, уравнения (72) после несложных преобразований принимают вид неоднородных уравнений:

$$[E - H_\alpha(0)]\Psi_\alpha^{(1)} - V_\alpha \sum_{\gamma \neq \alpha} \Psi_\gamma^{(1)} = [-\epsilon_\alpha^{(1)}\Phi_\alpha^{(0)} + (\epsilon_\beta - \epsilon_\beta^{(0)})\Phi_\beta^{(1)}] + W_\alpha \sum_{\gamma} \Psi_\gamma^{(0)}. \quad (75)$$

Мы завершили первый этап вывода разложений для амплитуд перехода, получив представления (52) и (68), (69). На втором этапе следует вернуться к исходной зависимости импульсов от константы связи, положив $\mu = \lambda$. Согласно определению справедливо равенство

$$p_\beta(\lambda) = \sqrt{E - \epsilon_\beta(\lambda)} = \sqrt{E - \{\epsilon_\beta(\lambda)\}_N} + O(\lambda^{N+1}), \quad (76)$$

где, как и выше, через $\{\epsilon_\beta(\lambda)\}_N$ обозначена N -я частичная сумма ряда (20) для энергии связи частиц пары β . Вводя обозначения $\mathbf{p}_\beta^{(N)}(\lambda) = \sqrt{E - \{\epsilon_\beta(\lambda)\}_N} \hat{p}_\beta$ и $\mathbf{p}_\alpha^{(N)}(\lambda) = \sqrt{E - \{\epsilon_\alpha(\lambda)\}_N} \hat{p}_\alpha$, для амплитуд перехода приходим к равенствам

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \lambda) = \{\mathcal{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha^{(N)}(\lambda), \mathbf{p}_\beta^{(N)}(\lambda), \lambda)\}_N + O(\lambda^{N+1}), \quad (77)$$

которые завершают построение разложений для амплитуд перехода.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построен корректный формализм теории возмущений для решения задачи рассеяния для системы трех частиц на основе уравнений Фаддеева. Рассмотрен случай частиц, взаимодействующих посредством короткодействующих потенциалов. Обобщение на случай систем с кулоновским взаимодействием можно провести с помощью модифицированных уравнений Фаддеева [11], [12]. Формализм также можно обобщить на системы большего числа частиц с использованием уравнений Якубовского в интегральной и дифференциальной формах [13]–[15].

Благодарности. Авторы выражают благодарность П. А. Белову за ценные замечания.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3: *Квантовая механика: нерелятивистская теория*, Наука, М., 1974.
- [2] Дж. Тейлор, *Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений*, Наука, М., 1975.
- [3] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, v. I, John Wiley and Sons, New York, 1958.
- [4] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М., 1985.
- [5] Л. Д. Фаддеев, *Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц*, Тр. МИАН, **69**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1963.
- [6] S. L. Yakovlev, C.-Y. Hu, D. Caballero, “Multichannel formalism for positron-hydrogen scattering and annihilation”, *J. Phys. B*, **40**:10 (2007), 1675–1693.
- [7] S. L. Yakovlev, C. Y. Hu, “Multichannel scattering and annihilation in the positron hydrogen system”, *Few Body Syst.*, **44**:1 (2008), 237–239.
- [8] В. С. Буслаев, М. М. Скриганов, “Координатная асимптотика решения задачи рассеяния для уравнения Шредингера”, *ТМФ*, **19**:2 (1974), 217–232.
- [9] А. Я. Повзнер, “О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$ ”, *Матем. сб.*, **32(74)**:1 (1953), 109–156.
- [10] С. Л. Яковлев, “Дифференциальные уравнения Фаддеева как спектральная задача для несимметричного оператора”, *ТМФ*, **107**:3 (1996), 513–528.
- [11] С. П. Меркурьев, “О теории рассеяния для системы трех частиц с кулоновским взаимодействием”, *ЯФ*, **24**:2 (1976), 289–297.
- [12] Z. Papp, J. Darai, A. Nishimura, Z. T. Hlousek, C.-Y. Hu, S. L. Yakovlev, “Faddeev–Merkuriev equations for resonances in three-body Coulombic systems”, *Phys. Lett. A*, **304**:1–2 (2002), 36–42.
- [13] О. А. Якубовский, “Об интегральных уравнениях теории рассеяния N частиц”, *ЯФ*, **5**:6 (1967), 1312–1319.
- [14] С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев, “Квантовая теория рассеяния для N тел в конфигурационном пространстве”, *ТМФ*, **56**:1 (1983), 60–73.
- [15] С. Л. Яковлев, “Квантовая проблема N тел: матричные структуры и уравнения”, *ТМФ*, **181**:1 (2014), 218–240.

Поступила в редакцию 16.02.2016