Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. П. Денисова, Модель лазерного источника гравитационного поля, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 3, 474–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf917>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:45:44

© 1998 г.

И. П. Денисова*

МОДЕЛЬ ЛАЗЕРНОГО ИСТОЧНИКА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Найдено точное решение уравнений релятивистской теории гравитации для модели лазерного луча, являющегося источником гравитационного поля.

В последнее время в [1–3] рассматриваются различные обобщения уравнений Эйнштейна. Среди них особый интерес представляют варианты теории гравитации с ненулевой массой гравитона m . В частности, в релятивистской теории гравитации [2] эта масса входит в уравнения гравитационного поля следующим образом:

$$R_{ik} = \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2} (g_{ik} - \gamma_{ik}) + \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right), \quad (1)$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, G – гравитационная постоянная, R_{ik} – тензор Риччи, T_{ik} – тензор энергии-импульса вещества, g_{ik} – метрический тензор псевдориманова пространства-времени, γ_{ik} – метрический тензор псевдоевклидова пространства-времени, $T = g^{ik} T_{ik}$.

Как известно [4–5], экспериментальные данные допускают существование гравитонов с массой $m < 10^{-60}$ г. Хотя эта величина и является очень малой, отличие ее от нуля важно в принципиальном плане, т.к. позволяет [6–8] избежать появления нефизических сингулярностей в решениях и способствует прояснению проблемы “темной” материи в модели Вселенной. Поэтому поиск точных решений уравнений теории гравитации с массивным гравитоном и сравнение их предсказаний с наблюдаемыми данными имеют чрезвычайно важное значение.

Исследуем задачу о гравитационном поле плоской электромагнитной волны в рамках релятивистской теории гравитации. Для получения точного решения этой задачи необходимо решить совместно уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x^k} [\sqrt{-g} F^{ik}] &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

*Московский государственный авиационный технологический университет им. К. Э. Циолковского, Москва, Россия

и уравнения гравитационного поля (1), взяв в качестве тензора T_{ik} тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(-F_{il}F_k{}^l + \frac{1}{4}g_{ik}F_{lm}F^{lm} \right).$$

Рассмотрим сначала случай, когда источником гравитационного поля является плоская электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль оси z . Для получения точного решения, соответствующего этому случаю, ненулевые компоненты тензора электромагнитного поля плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль ($s = 1$) или против ($s = -1$) оси z , будем искать в виде

$$\begin{aligned} F_{01} = -F_{10} = E_r(ct - sz, r, \varphi), \quad F_{02} = -F_{20} = E_\varphi(ct - sz, r, \varphi), \\ F_{13} = -F_{31} = H_\varphi(ct - sz, r, \varphi), \quad F_{32} = -F_{23} = H_r(ct - sz, r, \varphi), \end{aligned} \quad (3)$$

где E_φ и H_φ – геометрические, а не физические компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Отличные от нуля компоненты метрических тензоров g_{ik} и γ_{ik} представим в виде

$$\begin{aligned} g_{00} = 1 + W(ct - sz, r, \varphi), \quad g_{33} = -1 + W(ct - sz, r, \varphi), \\ g_{03} = -sW(ct - sz, r, \varphi), \quad g_{11} = \gamma_{11} = \gamma_{33} = -1, \\ \gamma_{22} = g_{22} = -r^2, \quad \gamma_{00} = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя выражения (3) и (4) в уравнения (1), при $i = k = 0$ и $i = k = 3$ получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2} W + \\ + \frac{G}{c^4} \{ W^2 (E_\varphi^2 + 2sE_\varphi H_r + E_r^2 r^2 - 2sE_r H_\varphi r^2 + H_\varphi^2 r^2 + H_r^2) + \\ + 2W(r, \varphi) (sE_\varphi H_r - sE_r H_\varphi r^2 + H_\varphi^2 r^2 + H_r^2) + E_\varphi^2 + E_r^2 r^2 + H_\varphi^2 r^2 + H_r^2 \}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2} W + \\ + \frac{G}{c^4} \{ W^2 (E_\varphi^2 + 2sE_\varphi H_r + E_r^2 r^2 - 2sE_r H_\varphi r^2 + H_\varphi^2 r^2 + H_r^2) - \\ - 2W(r, \varphi) (E_\varphi^2 + sE_\varphi H_r + E_r^2 r^2 - sE_r H_\varphi r^2) + E_\varphi^2 + E_r^2 r^2 + H_\varphi^2 r^2 + H_r^2 \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Вычитая из первого уравнения системы (5) второе уравнение, будем иметь

$$(E_\varphi + sH_r)^2 + (E_r - sH_\varphi)^2 r^2 = 0.$$

Таким образом, для совместности системы уравнений (5) необходимо потребовать, чтобы выполнялись условия

$$E_r = sH_\varphi, \quad E_\varphi = -sH_r. \quad (6)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1), убедимся, что последние сводятся к одному уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} W = \frac{4G}{r^2 c^4} (H_r^2 + H_\varphi^2 r^2). \quad (7)$$

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла (2). Учитывая соотношения (3) и (6), приходим к системе из двух уравнений

$$\frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial(r H_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = 0. \quad (8)$$

Используя определение тензора $F_{ik} = A_{i,k} - A_{k,i}$ и выражения (3), получаем, что

$$H_r = -\frac{\partial A_z}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = \frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Подставляя эти соотношения в систему уравнений (8), находим

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Нас интересует только такое решение последнего уравнения, которое приводит к не-сингулярному при $r \rightarrow 0$ и ограниченному при $r \rightarrow \infty$ тензору энергии-импульса электромагнитной волны. Отсюда однозначно следует, что

$$\begin{aligned} A_z &= r[-f_1(ct - sz) \sin \varphi + f_2(ct - sz) \cos \varphi], \\ H_r &= -r[f_1(ct - sz) \cos \varphi + f_2(ct - sz) \sin \varphi], \\ H_\varphi &= [-f_1(ct - sz) \sin \varphi + f_2(ct - sz) \cos \varphi], \end{aligned} \quad (9)$$

где $f_1(ct - sz)$ и $f_2(ct - sz)$ – произвольные функции $ct - sz$, выбор которых означает выбор определенного волнового пакета и состояния поляризации электромагнитной волны.

Вводя декартовы координаты и используя закон преобразования компонент тензора F_{ik} , несложно убедиться, что решение (9) представляет собой плоскую эллиптически поляризованную волну, у которой векторы электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не зависят от координат x, y :

$$H_x = -sE_y = f_1(ct - sz), \quad H_y = sE_x = f_2(ct - sz).$$

Подставляя выражения (9) в уравнение (7), получим

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} W = \frac{4G}{c^4} [f_1^2(ct - sz) + f_2^2(ct - sz)].$$

Решение этого уравнения, не имеющее особенностей в плоскости, перпендикулярной оси z , выглядит следующим образом:

$$W = -\frac{4G\hbar^2}{m^2c^6}[f_1^2(ct - sz) + f_2^2(ct - sz)]. \quad (10)$$

Таким образом, выражения (4), (6), (9) и (10) представляют собой точное решение системы уравнений Максвелла (2) и уравнений релятивистской теории гравитации (1) для случая, когда метрический тензор эффективного псевдориманова пространства-времени задается плоской электромагнитной волной, распространяющейся в положительном ($s = +1$) или отрицательном ($s = -1$) направлении оси z . Из выражения (10) непосредственно следует, что при $m \rightarrow 0$ функция W неограниченно возрастает. Это означает, что аналитический переход полученного решения в решение соответствующей задачи общей теории относительности невозможен, т.к. структура метрического тензора g_{ik} (отличные от нуля компоненты) для данной задачи в теории Эйнштейна не совпадает со структурой метрического тензора (4) в релятивистской теории гравитации.

Исследуя полученное решение, прежде всего необходимо отметить, что поля H_x и H_y являются произвольными функциями $ct - sz$. Пользуясь этим произволом, можно построить любой волновой пакет, который будет двигаться вдоль оси z с предельной скоростью c . С движением этого пакета непосредственно связано распространение волны метрики g_{ik} , функция W которой (10) явно выражается через квадрат вектора $\vec{E}$.

Поскольку $W \leq 0$, то полученное решение автоматически удовлетворяет принципу причинности: из условия $\gamma_{ik}u^i u^k = 0$ сразу же следует, что $g_{ik}u^i u^k \leq 0$. Таким образом, световой конус псевдориманова пространства-времени не выходит за пределы светового конуса псевдоевклидова пространства-времени, и полученное нами решение является физическим.

Однако тензор кривизны пространства-времени с метрическим тензором g_{ik} и функцией W вида (10) оказывается тождественно равным нулю. Это означает, что метрический тензор g_{ik} является метрическим тензором плоского пространства-времени, который записан в некоторой неинерциальной системе отсчета, зависящей от конкретного выбора функций $f_1(ct - sz)$ и $f_2(ct - sz)$. Если совершить преобразование координат и времени и перевести метрический тензор g_{ik} в инерциальную систему отсчета, то метрический тензор псевдоевклидова пространства-времени γ_{ik} окажется записанным в неинерциальной системе отсчета.

Таким образом, распространение плоской электромагнитной волны согласно системе уравнений Максвелла и релятивистской теории гравитации приводит к появлению эффективной неинерциальности в метрике g_{ik} , в то время как метрика γ_{ik} соответствует инерциальной системе отсчета. После прохождения электромагнитной волны функция W обращается в нуль и в этой области пространства $g_{ik} = \gamma_{ik}$.

Этот эффект создания неинерциальности в метрике g_{ik} при прохождении плоской электромагнитной волны поэтому можно назвать эффектом электромагнитного возмущения системы отсчета в псевдоримановом пространстве-времени.

Если внимательно проанализировать уравнения релятивистской теории гравитации в случае метрики (4), то можно заметить, что равенство тензора кривизны нулю является следствием независимости векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ от координат x и y . Именно бесконечная протяженность электромагнитной волны в направлениях, перпендикулярных направлению ее распространения, и приводит к тому, что четырехмерное пространство $R_{1,3}^4$ с метрическим тензором g_{ik} оказывается разложенным на прямое произведение $R_{1,1}^2$ и $R_{0,2}^2$. А любое двумерное пространство, как известно, с необходимостью будет пространством постоянной кривизны, частным случаем которого является плоское пространство.

В реальных ситуациях любая плоская электромагнитная волна имеет конечные размеры в направлениях, перпендикулярных направлению ее распространения. Поэтому тензор кривизны эффективного псевдориманова пространства-времени, создаваемый такой волной, должен быть не равным нулю. В этом случае, строго говоря, распространяется не плоская электромагнитная волна, а узконаправленное излучение, частным случаем которого является лазерный луч.

Изучим, как изменится метрический тензор псевдориманова пространства-времени g_{ik} в случае, когда электромагнитная волна имеет конечную протяженность в направлениях, перпендикулярных оси z , и отлична от нуля только в области $r \leq r_0$. Тогда компоненты тензора энергии-импульса примут вид

$$T_{00} = -sT_{0z} = T_{zz} = \frac{1}{4\pi}[f_1^2(ct - sz) + f_2^2(ct - sz)]\theta(r_0 - r), \quad (11)$$

где $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x \leq 0$.

Следует отметить, что для получения решений, описывающих пространственное распределение выходящего излучения, в физике лазеров [9] обычно используют интегральные уравнения геометрической оптики. В результате их решения оказывается, что распределение интенсивности по сечению пучка можно представить функцией, которая описывает и увеличение поперечных размеров пучка.

Для простоты анализа мы воспользуемся выражением (11). В этом случае система уравнений гравитационного поля (1) сводится к одному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} W = \\ = \frac{4G}{c^4} [f_1^2(ct - sz) + f_2^2(ct - sz)]\theta(r_0 - r). \end{aligned}$$

Это уравнение достаточно просто интегрируется, и функцию $W(ct - sz, r)$ можно представить в виде

$$W = \begin{cases} -\frac{4G\hbar^2}{m^2 c^6} \left\{ 1 - \frac{mcr_0}{\hbar} K_1\left(\frac{mcr_0}{\hbar}\right) I_0\left(\frac{mcr}{\hbar}\right) \right\} [f_1^2(ct - sz) + f_2^2(ct - sz)], & r \leq r_0, \\ -\frac{4G\hbar r_0}{mc^5} I_1\left(\frac{mcr_0}{\hbar}\right) K_0\left(\frac{mcr}{\hbar}\right) [f_1^2(ct - sz) + f_2^2(ct - sz)], & r \geq r_0, \end{cases}$$

где $K_n(x)$ и $I_n(x)$ – модифицированные функции Бесселя третьего рода.

Используя эти выражения, можно показать, что компоненты тензора кривизны эффективного псевдориманова пространства-времени не равны нулю тождественно. В терминах функции $W = W(ct - sz, r)$ они имеют вид

$$\begin{aligned} R_{0101} = R_{1313} = sR_{0113} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}, \\ R_{0202} = R_{2323} = sR_{0223} &= -\frac{r}{2} \frac{\partial W}{\partial r}. \end{aligned} \quad (12)$$

Исследуем полученные выражения в различных предельных случаях. Пусть $r < r_0$ и $mcr_0/\hbar \ll 1$. Эти условия означают, что наблюдатель находится в лазерном пучке и поперечный размер пучка мал по сравнению с $\hbar/mc \sim 10^{29}$ см. Воспользовавшись асимптотическими формулами для функций $K_n(x)$ и $I_n(x)$ при $x \ll 1$:

$$\begin{aligned} K_0(x) &= -C - \ln \frac{x}{2}, & I_0(x) &= 1 + \frac{x^2}{4}, \\ K_1(x) &= \frac{1}{x} + \frac{x}{2} \left[C - \frac{1}{2} + \ln \frac{x}{2} \right], & I_1(x) &= \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

где C – постоянная Эйлера, будем иметь

$$W(r, ct - sz) = \frac{G}{c^4} \left\{ r^2 + r_0^2 \left[2C - 1 + 2 \ln \left(\frac{mcr_0}{\hbar} \right) \right] \right\} [f_1^2(ct - sz) + f_2^2(ct - sz)].$$

Подставляя это выражение в соотношения (12), найдем независимые компоненты тензора кривизны в рассматриваемой области

$$\begin{aligned} R_{0101} = R_{1313} = sR_{0113} &= -\frac{G}{c^4} [f_1^2(ct - sz) + f_2^2(ct - sz)], \\ R_{0202} = R_{2323} = sR_{0223} &= -\frac{Gr^2}{c^4} [f_1^2(ct - sz) + f_2^2(ct - sz)]. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично при выполнении условий $r > r_0$ и $mcr_0/\hbar \ll 1$, когда наблюдатель находится вне лазерного пучка, для функции $W(r, ct - sz)$ получим асимптотическую формулу

$$W(r, ct - sz) = \frac{2Gr_0^2}{c^4} \left\{ C + \ln \left(\frac{mcr}{\hbar} \right) \right\} [f_1^2(ct - sz) + f_2^2(ct - sz)].$$

Независимые компоненты тензора кривизны в этой области согласно соотношениям (12) имеют вид

$$\begin{aligned} R_{0101} = R_{1313} = sR_{0113} &= \frac{Gr_0^2}{r^2 c^4} [f_1^2(ct - sz) + f_2^2(ct - sz)], \\ R_{0202} = R_{2323} = sR_{0223} &= -\frac{Gr_0^2}{c^4} [f_1^2(ct - sz) + f_2^2(ct - sz)]. \end{aligned}$$

Так как компоненты тензора энергии-импульса лазерного луча (11) на цилиндрической поверхности $r = r_0$ терпят разрыв первого рода, то и компоненты тензора кривизны, входящие в уравнение (1), также терпят разрыв на этой поверхности. Таким образом, при реалистических размерах ($mcr_0/\hbar \ll 1$) лазерного пучка влияние массы гравитона на функцию $W(r, ct - sz)$ и тензор кривизны пространства-времени в окрестности пучка мало.

Изучим теперь асимптотическое поведение функции $W(r, ct - sz)$ при выполнении условий $mcr/\hbar \gg 1$ и $mcr_0/\hbar \ll 1$. Учитывая, что при $x \rightarrow \infty$ функция $K_0(x) \sim \sqrt{\pi/2x} \exp(-x)$, будем иметь

$$W(r, ct - sz) = -\frac{Gr_0^2}{c^4} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{mcr}} \exp\left(-\frac{mcr}{\hbar}\right) [f_1^2(ct - sz) + f_2^2(ct - sz)].$$

Таким образом, при удалении наблюдателя от оси пучка на расстояние, значительно превышающее $\hbar/mc \sim 10^{29}$ см, функция $W(r, ct - sz)$ убывает экспоненциально.

Список литературы

- [1] *N. Rosen.* Found. Phys. 1980. V. 12. P. 493.
- [2] *A. A. Лозунов.* ТМФ. 1994. Т. 101. С. 3.
- [3] *M. Visser.* Mass for graviton. Preprint of Washington University, gr-qc/9705051, 1997.
- [4] *A. S. Goldhaber, M. M. Nieto.* Phys. Rev. D. 1974. V. 9. P. 1119.
- [5] *M. G. Hare.* Can. J. Phys. 1973. V. 51. P. 431.
- [6] *В. И. Денисов.* ТМФ. 1997. Т. 111. С. 144.
- [7] *В. И. Денисов.* ТМФ. 1997. Т. 111. С. 312.
- [8] *В. И. Денисов.* ТМФ. 1997. Т. 112. С. 337.
- [9] *Е. Ф. Ищенко, Ю. М. Климков.* Оптические квантовые генераторы. Гл. 3. М.: Сов. радио, 1968.

Поступила в редакцию 27.1.1998 г.