Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Корибут, Ковариантные структурные константы для алгебры деформированных осцилляторов, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 1, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9170>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:33:11

© 2017 г.

А. В. Корибут*

КОВАРИАНТНЫЕ СТРУКТУРНЫЕ КОНСТАНТЫ ДЛЯ АЛГЕБРЫ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Получены sl_2 -ковариантные выражения для структурных констант алгебры деформированных осцилляторов $Aq(2, \nu)$.

Ключевые слова: структурные константы, деформированные осцилляторы, алгебра высших спинов, гипергеометрические функции.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9170>

1. ВВЕДЕНИЕ

Алгебра деформированных осцилляторов, порожденная элементами y_α ($\alpha = +, -$) и $\mathcal{K}$, которые подчиняются соотношениям¹⁾

$$[y_\alpha, y_\beta] = 2i\epsilon_{\alpha\beta}(1 + \nu\mathcal{K}), \quad \{y_\alpha, \mathcal{K}\} = 0, \quad \mathcal{K}^2 = 1, \quad (1)$$

где $\nu \in \mathbb{C}$ – произвольный параметр, $\epsilon_{\alpha\beta}$ – полностью антисимметричный тензор с $\epsilon_{+-} = 1$, $\mathcal{K}$ – так называемый оператор Клейна, была впервые рассмотрена Вигнером [1] в ее конкретной реализации. В работах [2] и [3] было высказано предположение, что она может быть интерпретирована как алгебра высших спинов (ВС) в 2+1 измерениях. В немного иной реализации эта же алгебра ВС была рассмотрена в работе [4]. Кроме того, алгебра деформированных осцилляторов определяет вид нелинейных уравнений в произвольном числе измерений [5], [6]. Также эта алгебра появляется в контексте двумерных конформных теорий поля [7]–[9]. В последнее время интерес к ней повысился в контексте AdS_3/CFT_2 -соответствия [10]. Анализ этой задачи затруднен, в частности, из-за отсутствия удобного выражения для произведения в этой алгебре.

Автор выражает благодарность фонду Династия за финансовую поддержку. Исследование выполнено при поддержке РФФИ (грант № 14-02-01172).

¹⁾ $[y_\alpha, y_\beta] \equiv y_\alpha y_\beta - y_\beta y_\alpha$, $\{y_\alpha, \mathcal{K}\} \equiv y_\alpha \mathcal{K} + \mathcal{K} y_\alpha$.

Рассмотрим универсальную обертывающую алгебру sl_2 , она содержит идеал $\mathcal{I}_{hs}(\lambda)$, порожденный центральным элементом

$$C - \frac{1}{4}(\lambda^2 - 1)\mathbf{1}, \quad (2)$$

где C – квадратичный оператор Казимира алгебры sl_2 , а $\mathbf{1}$ – единичный элемент в обертывающей алгебре $U(sl_2)$. Бозонная алгебра Ли ВС в $2 + 1$ измерениях – это фактор-алгебра по этому идеалу

$$hs[\lambda] = U(sl_2)/\mathcal{I}_{hs}(\lambda). \quad (3)$$

Аналогично можно определить супералгебру Ли ВС, но теперь следует рассматривать обертывающую алгебру от алгебры $osp(1|2)$. Она содержит идеал $\mathcal{I}_{shs}(\lambda)$, порожденный центральным элементом

$$C - \frac{1}{4}\lambda(\lambda - 1)\mathbf{1}, \quad (4)$$

где C – квадратичный оператор Казимира в алгебре $osp(1|2)$. Фактор-алгеброй по этому идеалу называется супералгебра Ли ВС

$$shs[\lambda] = U(osp(1|2))/\mathcal{I}_{shs}(\lambda). \quad (5)$$

Структурные константы для $hs[\lambda]$ и $shs[\lambda]$ были найдены в работах [7] и [11] соответственно.

Конкретное представление $hs[\lambda]$ можно построить, используя осцилляторы, которые подчиняются соотношениям (1) с $\nu = 1 - 2\lambda$. Рассмотрим следующие билинейные комбинации:

$$J_{\pm} = \frac{i}{4}(y_{\pm})^2, \quad J_0 = \frac{i}{4}\{y_+, y_-\}. \quad (6)$$

Можно проверить, что $\{J_-, J_+, J_0\}$ подчиняются коммутационным соотношениям алгебры sl_2

$$[J_+, J_-] = 2J_0, \quad [J_{\pm}, J_0] = \pm J_{\pm}. \quad (7)$$

Значение оператора Казимира в этом представлении совпадает с его значением в определении $hs[\lambda]$ (3).

В работе [7] было введено Lone-Star-произведение как ассоциативное произведение в $hs[\lambda]$. Недавно эта задача была рассмотрена в работе [12]. Произведение было дано для функций

$$\begin{aligned} L(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^{\alpha_1 \tilde{\alpha}_1} \dots \xi^{\alpha_n \tilde{\alpha}_n} y_{(\alpha_1} y_{\tilde{\alpha}_1} \dots y_{\alpha_n} y_{\tilde{\alpha}_n)}, \\ L(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \eta^{\alpha_1 \tilde{\alpha}_1} \dots \eta^{\alpha_n \tilde{\alpha}_n} y_{(\alpha_1} y_{\tilde{\alpha}_1} \dots y_{\alpha_n} y_{\tilde{\alpha}_n)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\xi^{\alpha_1 \tilde{\alpha}_1}$ и $\eta^{\alpha_1 \tilde{\alpha}_1}$ – симметричные sl_2 -тензоры, а y_{α} – осцилляторы, подчиняющиеся соотношениям (1). Также мы будем использовать следующие обозначения для полной симметризации индексов:

$$y_{(\alpha_1} y_{\alpha_2} \dots y_{\alpha_n)} = \frac{1}{n!} (y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \dots y_{\alpha_n} + \text{перестановки}). \quad (9)$$

Произведение, определенное в (8), имеет следующий вид:

$$L(\xi) * L(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} n + \frac{3-\nu}{2} & n + \frac{1+\nu}{2} \\ n + \frac{3}{2} \end{matrix} ; -\frac{1}{4}\phi \right] \times \\ \times \frac{1}{n!} \zeta^{\alpha_1 \tilde{\alpha}_1} \dots \zeta^{\alpha_n \tilde{\alpha}_n} y_{(\alpha_1} y_{\tilde{\alpha}_1} \dots y_{\alpha_n} y_{\tilde{\alpha}_n)}, \quad (10)$$

где $\zeta^{\alpha\beta} = \xi^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta} + \xi^{\alpha\gamma} \eta^{\delta\beta} \epsilon_{\gamma\delta}$ и $\phi = \xi^{\alpha_1 \alpha_2} \eta^{\beta_1 \beta_2} \epsilon_{\alpha_1 \beta_1} \epsilon_{\alpha_2 \beta_2}$. Так как в разложениях (8) и (10) встречаются только четные степени, то оператор Клейна можно рассматривать как число.

В алгебре ВС в высших измерениях есть звездочное произведение

$$(f \star g)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{2p}} \int d^{2p}u d^{2p}v e^{iu_\mu v^\mu} f(y+u)g(y+v), \quad (11)$$

где f и g – функции от коммутирующих переменных y_μ , $\mu = 1, \dots, 2p$. Формула (11) определяет ассоциативное произведение с соотношением

$$y_\mu \star y_\nu - y_\nu \star y_\mu = 2iC_{\mu\nu}, \quad (12)$$

где $C_{\mu\nu}$ – симплектическая форма. Индексы поднимаются и опускаются следующим образом:

$$y^\mu = C^{\mu\nu} y_\nu, \quad y_\mu = y^\nu C_{\nu\mu}. \quad (13)$$

Не известно аналогов произведения (11) для случая деформированных осцилляторов. Но был сделан шаг вперед в вычислении звездочного произведения. Исходные и конечные функции являются рядами по степеням осцилляторов, свернутых с полностью симметричными тензорами (вейлевское упорядочение):

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{\alpha(n)} \underbrace{y_\alpha \dots y_\alpha}_n, \quad f^{\alpha(n)} = f^{(\alpha_1 \dots \alpha_n)}, \quad (14)$$

где $f^{\alpha(n)}$ – полностью симметричный sl_2 -тензор ранга n ,

$$f^{\alpha(m)} \underbrace{y_\alpha \dots y_\alpha}_m * g^{\beta(n)} \underbrace{y_\beta \dots y_\beta}_n = \\ = f^{\alpha(m)} g^{\beta(n)} \sum_{p=0}^{\min(m,n)} (\epsilon_{\alpha\beta})^p \underbrace{y_\alpha \dots y_\alpha}_{m-p} \underbrace{y_\beta \dots y_\beta}_{n-p} \tilde{A}(m, n, p, \nu \mathcal{K}). \quad (15)$$

Осцилляторы полностью симметризованы. Выражения для $\tilde{A}$ в различных случаях получены в настоящей работе. Ассоциативная алгебра с соотношением (15) называется $Aq(2, \nu)$. Ассоциированная с ней алгебра Ли со скобкой Ли в виде градуированного коммутатора является супералгеброй Ли ВС $shs[\lambda]$ со следующей $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой:

$$\mathcal{K} f^{\alpha(n)} \underbrace{y_\alpha \dots y_\alpha}_n = (-1)^n f^{\alpha(n)} \underbrace{y_\alpha \dots y_\alpha}_n \mathcal{K}. \quad (16)$$

Рассматривая только четные степени в разложении (14) и скобку Ли в виде обычного коммутатора, получим $hs[\lambda]$.

Статья организована следующим образом: в разделе 2 даны структурные константы и ковариантное выражение для произведения в алгебре $Aq(2, \nu)$, для доказательства верности выражений в разделе 3 выводится условие ассоциативности, которое проверяется в приложении, в разделах 4 и 5 выводятся структурные константы для недостающих случаев.

2. СТРУКТУРНЫЕ КОНСТАНТЫ ДЛЯ АССОЦИАТИВНОЙ АЛГЕБРЫ $Aq(2, \nu)$

В силу (1) оператор Клейна появляется только в комбинации $\nu\mathcal{K}$, поэтому для краткости обозначим $\hat{\nu} = \nu\mathcal{K}$. Общее выражение для $\tilde{A}(m, n, p, \hat{\nu})$ из (15) довольно громоздкое, поэтому удобно рассматривать различные случаи. Выпишем окончательные результаты для структурных констант $Aq(2, \nu)$:

1) в *четно-четном случае*

$$\begin{aligned} A(m, n, p, \hat{\nu}) &= \\ &= i^p \frac{m!n!}{(m-p)!(n-p)!p!} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} 1 - \frac{\hat{\nu}}{2} & \frac{\hat{\nu}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} & \frac{m+n-2p+3}{2} \end{matrix} ; 1 \right], \end{aligned} \quad (17)$$

2) в *нечетно-нечетном случае*

$$\begin{aligned} B(m+1, n+1, p, \hat{\nu}) &= A(m, n, p, -\hat{\nu}) + i(m+n-2p+3+\hat{\nu})A(m, n, p-1, -\hat{\nu}) + \\ &+ i^2(m-p+2)(n-p+2) \times \\ &\times \frac{m+n-2p+5+\hat{\nu}}{m+n-2p+5} \frac{m+n-2p+3+\hat{\nu}}{m+n-2p+3} A(m, n, p-2, -\hat{\nu}), \end{aligned} \quad (18)$$

3) в *четно-нечетном случае*

$$\begin{aligned} C(m, n+1, p, \hat{\nu}) &= \\ &= A(m, n, p, -\hat{\nu}) + i(m-p+1) \frac{m+n-2p+3+\hat{\nu}}{m+n-2p+3} A(m, n, p-1, -\hat{\nu}), \end{aligned} \quad (19)$$

4) в *нечетно-четном случае*

$$D(m+1, n, p, \hat{\nu}) = A(m, n, p, \hat{\nu}) + i(n-p+1) \frac{m+n-2p+3-\hat{\nu}}{m+n-2p+3} A(m, n, p-1, \hat{\nu}), \quad (20)$$

где m, n – четные числа. Обобщенные гипергеометрические функции из правой части (17) определяются следующим образом:

$${}_4F_3 \left[\begin{matrix} a & b & c & d \\ e & f & g \end{matrix} ; z \right] = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(a)_q (b)_q (c)_q (d)_q}{(e)_q (f)_q (g)_q} \frac{z^q}{q!}, \quad (21)$$

где $(a)_q \equiv \Gamma(a+q)/\Gamma(a)$ – нисходящий символ Похгаммера.

Для произвольных формальных рядов

$$f(y) = \sum_{m=0}^{\infty} f^{\alpha(m)} \underbrace{y_{\alpha} \dots y_{\alpha}}_m, \quad g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{\beta(n)} \underbrace{y_{\beta} \dots y_{\beta}}_n \quad (22)$$

произведение имеет вид

$$\begin{aligned}
 f(y) * g(y) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left(f^{\alpha(2k)} g^{\beta(2p)} \sum_{l=0}^{\min(2k, 2p)} (\epsilon_{\alpha\beta})^l \underbrace{y_{\alpha} \dots y_{\alpha}}_{2k-l} \underbrace{y_{\beta} \dots y_{\beta}}_{2p-l} A(2k, 2p, l, \hat{\nu}) + \right. \\
 & + f^{\alpha(2k+1)} g^{\beta(2p+1)} \sum_{l=0}^{\min(2k+1, 2p+1)} (\epsilon_{\alpha\beta})^l \underbrace{y_{\alpha} \dots y_{\alpha}}_{2k+1-l} \underbrace{y_{\beta} \dots y_{\beta}}_{2p+1-l} B(2k+1, 2p+1, l, \hat{\nu}) + \\
 & + f^{\alpha(2k)} g^{\beta(2p+1)} \sum_{l=0}^{\min(2k, 2p+1)} (\epsilon_{\alpha\beta})^l \underbrace{y_{\alpha} \dots y_{\alpha}}_{2k-l} \underbrace{y_{\beta} \dots y_{\beta}}_{2p+1-l} C(2k, 2p+1, l, \hat{\nu}) + \\
 & \left. + f^{\alpha(2k+1)} g^{\beta(2p)} \sum_{l=0}^{\min(2k+1, 2p)} (\epsilon_{\alpha\beta})^l \underbrace{y_{\alpha} \dots y_{\alpha}}_{2k+1-l} \underbrace{y_{\beta} \dots y_{\beta}}_{2p-l} D(2k+1, 2p, l, \hat{\nu}) \right). \quad (23)
 \end{aligned}$$

Верность выражений (17)–(20) доказывается в следующих разделах с использованием ассоциативности алгебры $Aq(2, \nu)$.

3. УСЛОВИЕ АССОЦИАТИВНОСТИ

В этом разделе выводится условие ассоциативности на бозонные структурные константы, т. е. в четно-четном случае. Для вывода других структурных констант (не в четно-четном случае) используются бозонные константы и ассоциативность алгебры, поэтому достаточно рассмотреть только этот случай. Произведение двух мономов может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
 f^{\alpha(m)} \underbrace{y_{\alpha} \dots y_{\alpha}}_m * g^{\beta(n)} \underbrace{y_{\beta} \dots y_{\beta}}_n = \\
 = f^{\alpha(m)} g^{\beta(n)} \sum_{p=0}^{\min(m, n)} (\epsilon_{\alpha\beta})^p \underbrace{y_{\alpha} \dots y_{\alpha}}_{m-p} \underbrace{y_{\beta} \dots y_{\beta}}_{n-p} A(m, n, p, \hat{\nu}), \quad (24)
 \end{aligned}$$

где $A(m, n, p, \hat{\nu})$ – структурные константы для четно-четного случая. В этом разделе мы рассматриваем только четные мономы. Можно переписать предыдущее уравнение в немного другой форме:

$$\begin{aligned}
 f^{\alpha(m)} \underbrace{y_{\alpha} \dots y_{\alpha}}_m * g^{\beta(n-2)\gamma_1\gamma_2} \underbrace{y_{\beta} \dots y_{\beta}}_{n-2} * y_{\gamma_1} y_{\gamma_2} = \\
 = f^{\alpha(m)} g^{\beta(n-2)\gamma_1\gamma_2} \times \\
 \times \left(\sum_{p=0}^{\min(m, n-2)} (\epsilon_{\alpha\beta})^p \underbrace{y_{\alpha} \dots y_{\alpha}}_{m-p} \underbrace{y_{\beta} \dots y_{\beta}}_{n-2-p} A(m, n-2, p, \hat{\nu}) \right) * y_{\gamma_1} y_{\gamma_2}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Здесь использовалось свойство ассоциативности произведения. Можно умножить $m \times n$ непосредственно или $m \times (n-2) \times 2$. В силу ассоциативности результат должен быть тем же. Чтобы выразить это условие в форме уравнения, нужно

симметризовать осцилляторы с индексами γ_1 и γ_2 . Остальные осцилляторы уже симметризованы:

$$\underbrace{y_{(\alpha} \cdots y_{\alpha}}_{m+n-2-2p} \underbrace{y_{\beta} \cdots y_{\beta})}_{n-2-p} y_{\gamma_1} y_{\gamma_2} = \left[\underbrace{y_{(\alpha} \cdots y_{\alpha}}_{m-p} \underbrace{y_{\beta} \cdots y_{\beta})}_{n-2-p} y_{\gamma_1} + \right. \\ \left. + \frac{2i}{2} \frac{(m+n-2p-2)}{m+n-1-2p} \xi \epsilon_{\alpha\gamma_1} \underbrace{y_{(\alpha} \cdots y_{\alpha}}_{m-1-p} \underbrace{y_{\beta} \cdots y_{\beta})}_{n-2-p} (m+n-2p-1-\hat{\nu}) \right] y_{\gamma_2}. \quad (26)$$

Множитель

$$\frac{2i}{2} \frac{(m+n-2p-2)}{m+n-1-2p} \xi (m+n-2p-1-\hat{\nu}), \quad (27)$$

который появляется во втором слагаемом, содержащем $\epsilon_{\alpha\gamma_1}$, состоит из двух частей.

Первая часть

$$\frac{2i}{2} \frac{(m+n-2p-2)}{m+n-1-2p} (m+n-2p-1-\hat{\nu}) \quad (28)$$

есть результат симметризации $m+n-2p-2$ осцилляторов с еще одним осциллятором:

$$\underbrace{y_{(\rho} \cdots y_{\rho})}_{m+n-2-2p} y_{\gamma_1} y_{\gamma_2} = \left[\underbrace{y_{(\rho} \cdots y_{\rho})}_{m+n-2-2p} y_{\gamma_1} + \right. \\ \left. + \frac{2i}{2} \frac{(m+n-2p-2)}{m+n-1-2p} \underbrace{y_{(\rho} \cdots y_{\rho})}_{m+n-3-2p} \epsilon_{\rho\gamma_1} (m+n-2p-1-\hat{\nu}) \right] y_{\gamma_2}. \quad (29)$$

Вторая часть, собственно ξ , чисто комбинаторная. Она появляется из-за того, что y_{β} и y_{γ_1} уже симметризованы. Чтобы получить значение ξ , следует найти симметрии исходного выражения

$$f^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-p} \mu_1 \dots \mu_p} g^{\tilde{\mu}_1 \dots \tilde{\mu}_p \beta_1 \dots \beta_{n-2-p} \gamma_1 \gamma_2} \epsilon_{\mu_1 \tilde{\mu}_1} \dots \epsilon_{\mu_p \tilde{\mu}_p} \underbrace{y_{(\alpha_1} \cdots y_{\alpha_{m-p}}}_{m-p} \underbrace{y_{\beta_1} \cdots y_{\beta_{n-2-p}}}_{n-2-p} y_{\gamma_1} y_{\gamma_2} \quad (30)$$

и свертки

$$f^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-p} \mu_1 \dots \mu_p} g^{\tilde{\mu}_1 \dots \tilde{\mu}_p \beta_1 \dots \beta_{n-2-p} \gamma_1 \gamma_2} \epsilon_{\mu_1 \tilde{\mu}_1} \dots \epsilon_{\mu_p \tilde{\mu}_p} \underbrace{y_{(\alpha_1} \cdots y_{\alpha_{m-p}}}_{m-p} \underbrace{y_{\beta_1} \cdots y_{\beta_{n-2-p}}}_{n-2-p} \epsilon_{\beta_1 \gamma_1} y_{\gamma_2}. \quad (31)$$

Количество перестановок, которые дают нуль, составляет

$$(n-2-p) \frac{(m+n-2p-3)!}{(m-p)!}, \quad (32)$$

а количество перестановок, которые дают ненулевые свертки, –

$$\xi = \frac{(m-p)!}{(m+n-2p-2)!} \left[\frac{(m+n-2p-2)!}{(m-p)!} - (n-2-p) \frac{(m+n-2p-3)!}{(m-p)!} \right] = \\ = \frac{m-p}{m+n-2p-2}. \quad (33)$$

Необходимо повторить эту же операцию с оставшимся осциллятором y_{γ_2} . С учетом (25) это дает

$$\begin{aligned} f^{\alpha(m)} g^{\beta(n)} \sum_{p=0}^{\min(m, n-2)} A(m, n-2, p, \hat{\nu}) (\epsilon_{\alpha\beta})^p & \left[\overbrace{y_{(\alpha} \dots y_{\alpha}}^{m-p} \overbrace{y_{\beta} \dots y_{\beta})}^{n-p} \right] + \\ & + (2i)(m-p) \epsilon_{\alpha\beta} \overbrace{y_{(\alpha} \dots y_{\alpha}}^{m-p-1} \overbrace{y_{\beta} \dots y_{\beta})}^{n-p-1} + \\ & + \frac{(2i)^2}{4} (\epsilon_{\alpha\beta})^2 (m-p)(m-p-1) \times \\ & \times \frac{m+n-2p-1-\hat{\nu}}{m+n-2p-1} \frac{m+n-2p-3+\hat{\nu}}{m+n-2p-3} \overbrace{y_{(\alpha} \dots y_{\alpha}}^{m-p-2} \overbrace{y_{\beta} \dots y_{\beta})}^{n-p-2} \Big], \end{aligned} \quad (34)$$

$$A(m, n, 0, \hat{\nu}) = A(m, n-2, 0, \hat{\nu}), \quad (35)$$

$$A(m, n, 1, \hat{\nu}) = A(m, n-2, 1, \hat{\nu}) + 2imA(m, n-2, 0, \hat{\nu}), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} A(m, n, p, \hat{\nu}) &= A(m, n-2, p, \hat{\nu}) + 2i(m-p+1)A(m, n-2, p-1, \hat{\nu}) + \\ &+ i^2 A(m, n-2, p-2, \hat{\nu})(m-p+2)(m-p+1) \times \\ &\times \frac{m+n-2p+3-\hat{\nu}}{m+n-2p+3} \frac{m+n-2p+1+\hat{\nu}}{m+n-2p+1}, \end{aligned} \quad (37)$$

где $p = 2, \dots, n-2$,

$$\begin{aligned} A(m, n, n-1, \hat{\nu}) &= 2i(m-n+2)A(m, n-2, n-2, \hat{\nu}) + \\ &+ i^2 A(m, n-2, n-3, \hat{\nu})(m-n+3)(m-n+2) \times \\ &\times \frac{m-n+5-\hat{\nu}}{m-n+5} \frac{m-n+3+\hat{\nu}}{m-n+3}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} A(m, n, n, \hat{\nu}) &= i^2 A(m, n-2, n-2, \hat{\nu})(m-n+2)(m-n+1) \times \\ &\times \frac{m-n+3-\hat{\nu}}{m-n+3} \frac{m-n+1+\hat{\nu}}{m-n+1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Вместе со структурными константами $A(m, 2, p, \hat{\nu})$ уравнения (35)–(39) единственным образом определяют структурные константы для четно-четного случая в терминах $A(m, 2, p, \hat{\nu})$. Структурные константы для $A(m, 2, p, \hat{\nu})$ могут быть получены путем прямой симметризации, процедура почти такая же, как и при выводе условия ассоциативности. В приложении проверено, что структурные константы (17) действительно являются решением уравнений (35)–(39).

4. НЕЧЕТНО-НЕЧЕТНЫЙ СЛУЧАЙ

Чтобы вывести структурные константы для нечетных мономов, достаточно использовать ассоциативность и структурные константы для бозонного случая (четно-четный случай):

$$\begin{aligned} f * g &= f^{\alpha(m+1)} \overbrace{y_{\alpha} \dots y_{\alpha}}^{m+1} * g^{\beta(n+1)} \overbrace{y_{\beta} \dots y_{\beta}}^{n+1} = \\ &= f^{\alpha(m+1)} g^{\beta(n+1)} \sum_{p=0}^{\min(m, n)+1} (\epsilon_{\alpha\beta})^p \underbrace{\overbrace{y_{\alpha} \dots y_{\alpha}}^{m+1-p} \overbrace{y_{\beta} \dots y_{\beta}}^{n+1-p}}_{m+n-2p+2} B(m+1, n+1, p, \hat{\nu}), \end{aligned} \quad (40)$$

где m, n – четные числа,

$$\begin{aligned} f^{\alpha(m+1)} \overbrace{y_\alpha \dots y_\alpha}^{m+1} * g^{\beta(n+1)} \overbrace{y_\beta \dots y_\beta}^{n+1} &= f^{\alpha(m)} g^{\beta(n)} y_\alpha * \overbrace{y_\alpha \dots y_\alpha}^m * \overbrace{y_\beta \dots y_\beta}^n * y_\beta = \\ &= f^{\alpha(m)} g^{\beta(n)} y_\alpha * \sum_{p=0}^{\min(m,n)} (\epsilon_{\alpha\beta})^p \underbrace{\overbrace{y_\alpha \dots y_\alpha}^{m-p} \overbrace{y_\beta \dots y_\beta}^{n-p}}_{m+n-2p} * y_\beta A(m, n, p, -\hat{\nu}). \end{aligned} \quad (41)$$

Теперь нужно выполнить симметризацию, подставляя соответствующие правильные комбинаторные факторы. Процедура такая же, как и при выводе уравнений (35)–(39), поэтому приводим только окончательный ответ:

$$\begin{aligned} f * g &= f^{\alpha(m+1)} g^{\beta(n+1)} \sum_{p=0}^{\min(m,n)} \left((\epsilon_{\alpha\beta})^p y_{\alpha(m+1-p)} y_{\beta(n+1-p)} + \right. \\ &\quad + i(\epsilon_{\alpha\beta})^{p+1} (m+n-2p+1+\nu) y_{\alpha(m-p)} y_{\beta(n-p)} + \\ &\quad + i^2 (\epsilon_{\alpha\beta})^{p+2} (m-p)(n-p) \frac{m+n-2p+1+\nu}{m+n-2p+1} \frac{m+n-2p-1+\nu}{m+n-2p-1} \times \\ &\quad \left. \times y_{\alpha(m-1-p)} y_{\beta(n-1-p)} \right) A(m, n, p, -\hat{\nu}). \end{aligned} \quad (42)$$

Сдвигая индексы в суммах, можно привести его к виду (40), где $B(m+1, n+1, p, \hat{\nu})$ в терминах бозонных структурных констант имеет вид

$$\begin{aligned} B(m+1, n+1, p, \hat{\nu}) &= A(m, n, p, -\hat{\nu}) + i(m+n-2p+3+\hat{\nu}) A(m, n, p-1, -\hat{\nu}) + \\ &\quad + i^2 (m-p+2)(n-p+2) \frac{m+n-2p+5+\hat{\nu}}{m+n-2p+5} \times \\ &\quad \times \frac{m+n-2p+3+\hat{\nu}}{m+n-2p+3} A(m, n, p-2, -\hat{\nu}). \end{aligned} \quad (43)$$

5. ЧЕТНО-НЕЧЕТНЫЙ И НЕЧЕТНО-ЧЕТНЫЙ СЛУЧАИ

Так же, как и в предыдущем разделе, можно вывести структурные константы для четно-нечетного и нечетно-четного случаев. После некоторых вычислений получаем окончательный ответ:

1) в четно-нечетном случае

$$\begin{aligned} C(m, n+1, p, \hat{\nu}) &= \\ &= A(m, n, p, -\hat{\nu}) + i(m-p+1) \frac{m+n-2p+3+\hat{\nu}}{m+n-2p+3} A(m, n, p-1, -\hat{\nu}), \end{aligned} \quad (44)$$

2) в нечетно-четном случае

$$D(m+1, n, p, \hat{\nu}) = A(m, n, p, \hat{\nu}) + i(n-p+1) \frac{m+n-2p+3-\hat{\nu}}{m+n-2p+3} A(m, n, p-1, \hat{\nu}). \quad (45)$$

6. ВЫВОД

Все структурные константы для алгебры $Aq(2, \nu)$ в ковариантном базисе получены. Ассоциативность произведения доказана. Тот факт, что структурные константы являются заальшутсовскими гипергеометрическими функциями, существен. Преобразование Заальшутса является ключевым свойством для доказательства ассоциативности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Проверка ассоциативности

Ассоциативное произведение в работе [7] было дано в так называемом конформном базисе:

$$V_m^{s-1} \equiv (-1)^{s-m} \frac{(s+m)!}{(2s)!} \underbrace{[J_-, \dots [J_-, [J_- J_+^s]]]}_{s-m}. \quad (46)$$

Подставляя в предыдущее выражение явную реализацию генераторов алгебры sl_2 , можно убедиться, что

$$V_m^{s-1} \sim \underbrace{y_+ \dots y_+ \overbrace{y_- \dots y_-}^{s-m}}_{2s}. \quad (47)$$

Lone-Star-произведение определяется следующим образом:

$$V_m^s * V_n^t = \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{s+t-1} g_u^{st}(m, n, \lambda) V_{m+n}^{s+t-u}, \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} g_u^{st}(m, n, \lambda) = & \frac{(1/4)^{u-2}}{2(u-1)!} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2} + \lambda & \frac{1}{2} - \lambda & \frac{2-u}{2} & \frac{1-u}{2} \\ \frac{3-2s}{2} & \frac{3-2t}{2} & \frac{1}{2} + s + t - u & 1 \end{matrix} ; 1 \right] \times \\ & \times \sum_{k=0}^{u-1} (-1)^k \binom{u-1}{k} (s-1-m)_{u-1-k} \times \\ & \times (s-1-m)_k (t-1+n)_k (t-1-n)_{u-1-k}. \end{aligned} \quad (49)$$

В работе [7] ассоциативность Lone-Star-произведения только предполагалась, в настоящей работе она явно проверена. Чтобы получить ковариантное выражение из (48), нужно перемножить векторы старшего и младшего веса, в этом случае все свертки с $\epsilon_{\alpha\beta}$ ненулевые. После соответствующего переопределения индексов и подстановки $\nu = 1 - 2\lambda$ получим выражение (17). Затем нужно подставить его в условия ассоциативности (35)–(39). Но так как факториальный фактор из формулы (17)

$$\frac{m! n!}{(m-p)! (n-p)! p!}$$

дает все необходимые нули, т.е., например, $A(m, n-2, -1, \hat{\nu}) \equiv 0$, то можно рассматривать только уравнение (37) при $p = 1, \dots, n$. Обозначим для краткости

$${}_4F_3 \left[\begin{matrix} 1 - \frac{\hat{\nu}}{2} & \frac{\hat{\nu}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} & \frac{m+n-2p+3}{2} & 1 \end{matrix} ; 1 \right] = F(m, n, p, \hat{\nu}). \quad (50)$$

Функция $F(m, n, p, \hat{\nu})$ должна удовлетворять тождеству

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-p)!p!} F(m, n, p, \hat{\nu}) &= \frac{(n-2)!}{(n-p-2)!p!} F(m, n-2, p, \hat{\nu}) + \\ &+ 2 \frac{(n-2)!}{(n-p-1)!(p-1)!} F(m, n-2, p-1, \hat{\nu}) + \\ &+ \frac{(n-2)!}{(n-p)!(p-2)!} \frac{m+n-2p+3-\hat{\nu}}{m+n-2p+3} \times \\ &\times \frac{m+n-2p+1+\hat{\nu}}{m+n-2p+1} F(m, n-2, p-2, \hat{\nu}). \end{aligned} \quad (51)$$

Лучше рассматривать гипергеометрические функции из правой части по отдельности.

Первое слагаемое $F(m, n-2, p, \hat{\nu})$. Согласно определению его можно представить в виде ряда

$$\begin{aligned} F(m, n-2, p, \hat{\nu}) &= {}_4F_3 \left[\begin{matrix} 1 - \frac{\hat{\nu}}{2} & \frac{\hat{\nu}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} + 1 & \frac{m+n-2p+3}{2} - 1 & 1 \end{matrix} ; 1 \right] = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(1 - \frac{\hat{\nu}}{2})_q (\frac{\hat{\nu}}{2})_q (\frac{1-p}{2})_q (\frac{-p}{2})_q}{(\frac{1-m}{2})_q (\frac{1-n}{2} + 1)_q (\frac{m+n-2p+3}{2} - 1)_q q!}. \end{aligned} \quad (52)$$

Выполняя преобразование символов Похгаммера, получаем новое выражение для $F(m, n-2, p, \hat{\nu})$:

$$\begin{aligned} F(m, n-2, p, \hat{\nu}) &= \frac{m+2n-2p}{m+n-2p+1} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} 1 - \frac{\hat{\nu}}{2} & \frac{\hat{\nu}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} + 1 & \frac{m+n-2p+3}{2} & 1 \end{matrix} ; 1 \right] - \\ &- \frac{n-1}{m+n-2p+1} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} 1 - \frac{\hat{\nu}}{2} & \frac{\hat{\nu}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} & \frac{m+n-2p+3}{2} & 1 \end{matrix} ; 1 \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Второй член является гипергеометрической функцией из левой части условия ассоциативности (37).

Третье слагаемое $F(m, n-2, p-2, \hat{\nu})$. Здесь мы используем тот факт, что функция ${}_4F_3(1)$ является заальшутсовской, и выполняем преобразование. Информацию об обрывающихся заальшутсовских рядах можно найти в монографии [13]. Пусть $p = 2N$ (нечетный случай может быть рассмотрен аналогично),

$$\begin{aligned} F(m, n-2, p-2, \hat{\nu}) &= {}_4F_3 \left[\begin{matrix} 1 - \frac{\hat{\nu}}{2} & \frac{\hat{\nu}}{2} & 1 - \frac{p}{2} & 1 + \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} + 1 & \frac{m+n-2p+3}{2} + 1 & 1 \end{matrix} ; 1 \right] = \\ &= \frac{(\frac{p-m}{2} - 1)_{N-1}}{(\frac{1-m}{2})_{N-1}} \frac{(\frac{p-n}{2})_{N-1}}{(\frac{1-n}{2} + 1)_{N-1}} \times \\ &\times {}_4F_3 \left[\begin{matrix} 1 + \frac{m+n-2p+1+\hat{\nu}}{2} & 1 + \frac{m+n-2p+3-\hat{\nu}}{2} & 1 - \frac{p}{2} & 1 + \frac{1-p}{2} \\ \frac{m}{2} - p + 3 & \frac{n}{2} - p + 2 & \frac{m+n-2p+3}{2} + 1 & 1 \end{matrix} ; 1 \right]. \end{aligned} \quad (54)$$

Нужно выделить ряд, который совпадает с гипергеометрической функцией из левой части уравнения ассоциативности (37). После простых упражнений с переопределением индексов в сумме и преобразования символов Похгаммера (как в первом слагаемом) получаем новое выражение для третьего слагаемого:

$$\begin{aligned}
 F(m, n-2, p-2, \hat{\nu}) &= \\
 &= \frac{(\frac{p-m}{2}-1)_{N-1}}{(\frac{1-m}{2})_{N-1}} \frac{(\frac{p-n}{2})_{N-1}}{(\frac{1-n}{2}+1)_{N-1}} \frac{(\frac{m+n-2p+3}{2})(\frac{m}{2}-p+2)(\frac{n}{2}-p+1)}{(\frac{m+n-2p+3-\hat{\nu}}{2})(\frac{m+n-2p+1+\hat{\nu}}{2})(\frac{1-p}{2})(\frac{-p}{2})} \times \\
 &\times \left(\frac{m}{2}-p+1 \right) \left({}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{m+n-2p+1+\hat{\nu}}{2} & \frac{m+n-2p+3-\hat{\nu}}{2} & -\frac{p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{m}{2}-p+1 & \frac{n}{2}-p+1 & \frac{m+n-2p+3}{2} & 1 \end{matrix} \right] - \right. \\
 &\left. - {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{m+n-2p+1+\hat{\nu}}{2} & \frac{m+n-2p+3-\hat{\nu}}{2} & -\frac{p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{m}{2}-p+2 & \frac{n}{2}-p+1 & \frac{m+n-2p+3}{2} & 1 \end{matrix} \right] \right). \quad (55)
 \end{aligned}$$

Второе слагаемое $F(m, n-2, p-1, \hat{\nu})$. Удобно рассмотреть второе слагаемое в конце. После преобразований первого и третьего слагаемых мы получили гипергеометрические функции из левой части (37) и некоторые дополнительные члены. Разделим второе слагаемое на 2

$$\begin{aligned}
 F(m, n-2, p-1, \hat{\nu}) &= AF(m, n-2, p-1, \hat{\nu}) + BF(m, n-2, p-1, \hat{\nu}), \\
 A + B &= 1. \quad (56)
 \end{aligned}$$

Слагаемое, содержащее множитель A , преобразуем как первую гипергеометрическую функцию, а слагаемое, содержащее множитель B , – как третью. Константы A и B выбираются так, чтобы сократить дополнительные члены из первого и третьего слагаемых.

Преобразованное слагаемое, содержащее множитель A , имеет вид

$$\begin{aligned}
 F(m, n-2, p-1, \hat{\nu}) &= \frac{n-1}{p} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} 1-\frac{\hat{\nu}}{2} & \frac{\hat{\nu}}{2} & -\frac{p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} & \frac{m+n-2p+3}{2} & 1 \end{matrix} \right] - \\
 &- \frac{(n-p-1)}{p} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} 1-\frac{\hat{\nu}}{2} & \frac{\hat{\nu}}{2} & -\frac{p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2}+1 & \frac{m+n-2p+3}{2} & 1 \end{matrix} \right]. \quad (57)
 \end{aligned}$$

Преобразованное слагаемое, содержащее множитель B , имеет вид

$$\begin{aligned}
 F(m, n-2, p-1, \hat{\nu}) &= \frac{(\frac{p-m}{2})_N (\frac{p-n}{2})_N}{(\frac{1-m}{2})_N (\frac{1-n}{2})_N} \frac{n-1}{(n-p)p} \times \\
 &\times \left(\frac{(\frac{m-p+1}{2})(m-p+2)}{\frac{m}{2}-p+1} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{m+n-2p+1+\hat{\nu}}{2} & \frac{m+n-2p+3-\hat{\nu}}{2} & -\frac{p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{m}{2}-p+2 & \frac{n}{2}-p+1 & \frac{m+n-2p+3}{2} & 1 \end{matrix} \right] - \right. \\
 &\left. - (m-p+1) {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{m+n-2p+1+\hat{\nu}}{2} & \frac{m+n-2p+3-\hat{\nu}}{2} & -\frac{p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{m}{2}-p+1 & \frac{n}{2}-p+1 & \frac{m+n-2p+3}{2} & 1 \end{matrix} \right] \right). \quad (58)
 \end{aligned}$$

Значения A и B , при которых дополнительные слагаемые сокращаются, следующие:

$$A = \frac{m+2n-2p}{m+n-2p+1}, \quad B = 1 - \frac{m+2n-2p}{m+n-2p+1}. \quad (59)$$

Подставляя все три слагаемых в условие ассоциативности (37), видим, что оно не нарушено.

Благодарности. Автор благодарит М. А. Васильева за полезные комментарии.

Список литературы

- [1] E. P. Wigner, “Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations?”, *Phys. Rev.*, **77**:5 (1950), 711–712.
- [2] M. A. Vasiliev, “Higher spin algebras and quantization on the sphere and hyperboloid”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **6**:7 (1991), 1115–1135.
- [3] М. А. Васильев, “Квантование на сфере и супералгебры высших спинов”, *Письма в ЖЭТФ*, **50**:8 (1989), 344–347.
- [4] E. Bergshoeff, M. P. Blencowe, K. S. Stelle, “Area-preserving diffeomorphisms and higher-spin algebras”, *Commun. Math. Phys.*, **128**:2 (1990), 213–230.
- [5] M. A. Vasiliev, “Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in $(3+1)$ -dimensions”, *Phys. Lett. B*, **243**:4 (1990), 378–382.
- [6] M. A. Vasiliev, “Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in $(A)dS_d$ ”, *Phys. Lett. B*, **567**:1 (2003), 139–151, arXiv: hep-th/0304049.
- [7] C. N. Pope, X. Shen, L. J. Romans, “ W_∞ and the Racah–Wigner algebra”, *Nucl. Phys. B*, **339**:1 (1990), 191–221.
- [8] E. Bergshoeff, M. A. Vasiliev, B. de Wit, “The super- $W_\infty(\lambda)$ algebra”, *Phys. Lett. B*, **256**:2 (1991), 199–205.
- [9] E. Bergshoeff, B. de Wit, M. A. Vasiliev, “The structure of the super- $W_\infty(\lambda)$ algebra”, *Nucl. Phys. B*, **366**:2 (1991), 315–346.
- [10] M. R. Gaberdiel, R. Gopakumar, “Minimal model holography”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:21 (2013), 214002, 47 pp., arXiv: 1207.6697.
- [11] E. S. Fradkin, V. Ya. Linetsky, “Supersymmetric Racah basis, family of infinite-dimensional superalgebras, $SU(\infty+1|\infty)$ and related 2D models”, *Modern Phys. Lett. A*, **6**:7 (1991), 617–633.
- [12] E. Joung, K. Mkrtchyan, “Notes on higher-spin algebras: minimal representations and structure constants”, *JHEP*, **05** (2014), 103, 34 pp., arXiv: 1401.7977.
- [13] L. J. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.

Поступила в редакцию 19.02.2016,
после доработки 28.11.2016