Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Точные асимптотики типа Лапласа для гауссовской меры Боголюбова: многообразие точек минимума функционала действия, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 3, 456–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9171>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 18:32:33

© 2017 г.

В. Р. Фаталов*

ТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ ТИПА ЛАПЛАСА ДЛЯ ГАУССОВСКОЙ МЕРЫ БОГОЛЮБОВА: МНОГООБРАЗИЕ ТОЧЕК МИНИМУМА ФУНКЦИОНАЛА ДЕЙСТВИЯ

Доказана теорема о точной асимптотике больших уклонений меры Боголюбова в L^p -норме для $p = 4, 6, 8, 10$ при $p > p_0$, где $p_0 = 2 + 4\pi^2/\beta^2\omega^2$ – пороговое значение, $\beta > 0$ – обратная температура, $\omega > 0$ – собственная частота гармонического осциллятора. Исследование проводится методом Лапласа в функциональных пространствах для гауссовских мер.

Ключевые слова: мера Боголюбова, метод Лапласа в банаховом пространстве, функционал действия, многообразие точек минимума.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9171>

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В статьях [1]–[3] была введена и изучена гауссовская мера Боголюбова, имеющая важное значение в теории статистического равновесия квантовых систем [4]. *Гауссовский процесс Боголюбова* – это стационарный гауссовский процесс $\xi(t)$, $t \in [0, \beta]$, с нулевым средним и ковариационной функцией

$$B(t-s) \equiv B(t, s) := \mathbf{E}\xi(t)\xi(s) = \frac{1}{2m\omega \operatorname{sh}(\beta\omega/2)} \operatorname{ch}\left(\omega|t-s| - \frac{\beta\omega}{2}\right). \quad (1.1)$$

Здесь и ниже $\mathbf{E}$ – оператор математического ожидания, взятый относительно вероятности $\mathbf{P}$, $m > 0$ – масса частицы, $\beta > 0$ – обратная температура, $\omega > 0$ – собственная частота гармонического осциллятора [2].

Согласно одному общему результату из теории гауссовских процессов (см. монографию [5], § 9.2) процесс Боголюбова $\xi(t)$ имеет п. н. непрерывные траектории на отрезке $[0, \beta]$. Используя формулу (1.1), находим, что $\mathbf{E}[\xi(\beta) - \xi(0)]^2 = 0$, следовательно, $\xi(0) = \xi(\beta)$ п. н. Учитывая вышеизложенное, заключаем, что траектории

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00050).

*Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: vrfatalov@yandex.ru

гауссовского процесса Боголюбова принадлежат п. н. пространству $C^0[0, \beta]$ непрерывных на отрезке $[0, \beta]$ функций $x(t)$ с равномерной метрикой, удовлетворяющих условию $x(0) = x(\beta)$. Распределение μ_B процесса $\xi(t)$ в пространстве $C^0[0, \beta]$ и называется *гауссовской мерой Боголюбова*.

В статье [2] были доказаны квадратурные формулы для приближенного вычисления некоторых функциональных интегралов по мере Боголюбова. В дополнение к результатам работы [2] в статье [6] на основе метода Лапласа были получены приближенные асимптотические формулы для одного класса функциональных интегралов, взятых по мере Боголюбова. В качестве основного функционала в работе [6] была взята L^p -норма при $p > 0$. В результате исследований асимптотических свойств меры Боголюбова в работе [6] было установлено существование порогового значения

$$p_0 \equiv p_0(\beta\omega) := 2 + \frac{4\pi^2}{\beta^2\omega^2}.$$

Оказалось, что вычисление асимптотик интегралов типа Лапласа и вероятностей больших отклонений для меры Боголюбова в случае L^p -функционалов резко усложняется при $p > p_0$. Это связано с тем, что при $0 < p < p_0$ соответствующая экстремальная задача для функционала действия в методе Лапласа имеет всего два решения, в то время как при $p > p_0$ указанная задача имеет многообразие решений. Отметим, что существование того же порогового значения p_0 установлено в статье [7] при исследовании рядов теории возмущения в квантовой механике.

В настоящей работе мы доказываем теорему о точной асимптотике больших отклонений меры Боголюбова в L^p -норме при $p > p_0$ для значений $p = 4, 6, 8, 10$. Метод доказательства полученных в статье результатов – это метод Лапласа в функциональных пространствах для гауссовских мер, изложенный в статье [8].

Многие утверждения ниже мы формулируем в достаточно общем виде, рассматривая случай $p > 2$, это сделано с целью возможного обобщения основного результата статьи – теоремы 1 – на другие значения параметра p .

Перейдем к точной формулировке полученных результатов. Сформулированные ниже определения и построения аналогичны изложенным в статье [6], но содержат существенные отличия.

Для фиксированного числа $2 < p < \infty$ введем следующие функции:

$$J(\delta) \equiv J_p(\delta) := \int_{\delta}^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{1-\delta^2}{1-\delta^p}(1-t^p) - (1-t^2)}}, \quad (1.2)$$

$$M(\delta) \equiv M_p(\delta) := \int_{\delta}^1 \frac{t^p dt}{\sqrt{\frac{1-\delta^2}{1-\delta^p}(1-t^p) - (1-t^2)}}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (1.3)$$

Из определений получаем неравенства

$$0 < \delta^p J(\delta) < M(\delta) < J(\delta), \quad 0 < \delta < 1.$$

Несложно убедиться, что функции $J(\delta)$ и $M(\delta)$ корректно определены и непрерывны; некоторые свойства функции $J(\delta)$ изложены в статье [6]. Здесь мы отметим, что подынтегральные функции в выражениях (1.2), (1.3) имеют интегрируемые особенности при $t = \delta$ и $t = 1$. В лемме 5 из работы [6] также доказаны следующие

соотношения, справедливые при $p > 2$:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} J_p(\delta) = +\infty, \quad \lim_{\delta \uparrow 1} J_p(\delta) = \frac{\pi}{\sqrt{p-2}}. \quad (1.4)$$

Доопределим по непрерывности

$$J_p(1) := \lim_{\delta \uparrow 1} J_p(\delta) = \frac{\pi}{\sqrt{p-2}}. \quad (1.5)$$

Положим

$$\mathcal{P} = \{p = 4, 6, 8, 10 \text{ и при этом } p > p_0\}. \quad (1.6)$$

Проводя дальнейшие исследования асимптотических свойств меры Боголюбова, автор обнаружил, что доказательство леммы 1 из работы [6] содержит неточность. В настоящей работе дано новое строгое доказательство указанной леммы для значений $p \in \mathcal{P}$. Видоизмененная формулировка леммы 1 из [6] имеет следующий вид.

ЛЕММА 1. 1. Пусть фиксировано $p > 2 + 4\pi^2/\beta^2\omega^2$. Тогда уравнение

$$J_p(\delta) = \frac{\beta\omega}{2}, \quad 0 < \delta < 1, \quad (1.7)$$

имеет хотя бы один корень.

2. Для значений $p \in \mathcal{P}$ уравнение (1.7) имеет единственный корень, который мы обозначим через $\delta_0 \equiv \delta_0(p, \beta\omega)$.

Доказательство леммы 1 дано ниже в разделе 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что все результаты статьи [6] остаются в силе, кроме логарифмических соотношений (1.18), (1.25), (1.43). Отметим также, что для множеств $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$, определенных в формуле (5.12) из [6], выполнено равенство $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1$, поскольку функция x_1 из (5.11) в [6] принадлежит $\mathcal{M}_0$. Таким образом, для значений $p \in \mathcal{P}$ минимизирующее многообразие $\mathcal{M}$ из леммы 10 в [6] имеет более простой вид: $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \cup [-\mathcal{M}_0]$ (см. также лемму 5 в разделе 4 настоящей работы).

В силу леммы 4 из [6] имеют место неравенства

$$\delta_0(4, \beta\omega) > \delta_0(6, \beta\omega) > \delta_0(8, \beta\omega) > \delta_0(10, \beta\omega).$$

Для $p \in \mathcal{P}$ положим

$$b_0 = b_0(p, \beta\omega) := \left(\frac{\beta\omega}{2M(\delta_0)} \right)^{1/p}, \quad h_0 := b_0\delta_0, \quad \delta_\infty := \frac{1}{\text{ch}(\beta\omega/2)}.$$

В силу леммы 12 из [6] для фиксированных $p \in \mathcal{P}$, $\beta > 0$, $\omega > 0$ справедливы неравенства $0 < \delta_\infty < \delta_0 < h_0 < 1 < b_0$. Определим также важный параметр (множитель Лагранжа)

$$\lambda_0 = \lambda_0(p, \beta\omega) := \beta^2\omega^2 \frac{b_0^2 - h_0^2}{2(b_0^p - h_0^p)} = \beta^2\omega^2 \frac{1 - \delta_0^2}{2(1 - \delta_0^p)b_0^{p-2}} > 0. \quad (1.8)$$

Для $p \in \mathcal{P}$ справедливы следующие полезные оценки (см. соотношение (1.11) в [6]):

$$2\beta\omega \operatorname{th} \frac{\beta\omega}{2} \leq p\lambda_0 \leq \beta^2\omega^2.$$

Важное свойство монотонного убывания по $p \in \mathcal{P}$ функции $p\lambda_0(p, \beta\omega)$ описано в лемме 12 из [6]. Введем обозначение $\|x\|_p := \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$, $p > 0$. Как известно, при $p \geq 1$ функционал $\|x\|_p$ является нормой в банаховом пространстве $L^p = L^p[0, 1]$ функций, p -я степень которых интегрируема на $[0, 1]$.

Для фиксированного $p \in \mathcal{P}$ введем функцию

$$\theta(s) \equiv \theta(s, p, \beta\omega) := \frac{1}{\beta\omega} \int_{\delta_0}^{s/b_0} \frac{dz}{\sqrt{\frac{1-\delta_0^2}{1-\delta_0^p}(1-z^p) - (1-z^2)}}, \quad h_0 \leq s \leq b_0.$$

Легко убедиться, что функция $\theta(s)$ монотонно возрастает по $s \in [h_0, b_0]$, при этом

$$\theta(h_0) = 0, \quad \theta(b_0) = \frac{J(\delta_0)}{\beta\omega} = \frac{1}{2},$$

следовательно, однозначно определена обратная функция θ^{-1} ; положим

$$x_0(t) := \theta^{-1}(t), \quad t \in [0, 1/2]. \quad (1.9)$$

Распространим функцию $x_0(t)$ на весь отрезок $[0, 1]$ симметричным образом, положив

$$x_0(t) = x_0(1-t), \quad t \in [1/2, 1]. \quad (1.10)$$

Очевидно, функция $x_0(t)$ является строго положительной, она монотонно возрастает при $t \in [0, 1/2]$, причем $x_0(0) = h_0$ и $x_0(1/2) = b_0$. Таким образом, для всех значений $t \in [0, 1]$ выполнены неравенства $0 < h_0 \leq x_0(t) \leq b_0$. Из результатов статьи [6] следует, что функция $x_0(t)$ дважды дифференцируема на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяет нелинейной граничной задаче

$$\begin{aligned} x''(t) &= \beta^2 \omega^2 x(t) - \lambda_0 p x^{p-1}(t), \quad t \in [0, 1], \\ x(0) &= x(1) = h_0, \quad x'(0) = x'(1) = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

при этом $x'_0(1/2) = 0$ и $\|x_0\|_p = 1$. Следуя работе [8], введем функции

$$f_0(t) = \frac{x_0(t)}{\|x_0\|_2}, \quad f_1(t) = \frac{x'_0(t)}{\|x'_0\|_2}, \quad t \in [0, 1]. \quad (1.12)$$

Для формулировки основного результата нам понадобится следующее предложение. Ниже μ – спектральный параметр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть фиксировано $p \in \mathcal{P}$. Самосопряженная граничная задача на собственные числа для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} -z''(t) + \beta^2 \omega^2 z(t) &= \frac{p(p-1)}{\mu} x_0^{p-2}(t) z(t), \quad t \in [0, 1], \\ z(0) &= z(1), \quad z'(0) = z'(1), \end{aligned} \quad (1.13)$$

имеет последовательность собственных чисел $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ следующего вида:

$$\mu_0 = \frac{p-1}{\lambda_0} > \mu_1 = \frac{1}{\lambda_0} > \mu_2 > \mu_3 \geq \mu_4 > \dots > 0, \quad (1.14)$$

при этом $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n < \infty$. Максимальному собственному числу $\mu_0 = (p-1)/\lambda_0$ соответствует L^2 -нормированная положительная собственная функция $f_0(t)$, собственному числу $\mu_1 = 1/\lambda_0$ соответствует L^2 -нормированная собственная функция $f_1(t)$ (см. формулы (1.12)); собственным числам μ_k , $k = 2, 3, \dots$, соответствуют L^2 -нормированные собственные функции $f_k(t)$ и при этом система $\{f_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в L^2 .

Предложение 1 доказано ниже в разделе 4. Основной результат настоящей работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть заданы числа $m > 0$, $\beta > 0$, $\omega > 0$ и $p \in \mathcal{P}$. Тогда для стационарного гауссовского процесса Боголюбова $\xi(t)$, $t \in [0, \beta]$, при $u \rightarrow \infty$ выполнено соотношение

$$\mathbf{P} \left\{ \int_0^\beta |\xi(t)|^p dt > u^p \right\} = c_1 \exp \left\{ -\frac{m\lambda_0 p}{2\beta^{(p+2)/p}} u^2 \right\} (1 + o(1)), \quad (1.15)$$

при этом постоянная $c_1 = c_1(p, \beta\omega) > 0$ записывается следующим образом:

$$c_1 = \frac{\|x'_0\|_2^2 \sqrt{2\beta\omega \operatorname{sh}(\beta\omega/2)}}{\pi \sqrt{p\lambda_0 c_2}} \left[\prod_{k=2}^{\infty} (1 - \lambda_0 \mu_k) \right]^{-1/2}, \quad (1.16)$$

где

$$c_2 = c_2(p, \beta\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{ch} \left(\beta\omega |t-s| - \frac{\beta\omega}{2} \right) x'_0(t) x'_0(s) dt ds > 0. \quad (1.17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для $p \in \mathcal{P}$ положим

$$C_0 = C_0(p, \beta\omega) = 2\lambda_0 b_0^p - \beta^2 \omega^2 b_0^2 < 0.$$

Отметим, что постоянные c_1 , c_2 , C_0 , (как и величины δ_0 , h_0 , b_0 , λ_0) зависят только от p и произведения $\beta\omega$, но не зависят от массы m . Несложно доказать, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} \|x_0\|_2^2 &= \int_0^1 x_0^2(t) dt = 2 \int_{h_0}^{b_0} \frac{s^2 ds}{\sqrt{\beta^2 \omega^2 s^2 - 2\lambda_0 s^p + C_0}}, \\ \|x'_0\|_2^2 &= \int_0^1 [x'_0(t)]^2 dt = 2 \int_{h_0}^{b_0} \sqrt{\beta^2 \omega^2 s^2 - 2\lambda_0 s^p + C_0} ds. \end{aligned}$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1

Первое утверждение леммы 1 (существование корня) легко получить из непрерывности функции $J_p(\delta)$ и соотношений (1.4), (1.5). Доказательство второго утверждения леммы 1 (единственность корня) для значений $p \in \mathcal{P}$ (см. (1.6)) значительно сложнее, оно основано на свойстве монотонного убывания функции $J_p(\delta)$ на множестве $\delta \in (0, 1]$. Это свойство мы доказываем, устанавливая, что при $p \in \mathcal{P}$ производная $J'_p(\delta) < 0$ для всех $\delta \in (0, 1)$. Теорему 2 о существовании и виде производной $J'_p(\delta)$ мы формулируем и доказываем ниже для общего случая $p > 2$, это сделано с целью возможного обобщения п. 2 леммы 1 на другие значения параметра p .

Для фиксированного числа $p > 2$ введем следующую функцию:

$$\phi(t) \equiv \phi_p(t) := \frac{1-t^2}{1-t^p}, \quad t \in [0, 1), \quad \phi(1) := \lim_{t \uparrow 1} \phi(t) = \frac{2}{p}. \quad (2.1)$$

ЛЕММА 2. Функция $\phi(t)$ строго монотонно убывает на отрезке $t \in [0, 1]$ от значения $\phi(0) = 1$ до значения $\phi(1) = 2/p < 1$. Для производной функции $\phi(t)$ выполнены соотношения

$$\phi'(t) = \frac{t[(2-p)t^p + pt^{p-2} - 2]}{(1-t^p)^2}, \quad t \in [0, 1], \quad (2.2)$$

при этом $\phi'(t) < 0$ при всех $t \in (0, 1]$ и

$$\phi'(0) = 0, \quad \phi'(1) := \lim_{t \uparrow 1} \phi'(t) = \frac{2-p}{p} < 0. \quad (2.3)$$

Все утверждения леммы 2, кроме соотношения (2.3), доказаны в статье [6] (см. лемму 2). Первое равенство в формуле (2.3) вытекает непосредственно из соотношения (2.2), второе соотношение в формуле (2.3) легко получаем из (2.2), применяя правило Лопиталя.

По аналогии с формулами (1.2), (1.3) для фиксированного числа $p > 2$ введем следующую функцию от $\delta \in (0, 1)$:

$$\Psi_p(\delta) := \int_{\delta}^1 \frac{(t^p - \delta^p) dt}{\sqrt{1-t^p} [\phi(\delta) - \phi(t)]^{3/2}}. \quad (2.4)$$

Несложно убедиться, что функция $\Psi_p(\delta)$ корректно определена и непрерывна. Отметим, что подынтегральная функция в (2.4) имеет интегрируемые особенности при $t = \delta$ и $t = 1$.

ТЕОРЕМА 2. Для любого фиксированного числа $p > 2$ функция $J_p(\delta)$, заданная в (1.2), непрерывно дифференцируема на множестве $\delta \in (0, 1]$. Производная функции $J_p(\delta)$ имеет вид

$$J'_p(\delta) = -\frac{Q_p(\delta)}{2\delta(1-\delta^p)}, \quad 0 < \delta \leq 1, \quad (2.5)$$

где

$$Q_p(\delta) := 2pM_p(\delta) - (p-2)\phi(\delta)\Psi_p(\delta), \quad 0 < \delta \leq 1. \quad (2.6)$$

При этом выполнены соотношения

$$\begin{aligned} J'_p(\delta) &= -\frac{1}{\delta}(1+o(1)), \quad \delta \downarrow 0, & J'_p(1) &= \lim_{\delta \uparrow 1} J'_p(\delta) = 0, \\ Q_p(0) &:= \lim_{\delta \downarrow 0} Q_p(\delta) = 2, & Q_p(1) &= \lim_{\delta \uparrow 1} Q_p(\delta) = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2 довольно длинное и здесь опущено.

Следующая лемма показывает, что локально в окрестности особой точки $\delta = 1$ функция $J_p(\delta)$ строго монотонно убывает по δ .

ЛЕММА 3. При фиксированном $p > 2$ справедливо асимптотическое разложение Тейлора

$$J_p(\delta) = \frac{\pi}{\sqrt{p-2}} + \frac{\pi(p-1)(p+2)}{96\sqrt{p-2}}(1-\delta)^2 + C_0(1-\delta)^3 + O(1-\delta)^4, \quad \delta \uparrow 1, \quad (2.8)$$

где $C_0 = C_0(p) \in \mathbb{R}$ – некоторая постоянная. Таким образом, при $p > 2$ у функции $J_p(\delta)$ в точке $\delta = 1$ существуют левосторонние первая и вторая производные $J'_p(1)$, $J''_p(1)$ и при этом выполнены соотношения

$$J'_p(1) := \lim_{\delta \uparrow 1} J'_p(\delta) = 0, \quad J''_p(1) = \frac{\pi(p-1)(p+2)}{48\sqrt{p-2}} > 0. \quad (2.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из соотношения (2.8) следует, что при $p > 2$ у функции $J_p(\delta)$ в точке $\delta = 1$ существует левосторонняя третья производная $J'''_p(1)$. Отсюда следует, что в достаточно малой окрестности U точки $\delta = 1$ у функции $J_p(\delta)$ существует непрерывная вторая производная $J''_p(\delta)$ и при этом в силу последнего соотношения из (2.9) выполнено неравенство $J''_p(\delta) > 0$ при $\delta \in U$. Таким образом, с учетом равенства $J'_p(1) = 0$ заключаем, что при $p > 2$ в достаточно малой окрестности U точки $\delta = 1$ функция $J_p(\delta)$ выпукла вниз и строго монотонно убывает по δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3 проводится по схеме доказательства леммы 5 в [6], оно достаточно длинное и здесь опущено.

Можно также доказать, что для фиксированного $p > 2$ справедливо соотношение

$$J_p(\delta) = -\ln \delta(1 + o(1)), \quad \delta \downarrow 0. \quad (2.10)$$

Отметим, что формула (2.10) согласуется с формулой (2.7).

Из формулы (2.5) следует, что при фиксированном $p > 2$ производная $J'_p(\delta) < 0$ для всех $\delta \in (0, 1)$ тогда и только тогда, когда

$$Q_p(\delta) > 0 \quad \text{для всех } \delta \in (0, 1). \quad (2.11)$$

Исследовать задачу о справедливости неравенства (2.11) для всех $p > 2$, используя формулу (2.6), довольно сложно. Ниже мы дадим более удобную формулу для $Q_p(\delta)$ в случае, когда параметр p принимает четные значения, большие двух. Введем функцию

$$\Pi(n, \delta) := 1 + \delta^2 + \delta^4 + \dots + \delta^{2n-2}, \quad 0 \leq \delta \leq 1. \quad (2.12)$$

Тогда в силу формул (2.1), (2.12) при $p = 2n$, $n = 2, 3, 4, \dots$, справедливы равенства

$$\phi(\delta) \equiv \phi_{2n}(\delta) = \frac{1}{\Pi(n, \delta)} = \frac{1}{1 + \delta^2 + \delta^4 + \dots + \delta^{2n-2}}, \quad 0 \leq \delta \leq 1. \quad (2.13)$$

Для фиксированных целого $n \geq 2$ и $\delta \in (0, 1)$ введем следующие функции:

$$G_{2n}(t^2, \delta^2) := \sum_{k=0}^{n-2} \left[\sum_{j=0}^{n-2-k} \delta^{2j} \right] t^{2k}, \quad \delta \leq t \leq 1, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} R_{\delta, 2n}(t) &:= \phi_{2n}(\delta)(1 - t^{2n}) - (1 - t^2) \equiv \\ &\equiv \phi_{2n}(\delta)(1 - t^2)(t^2 - \delta^2)G_{2n}(t^2, \delta^2), \quad \delta \leq t \leq 1. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Второе соотношение в (2.12) справедливо в силу формул (2.13), (2.14). Введем также функции

$$L_{2n}(\delta) := \int_{\delta}^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{R_{\delta,2n}(t)}}, \quad F_{2n}(\delta) := \int_{\delta}^1 \frac{dt}{\sqrt{R_{\delta,2n}(t)}G_{2n}(t^2, \delta^2)}, \quad 0 < \delta < 1.$$

Справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть фиксировано целое $n \geq 2$. Тогда имеет место тождество

$$Q_{2n}(\delta) = 2[n + (\delta^2(n-1) - 1)\Pi(n, \delta)]J_{2n}(\delta) - 2(n-3)\Pi(n, \delta)L_{2n}(\delta) - 2(n-1)\Pi^2(n, \delta)F_{2n}(\delta), \quad 0 < \delta \leq 1. \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО довольно длинное и здесь опущено. На основе формулы (2.16) доказывается п. 2 леммы 1.

3. ТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ГАУССОВСКИХ МЕР: МНОГООБРАЗИЕ ТОЧЕК МИНИМУМА ФУНКЦИОНАЛА ДЕЙСТВИЯ

Следуя статье [8], изложим один общий результат об асимптотиках больших уклонений гауссовских мер. При помощи этого результата мы докажем теорему 1.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть P_A – гауссовская мера в гильбертовом пространстве H , имеющая нулевое среднее и инъективный ковариационный оператор A . В последующих формулах $\text{Dom}(C)$ обозначает область определения оператора C , $\text{Ran}(C)$ – область его значений, тождественные операторы в различных пространствах обозначаются одним и тем же символом I . Предположим, что выполнены следующие условия.

УСЛОВИЕ В.1. Борелевское множество D замкнуто и имеет вид

$$D = \{x \in H : Q(x) \geq 0\},$$

где $Q(x)$ – непрерывная действительная функция такая, что или D , или множество $H \setminus D$ представимо в виде конечного объединения непересекающихся выпуклых множеств из H и при этом $P_A\{x \in H : |Q(x)| < \infty\} = 1$. Пусть D имеет непустую внутренность и не содержит нулевого элемента из H .

УСЛОВИЕ В.2. Квадратичная форма $\langle x, A^{-1}x \rangle$ достигает своего минимума по $x \in D \cap \text{Ran}(A)$, который равен $\sigma^{-2} > 0$, на одномерном дважды дифференцируемом компактном многообразии M , лежащем на границе ∂D множества D .

Таким образом,

$$\langle m, A^{-1}m \rangle = \sigma^{-2} > 0 \quad \text{для всех } m \in M.$$

Обозначим через $n_x \in H$ единичный касательный вектор к кривой M в точке x , через $\widehat{M}_x$ – одномерное аффинное пространство, натянутое на вектор n_x и содержащее точку x , т.е. одномерное пространство, касательное к M в точке x (см. монографии [9], гл. 2, п. 2.3.5, и [10], гл. 3, § 3). Тогда $M_x := \widehat{M}_x - x$ представляет

собой одномерное подпространство в H , содержащее точку 0. Как это принято, мы будем рассматривать единичные касательные векторы как свободные векторы, поэтому выходящий из точки 0 единичный вектор, на который натянута подпространство M_x , мы также будем обозначать через n_x .

Имеет место разложение гильбертова пространства H в прямую сумму подпространств $H = M_x \oplus N_x$, где N_x – ортогональное дополнение подпространства M_x коразмерности 1 [11]. Введем следующие два условия.

УСЛОВИЕ В.3. В пространстве H существуют окрестность U многообразия M и множество U_0 такие, что $M \subset U_0 \subset U$, функция $Q(x)$ трижды дифференцируема по Фреше во всех точках $x \in U_0$ и $P_A(U \setminus U_0) = 1$. Выполнено условие невырожденности: для всех $x \in M$ имеет место неравенство

$$\langle y, [A^{-1} - \lambda Q''(x)]y \rangle > 0, \quad 0 \neq y \in N_x \cap \text{Dom}(A^{-1}) \cap \text{Dom}(Q''(x)),$$

где $\lambda = \langle x, A^{-1}x \rangle / \langle x, Q'(x) \rangle > 0$ – множитель Лагранжа.

УСЛОВИЕ В.4. Для каждого $x \in M$ выполнено условие ортогональности

$$\langle x, n_x \rangle = 0. \quad (3.1)$$

Для каждого фиксированного $x \in M$ выберем с учетом (3.1) некоторый ортонормированный базис $\{e_k^x\}_{k=0}^\infty$ в гильбертовом пространстве H так, чтобы первые два элемента базиса имели следующий вид:

$$e_0^x = n_x, \quad e_1^x = \frac{x}{\|x\|}. \quad (3.2)$$

Пусть $\Lambda(x)$ – линейный оператор, имеющий в базисе $\{e_k^x\}_{k=0}^\infty$ матричное представление

$$\Lambda(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A^{-1}x \\ 0 & 0 & n_x \\ An_x & x & I - \lambda A Q''(x) \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Формула (3.3) понимается в следующем координатном смысле. Элементы $A^{-1}x \in H$ и $n_x = e_0^x = (1, 0, 0, \dots) \in H$ записываются в виде вектор-строк своих координат, элементы $An_x \in H$ и $x = \|x\|e_1^x = (0, \|x\|, 0, 0, \dots) \in H$ – в виде вектор-столбцов, а оператор (вообще говоря, недиагональный) $I - \lambda A Q''(x): H \rightarrow H$ – в матричном виде в базисе $\{e_k^x\}_{k=0}^\infty$. Матрица $\Lambda(x)$ состоит из этих блоков и двумерной нулевой матрицы, стоящей в верхнем левом углу.

УСЛОВИЕ В.5. Для каждого $x \in M$ выполнено условие $\det \Lambda(x) \neq 0$.

Положим

$$c(x) = |\det \Lambda(x)|^{-1/2}, \quad x \in M. \quad (3.4)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть P_A – гауссовская мера в гильбертовом пространстве H , имеющая нулевое среднее и инъективный ковариационный оператор A . Пусть выполнены условия В.1–В.5. Тогда при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$P_A(uD) = \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{2\pi} \int_M c(x) dV_M(x) (1 + o(1)), \quad (3.5)$$

где $c(x)$ задано в (3.4), dV_M – элемент длины на кривой M .

Утверждение теоремы 3 вытекает непосредственно из теоремы 1 и замечания 1 статьи [8], где рассмотрен общий случай гауссовской меры в банаховом пространстве.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Довольно часто оператор A и множества D и M обладают некоторыми свойствами симметрии (подробное определение имеется в работах [12], [13], см. также статью [14]). В такой ситуации функция $c(x)$ принимает одно и то же значение c для всех точек $x \in M$ и $\int_M c(x) dV_M(x) = c \cdot \text{mes}(M)$, где $\text{mes}(M)$ – длина кривой M . Именно такой случай возникает при доказательстве теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Элементы базиса e_k^x , $k = 2, 3, \dots$, целесообразно выбирать таким образом, чтобы матричное представление оператора $I - \lambda A Q''(x)$ в базисе $\{e_k^x\}_{k=0}^\infty$ имело наиболее простой вид.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В силу масштабного свойства процесса Боголюбова (см. лемму 6 в [6]), для любых значений $p > 0$ и $u > 0$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^\beta |\xi(t)|^p dt > u^p\right\} = \mathbf{P}\left\{\int_0^1 |\eta(s)|^p ds > v^p\right\}, \quad v = \frac{u\sqrt{m}}{\beta^{(2+p)/2p}}, \quad (4.1)$$

где

$$\eta(t) = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\beta}} \xi(\beta t), \quad t \in [0, 1],$$

– гауссовский процесс Боголюбова на отрезке $[0, 1]$ с параметрами $(1, 1, \omega_1)$, $\omega_1 = \beta\omega$. Таким образом, в силу формулы (4.1) нам достаточно доказать вариант теоремы 1 с большим параметром $v \rightarrow \infty$ для процесса Боголюбова $\eta(t)$.

Доказательство теоремы 1 проведем при помощи теоремы 3. Как и в статье [6], возьмем в качестве гильбертова пространства H обычное гильбертово пространство $L^2 \equiv L^2[0, 1]$ действительных измеримых функций на $[0, 1]$, квадрат которых интегрируем, со скалярным произведением и нормой,

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t) dt, \quad \|x\|_2 = \left(\int_0^1 x^2(t) dt\right)^{1/2}, \quad x, y \in L^2[0, 1].$$

Обозначим через μ_η распределение процесса $\eta(t)$ в пространстве $C^0[0, 1]$.

Мы будем рассматривать гауссовскую меру μ_η , полагая ее заданной в пространстве $L^2[0, 1]$, при этом будем иметь в виду, что эта мера сосредоточена на $C^0[0, 1]$. Как известно, в этом случае μ_η имеет нулевое среднее и ковариационный оператор $A_\eta: L^2 \rightarrow L^2$ интегрального типа:

$$A_\eta x(t) = \int_0^1 [\mathbf{E}\eta(t)\eta(s)]x(s) ds = \frac{1}{2\omega_1 \text{sh}(\omega_1/2)} \int_0^1 \text{ch}\left(\omega_1|t-s| - \frac{\omega_1}{2}\right)x(s) ds. \quad (4.2)$$

Пусть $C^2[0, 1]$ – множество дважды дифференцируемых на $[0, 1]$ функций $x(t)$. Как указано в лемме 7 из работы [6], область значений ковариационного оператора A_η имеет вид

$$\text{Ran}(A_\eta) = \{x \in C^2[0, 1]: x(0) = x(1), x'(0) = x'(1)\}. \quad (4.3)$$

Несложно показать, что оператор A_η является инъективным и обратный оператор задается формулой

$$[A_\eta^{-1}y](t) = -y''(t) + \omega_1^2 y(t), \quad y \in \text{Ran}(A_\eta), \quad t \in [0, 1]. \quad (4.4)$$

Учитывая (4.1), возьмем в качестве функционала Q , участвующего в формулировке теоремы 3, следующий функционал:

$$G(x) := \int_0^1 |x(t)|^p dt - 1, \quad x \in L^2, \quad p > 2. \quad (4.5)$$

Очевидно, $\mu_\eta\{x \in L^2: |G(x)| < \infty\} = 1$.

ЛЕММА 4. При $p > 2$ функционал G является выпуклым функционалом, дважды дифференцируемым по Фреше в каждой точке $x \in C^0[0, 1]$, с производными

$$G'(x) = p|x(t)|^{p-1} \text{sgn } x(t), \quad (4.6)$$

$$G''(x) = p(p-1)|x(t)|^{p-2}, \quad (4.7)$$

которые задают ограниченные линейные операторы. При $p > 3$ функционал G трижды дифференцируемым по Фреше в каждой точке $x \in C^0[0, 1]$, третья производная задается формулой

$$G'''(x)[h, g, v] = \int_0^1 p(p-1)(p-2)|x(t)|^{p-3} \text{sgn } x(t)h(t)g(t)v(t) dt, \quad h, g, v \in L^2.$$

Положим

$$D = \{x \in L^2: G(x) \geq 0\}. \quad (4.8)$$

В силу леммы 4 множество $L^2 \setminus D$ является выпуклым при $p > 2$. Очевидно, что множество D из (4.8) имеет непустую внутренность и не содержит нуля. Таким образом, множество (4.8) удовлетворяет условию B.1 с $H = L^2[0, 1]$.

Обратимся к условию B.2, полагая далее, что $p \in \mathcal{P}$. Несложно убедиться, что в силу формул (1.11), (4.3) функция $x_0(t)$, заданная в (1.9), (1.10), удовлетворяет на отрезке $[0, 1]$ периодическим граничным условиям и $x_0(t) \in \text{Ran}(A_\eta)$.

Продолжим периодически функцию $x_0(t)$ на всю ось $\mathbb{R}$, полученную периодическую функцию с периодом единица обозначим через $\hat{x}_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Для числа $0 \leq \kappa \leq 1$ определим функцию

$$x_\kappa(t) := \hat{x}_0(t + \kappa), \quad t \in [0, 1]. \quad (4.9)$$

Очевидно, $x_0(t) \equiv x_1(t)$. Кроме того, в силу определения функции (4.9) и ее периодичности при всех $0 \leq \kappa \leq 1$ имеют место соотношения $x_\kappa(t) \in \text{Ran}(A_\eta)$, $\|x_\kappa\|_p = 1$. Введем множество $\mathcal{M}_0$ функций, заданных на $[0, 1]$, как

$$\mathcal{M}_0 := \{x_\kappa(t): 0 \leq \kappa \leq 1\}. \quad (4.10)$$

Отметим, что в (4.10) элементы x_0 и x_1 отождествлены, следовательно, многообразие $\mathcal{M}_0$ является замкнутой компактной кривой, которая принадлежит множеству $\text{Ran}(A_\eta)$. Зададим также множество, центрально-симметричное множеству $\mathcal{M}_0$:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_0 := -\mathcal{M}_0 = \{-x(t): x(t) \in \mathcal{M}_0\}. \quad (4.11)$$

Напомним, что число $\lambda_0 > 0$ задано в формуле (1.8).

ЛЕММА 5. Пусть фиксировано число $p \in \mathcal{P}$. Тогда минимум в экстремальной задаче

$$\langle x, A_{\eta}^{-1}x \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in D \cap \text{Dom}(A_{\eta}^{-1}),$$

равен $\lambda_0 p$ и достигается на одномерном компактном двусвязном многообразии

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_0 \cup \widetilde{\mathcal{M}}_0 \subset \partial D \cap \text{Ran}(A_{\eta}). \quad (4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится при помощи метода, использованного при доказательстве леммы 10 в [6], с учетом п. 2 леммы 1 и замечания 1 из раздела 1.

Охарактеризуем более точно замкнутые многообразия (4.10), (4.11), заданные для значений $p \in \mathcal{P}$. Напомним, что по определению все функции, принадлежащие множеству $\mathcal{M}_0$, являются строго положительными.

ЛЕММА 6. 1. Имеют место равенства

$$\text{mes}(\mathcal{M}_0) = \text{mes}(\widetilde{\mathcal{M}}_0) = \|x'_0\|_2, \quad (4.13)$$

где $\text{mes}(\mathcal{M}_0)$ – лебегова длина замкнутой компактной кривой $\mathcal{M}_0$.

2. Для любого $\kappa \in [0, 1]$ справедливы следующие равенства для норм функций из многообразия $\mathcal{M}_0$ и их производных:

$$\|x_{\kappa}\|_2 = \|x_0\|_2, \quad \|x'_{\kappa}\|_2 = \|x'_0\|_2.$$

3. Основная экстремаль $x_0(t)$ не обладает симметрией на отрезке $[0, 1/2]$ относительно точки $t = 1/4$, т. е. нельзя утверждать, что

$$x_0(t) = h_0 + b_0 - x_0\left(\frac{1}{2} - t\right) \quad \text{для всех } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

4. Многообразие $\mathcal{M}_0$, заданное в (4.10) и рассматриваемое в гильбертовом пространстве L^2 , представляет собой дважды дифференцируемую замкнутую компактную одномерную кривую, лежащую на пересечении конуса положительных функций $\mathcal{K}$ и сферы радиуса $\|x_0\|_2$ в L^2 . Кривая $\mathcal{M}_0$ не является окружностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает непосредственно из утверждений работы [6] с учетом п. 2 леммы 1 из раздела 1 настоящей статьи (см., в частности, формулу (5.26) в работе [6]).

В силу лемм 5, 6 для гауссовской меры μ_{η} и множества D из (4.8) при $p \in \mathcal{P}$ выполнено условие B.2 с многообразием $\mathcal{M}$, заданным в (4.12), и $\sigma^{-2} = \lambda_0 p$. Учитывая лемму 4 и предложение 1, доказанное ниже, несложно показать, что для выпуклого функционала G из (4.5) и многообразия $\mathcal{M}$ из (4.12) выполнено условие B.3 с $\lambda = \lambda_0$.

Покажем, что для гладкого многообразия $\mathcal{M}$ выполнено условие B.4. Согласно своему определению (см. [10], гл. 3, §3, п. 2) касательный вектор к кривой (4.10) в точке x_0 имеет вид $\frac{dx_{\kappa}}{d\kappa}\big|_{\kappa=0}$. Используя тот факт, что κ в формулах (4.9), (4.10) является параметром сдвига, находим $\frac{dx_{\kappa}}{d\kappa}\big|_{\kappa=0} = x'_0(t)$, $t \in [0, 1]$. Таким образом, единичный касательный вектор к кривой (4.10) в точке x_0 имеет вид (ср. с (1.12))

$$n_{x_0}(t) \equiv n_0(t) = \frac{x'_0(t)}{\|x'_0\|_2}, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.14)$$

Отсюда получаем

$$\langle x_0, n_0 \rangle = \frac{1}{\|x'_0\|_2} \int_0^1 x_0(t) x'_0(t) dt = \frac{1}{2\|x'_0\|_2} \int_0^1 dx_0^2(t) = 0,$$

так как $x_0(0) = x_0(1)$ согласно (1.10). Аналогично доказывается равенство (3.1) для всех $x \in \mathcal{M}_0$ и всех $x \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Итак, для многообразия $\mathcal{M}$ выполнено условие B.4.

Отметим также, что в силу формул (1.10), (1.11) выполнены равенства

$$x'_0(0) = x'_0(1) = 0, \quad x''_0(0) = x''_0(1). \quad (4.15)$$

Из этих равенств и из соотношений (1.12), (4.3), (4.13) следует, что $x'_0 \in \text{Ran}(A_\eta)$ и $n_0 \equiv f_1 \in \text{Ran}(A_\eta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. В силу леммы 4 оператор $G''(x_0): L^2 \rightarrow L^2$ является ограниченным; напомним, что ковариационный оператор $A_\eta: L^2 \rightarrow L^2$ является ядерным. Поскольку множество ядерных операторов, действующих на всем классе банаховых пространств, является операторным идеалом [15], результирующей оператор $A_\eta G''(x_0)$ представляет собой ядерный оператор.

В силу соотношений (4.3), (4.4) задача на собственные числа

$$A_\eta G''(x_0)z = \mu z, \quad z \in \text{Ran}(A_\eta) \subset L^2, \quad (4.16)$$

эквивалентна самосопряженной граничной задаче (1.13) на собственные числа. Из формулы (1.13) вытекают следующие соотношения для L^2 -нормированных собственных функций $z(t)$:

$$\frac{p(p-1)}{\mu} \int_0^1 x_0^{p-2}(t) z^2(t) dt = - \int_0^1 z''(t) z(t) dt + \beta^2 \omega^2 \int_0^1 z^2(t) dt > 0, \quad (4.17)$$

так как в силу граничных условий задачи (1.13)

$$- \int_0^1 z''(t) z(t) dt = - \int_0^1 z(t) dz'(t) = \int_0^1 [z'(t)]^2 dt \geq 0.$$

В нашем случае $p > p_0 > 2$ и $x_0(t) > 0$ при $t \in [0, 1]$, кроме того $\int_0^1 x_0^{p-2}(t) z^2(t) dt > 0$ при $z \neq 0$, тогда из формулы (4.17) вытекает, что $A_\eta G''(x_0)$ является положительным ядерным оператором и имеет последовательность положительных собственных чисел $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ такую, что $\sum_{n=0}^\infty \mu_n < \infty$. Этой последовательности собственных чисел соответствует система L^2 -нормированных собственных функций $\{f_k(t)\}_{k=0}^\infty$, которая образует ортонормированный базис в L^2 . Докажем, что f_0 и f_1 имеют вид (1.12).

Согласно формуле (1.11) для минимизирующей функции $x_0(t)$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x''_0(t) &= \beta^2 \omega^2 x_0(t) - \lambda_0 p x_0^{p-1}(t), & t \in [0, 1], \\ x_0(0) &= x_0(1), & x'_0(0) = x'_0(1) = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Используя формулу (4.18), несложно убедиться, что $\mu_0 = (p-1)/\lambda_0$ является собственным числом задачи (1.13) с соответствующей L^2 -нормированной положительной собственной функцией $f_0(t)$, которая задана в (1.12). Дифференцируя почленно

уравнение из формулы (4.18) и учитывая (4.15), несложно показать, что $\mu_1 = 1/\lambda_0$ является собственным числом задачи (1.13) с соответствующей L^2 -нормированной собственной функцией $f_1(t)$, которая также задана в (1.12). В силу осцилляционной теоремы Камке (см. монографии [16], ч. I, п. 9.2, и [17], гл. 8, теорема 3.1)

$$\mu_0 = \frac{p-1}{\lambda_0} > \mu_1 = \frac{1}{\lambda_0} \geq \mu_2 > \mu_3 \geq \mu_4 > \dots > 0. \quad (4.19)$$

Покажем, что в (4.19) выполнено строгое неравенство $\mu_1 > \mu_2$ и, следовательно, справедлива формула (1.14). Предположим противное, а именно, что

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{\lambda_0}. \quad (4.20)$$

Отсюда следует, что ортогональные собственные функции $f_1(t) = x'_0(t)/\|x'_0\|_2$ и $f_2(t)$ удовлетворяют одной и той же граничной задаче

$$\begin{aligned} -z''(t) + \beta^2 \omega^2 z(t) &= \lambda_0 p(p-1) x_0^{p-2}(t) z(t), & t \in [0, 1], \\ z(0) &= z(1), & z'(0) = z'(1). \end{aligned} \quad (4.21)$$

При этом выполнено соотношение ортогональности $\langle f_0, f_2 \rangle = 0$, т. е.

$$\langle x_0, f_2 \rangle = 0. \quad (4.22)$$

Докажем, что выполнено также соотношение

$$\langle x''_0, f_2 \rangle = 0. \quad (4.23)$$

В самом деле, полагая в (4.21) $z(t) = f_2(t)$, получаем с учетом (4.22) равенство

$$-\langle f''_2, x_0 \rangle = \lambda_0 p(p-1) \int_0^1 x_0^{p-1}(t) f_2(t) dt. \quad (4.24)$$

С другой стороны, в силу формул (4.18), (4.22) справедливо равенство

$$-\langle x''_0, f_2 \rangle = \lambda_0 p \int_0^1 x_0^{p-1}(t) f_2(t) dt. \quad (4.25)$$

Интегрируя по частям и используя периодические граничные условия из формул (4.18), (4.21), получаем, что

$$\langle f''_2, x_0 \rangle = \langle x''_0, f_2 \rangle. \quad (4.26)$$

Из формул (4.24)–(4.26) вытекает соотношение (4.23). Рассуждая так же, как при выводе формулы (4.26), несложно показать, что с учетом (4.23) справедливы равенства

$$\int_0^1 x'_0(t) f'_2(t) dt = - \int_0^1 x''_0(t) f_2(t) dt = 0. \quad (4.27)$$

Далее, две линейно независимые функции $x'_0(t)$ и $f_2(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению из формулы (4.21). Как известно (см., например, книгу [18], гл. 5, § 1), для вронскиана этой пары выполнены соотношения

$$\mathcal{W}(x'_0, f_2) := x'_0(t) f'_2(t) - x''_0(t) f_2(t) = C, \quad t \in [0, 1], \quad (4.28)$$

где C – некоторая ненулевая постоянная. Интегрируя почленно последнее равенство в (4.28) и используя (4.27), получаем соотношение $C = 0$. Полученное противоречие показывает, что предположение (4.20) неверно и выполнено неравенство $\mu_1 > \mu_2$. Таким образом, с учетом эквивалентности задач (1.13) и (4.16) мы доказали все утверждения предложения 1.

Итак, для значений $p \in \mathcal{P}$ мы применяем к гауссовскому процессу $\eta(t)$, $t \in [0, 1]$, теорему 3, где нужно положить

$$H = L^2[0, 1], \quad Q(x) = \int_0^1 |x(t)|^p dt - 1, \quad x \in L^2, \quad (4.29)$$

$$A = A_\eta, \quad P_A = P_{A_\eta} = \mu_\eta, \quad M = \mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \cup \widetilde{\mathcal{M}}_0, \quad \sigma^{-2} = \lambda_0 p.$$

Обратимся к последнему условию B.5. Учитывая свойство периодичности в определении многообразий $\mathcal{M}_0$, $\widetilde{\mathcal{M}}_0$, лемму 6 и формулы (3.3), (3.4), можно показать, что в условиях теоремы 1 выполнены равенства

$$c(x) = c(x_0) = |\det \Lambda(x_0)|^{-1/2}, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (4.30)$$

Вычислим $|\det \Lambda(x_0)|$. Используя предложение 1, для точки $x_0 \in \mathcal{M}$ возьмем в качестве ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=0}^\infty$ в L^2 систему функций $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ из предложения 1, при этом в соответствии с (3.2) положим

$$e_0 = f_1 = n_0 = \frac{x'_0}{\|x'_0\|_2}, \quad e_1 = f_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|_2}, \quad e_k = f_k, \quad k = 2, 3, \dots \quad (4.31)$$

Обозначим координаты векторов $A_\eta n_0$, $A_\eta^{-1} x_0$ в базисе $\{e_k\}_{k=0}^\infty$ следующим образом:

$$a_k := \langle A_\eta n_0, e_k \rangle, \quad b_k := \langle A_\eta^{-1} x_0, e_k \rangle, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

Тогда матрица $\Lambda(x_0)$ из формулы (3.3) имеет следующий вид

$$\Lambda(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & \|x_0\|_2 & 0 & 2-p & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda_0 \mu_2 & 0 & \dots \\ a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda_0 \mu_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Разлагая определитель k -мерной матрицы, аппроксимирующей матрицу (4.33), сначала по второй строке и второму столбцу, затем опять по второй строке и второму столбцу, получаем в результате диагональную матрицу, определитель которой легко считается. Таким образом,

$$|\det \Lambda(x_0)| = a_0 b_1 \|x_0\|_2 \prod_{k=2}^{\infty} (1 - \lambda_0 \mu_k). \quad (4.34)$$

Согласно равенствам (4.31), (4.32), (4.34) и лемме 5 справедливы соотношения

$$\begin{aligned} a_0 &= \langle A_\eta n_0, n_0 \rangle, \quad b_1 = \frac{\langle A_\eta^{-1} x_0, x_0 \rangle}{\|x_0\|_2} = \frac{\lambda_0 p}{\|x_0\|_2}, \\ |\det \Lambda(x_0)| &= \lambda_0 p \langle A_\eta n_0, n_0 \rangle \prod_{k=2}^{\infty} (1 - \lambda_0 \mu_k). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Учитывая формулы (4.13), (4.30), (4.35), получаем равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} c(x) dV_{\mathcal{M}}(x) &= \frac{c(x_0)}{\pi} \text{mes}(\mathcal{M}_0) = \\ &= \frac{\|x'_0\|_2}{\pi \sqrt{\lambda_0 p \langle A_\eta n_0, n_0 \rangle}} \left[\prod_{k=2}^{\infty} (1 - \lambda_0 \mu_k) \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Далее, в силу формулы (4.2) выполнено равенство

$$\langle A_\eta n_0, n_0 \rangle = \frac{1}{2\beta\omega \operatorname{sh}(\beta\omega/2) \|x'_0\|_2^2} \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{ch} \left(\beta\omega |t-s| - \frac{\beta\omega}{2} \right) x'_0(t) x'_0(s) dt ds. \quad (4.37)$$

Из формул (4.36), (4.37) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} c(x) dV_{\mathcal{M}}(x) = c_1, \quad (4.38)$$

где постоянная c_1 задана в (1.16), (1.17). Теперь, учитывая формулы (3.5), (4.29), (4.38), мы убеждаемся, что при $v \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P} \left\{ \int_0^1 |\eta(s)|^p ds > v^p \right\} = \exp \left\{ -\frac{\lambda_0 p}{2} v^2 \right\} c_1 (1 + o(1)). \quad (4.39)$$

Из формул (4.1), (4.39) вытекает соотношение (1.15) теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Благодарности. Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

- [1] Д. П. Санкович, “Гауссовы функциональные интегралы и гиббсовские равновесные средние”, *ТМФ*, **119**:2 (1999), 345–352.
- [2] Д. П. Санкович, “О некоторых свойствах функциональных интегралов по мере Боголюбова”, *ТМФ*, **126**:1 (2001), 149–163.
- [3] Д. П. Санкович, “Метрические свойства боголюбовских траекторий в теории статистического равновесия”, *ТМФ*, **127**:1 (2001), 125–142.
- [4] Н. Н. Боголюбов, “О представлении функций Грина–Швингера при помощи функциональных интегралов”, *Докл. АН СССР*, **99**:2 (1954), 225–226; *Собрание научных трудов в 12 томах*, т. 9: *Квантовая теория поля*, Наука, М., 2007, 245–247.
- [5] Г. Крамер, М. Лидбеттер, *Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения*, Мир, М., 1969.
- [6] В. Р. Фаталов, “Точные асимптотики типа Лапласа для гауссовской меры Боголюбова”, *ТМФ*, **168**:2 (2011), 299–340.

- [7] В. Р. Фаталов, “Ряды теории возмущения в квантовой механике: фазовые переходы и точные асимптотики для коэффициентов разложения”, *ТМФ*, **174**:3 (2013), 416–443.
- [8] В. Р. Фаталов, “О методе Лапласа для гауссовских мер в банаховом пространстве”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **58**:2 (2013), 325–354.
- [9] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979.
- [10] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, Из-во Моск. ун-та, М., 1980.
- [11] С. Г. Крейн (ред.), *Функциональный анализ*, Наука, М., 1972.
- [12] R. S. Ellis, J. S. Rosen, “Asymptotic analysis of Gaussian integrals I: Isolated minimum points”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273**:2 (1982), 447–481.
- [13] R. S. Ellis, J. S. Rosen, “Asymptotic analysis of Gaussian integrals II: Manifold of minimum points”, *Commun. Math. Phys.*, **82**:2 (1981), 153–181.
- [14] В. И. Питербарг, В. Р. Фаталов, “Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах”, *УМН*, **50**:6(306) (1995), 57–150.
- [15] А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М., 1982.
- [16] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Физматгиз, М., 1965.
- [17] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2007.
- [18] Ф. Олвер, *Асимптотики и специальные функции*, Наука, М., 1990.

Поступила в редакцию 9.02.2016,
после доработки 29.04.2016