Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Катанаев, Космологические модели с однородными и изотропными пространственными сечениями, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 2, 219–227

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:46:56

© 2017 г.

М. О. Катанаев^{*†}

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С ОДНОРОДНЫМИ И ИЗОТРОПНЫМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ СЕЧЕНИЯМИ

В основе большинства современных космологических моделей лежит предположение об однородности и изотропности Вселенной. Приведен пример метрики, все пространственные сечения которой соответствуют пространствам постоянной кривизны, но тем не менее пространство-время в целом не является однородным и изотропным. Дано эквивалентное определение однородной и изотропной Вселенной в геометрических терминах вложенных многообразий.

Ключевые слова: однородная и изотропная Вселенная, космология.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9181>

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть в пространстве-времени $(\mathbb{M}, g)$, где $\mathbb{M}$ – четырехмерное многообразие и g – метрика с лоренцевой сигнатурой, $\text{sign } g = (+ - - -)$, задана система координат x^α , $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Мы предполагаем, что нулевая координатная линия времениподобна: $(\partial_0, \partial_0) = g_{00} > 0$, где скобки обозначают скалярное произведение. Координата $x^0 := t$ называется временем (здесь и в дальнейшем знак $:=$ обозначает “равно по определению”). Пространственные индексы будем обозначать греческими буквами из середины алфавита: $\mu, \nu, \dots = 1, 2, 3$. Тогда $\{x^\alpha\} = \{x^0, x^\mu\}$.

Современные данные наблюдений свидетельствуют о том, что наша Вселенная является однородной и изотропной (космологический принцип) по крайней мере в первом приближении. Недавнее обсуждение космологического принципа с экспериментальной и теоретической точек зрения содержится в обзоре [1]. Там же рассматривается возможность нарушения этого принципа.

Большинство космологических моделей основано на следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть четырехмерное пространство-время представляет собой топологическое произведение $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$, где $t \in \mathbb{R}$ – временная координата и $x \in \mathbb{S}$,

^{*}Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: katanaev@mi.ras.ru

[†]Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

$\mathbb{S}$ – трехмерное пространство постоянной кривизны. Предположим, что на $\mathbb{M}$ задана достаточно гладкая метрика с лоренцевой сигнатурой. Тогда если пространство-время однородно и изотропно, то в окрестности каждой точки существует система координат t, x^μ , в которой метрика имеет вид

$$ds^2 = dt^2 + a^2 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1)$$

где $a(t) > 0$ – произвольная функция времени (масштабный множитель) и $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x)$ – отрицательно определенная метрика пространства постоянной кривизны $\mathbb{S}$, зависящая только от пространственных координат $x \in \mathbb{S}$.

Определение однородной и изотропной Вселенной, а также доказательство теоремы 1.1 содержится в книге [2].

Таким образом, наиболее общая метрика однородной и изотропной Вселенной имеет вид (1) с точностью до преобразования координат. Эта теорема не чувствительна к размерности многообразия $\mathbb{M}$ и сигнатуре метрики g . Первое условие теоремы можно заменить на следующее предположение: каждое сечение пространства-времени $\mathbb{M}$, соответствующее постоянному времени $t \in \mathbb{R}$, есть пространство постоянной кривизны.

Теорема 1.1 представляет собой базис релятивистской космологии и поэтому очень важна. В качестве работ, на которые ссылаются в связи с метрикой (1), отметим статьи [1]–[11]. Прокомментируем их в той части, которая относится к виду метрики.

Фридман первым рассмотрел метрику (1) при построении космологических моделей в рамках общей теории относительности [3], [4]. Он не писал об однородной и изотропной Вселенной, а просто потребовал, чтобы все пространственные сечения, соответствующие постоянному времени, являлись пространствами постоянной кривизны, и предположил, что метрика имеет вид (1). Фридман рассмотрел пространственные сечения положительной и отрицательной кривизны соответственно в статьях [3] и [4].

Аббат Леметр проанализировал решения уравнений Эйнштейна, описывающие замкнутую Вселенную [5]. Он не сформулировал утверждение теоремы 1.1. В статье [6] был рассмотрен более широкий класс космологических моделей также без формулировки теоремы.

Робертсон сформулировал теорему в обеих статьях [7], [8], но не доказал ее. Вместо этого он сослался на статьи [12] и [13]. Доказательство теоремы состоит из двух частей. Первая часть в общем случае была доказана Гильбертом [12]. Вторая часть была доказана Фубини [13] (см. также монографию [14], глава VI, упражнение 3) в одну сторону. А именно, он доказал, что метрика (1) однородна и изотропна, но обратное утверждение о том, что любая однородная и изотропная метрика имеет такой вид, доказано не было. В статье [9] Робертсон получил метрику (1) из других соображений путем рассмотрения системы наблюдателей с некоторыми свойствами. Метрика при этом была однородна и изотропна по построению. Однако Робертсон сделал предположение (перед уравнением (2.1) в статье [9]), что пространственная часть метрики описывает пространства постоянной кривизны, которая может принимать только дискретные значения $\pm 1, 0$, и поэтому утверждение о том, что метрика (1) представляет собой наиболее общий вид метрики, не было доказано. Метрика (5), которая приведена в настоящей статье, подходит под конструкцию, но не имеет вида (1).

Толман получил линейный элемент (1) из других предположений [10], [11], [15]. В частности, он предположил наличие сферической симметрии, а также тот факт, что временные координатные линии являются геодезическими, и потребовал выполнения уравнений Эйнштейна. В указанных статьях однородность и изотропность Вселенной не обсуждалась.

В статье [16] (см. раздел 10) Волкер доказал теорему 1.1 в одну сторону, показав, что метрика (1) однородна и изотропна, но не привел доказательства того, что любая однородная и изотропная метрика имеет такой вид. Действительно, метрика (5), которая приведена ниже, удовлетворяет уравнению (52) из статьи [16], но не имеет вида (1).

На первый взгляд, если все пространственные сечения пространства-времени являются пространствами постоянной кривизны, т. е. однородны и изотропны, то Вселенная в целом является однородной и изотропной. Однако это не так [17]. Ниже мы приведем пример пространства-времени, все пространственные сечения которого являются пространствами постоянной кривизны, но Вселенная в целом не является однородной и изотропной.

2. КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МЕТРИКА С ОДНОРОДНЫМИ И ИЗОТРОПНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ

Явный вид метрики Фридмана (1) для однородной и изотропной Вселенной зависит от координат, которые выбираются на пространстве постоянной кривизны. В стереографических координатах метрика Фридмана диагональна:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 \eta_{\mu\nu}}{(1 + b_0 x^2)^2} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $b_0 = -1, 0, 1$, $\eta_{\mu\nu} := \text{diag}(- - -)$ – отрицательно определенная евклидова метрика и $x^2 := \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \leq 0$. Поскольку выбрана метрика, отрицательно определенная на пространственных сечениях, значения $b_0 = -1, 0, 1$ отвечают пространствам постоянной положительной, нулевой и отрицательной кривизны соответственно. Для положительной и нулевой кривизны стереографические координаты определены на всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Для пространств отрицательной кривизны стереографические координаты определены внутри шара $|x^2| < 1/b_0$.

Совершим преобразование координат $x^\mu \mapsto x^\mu/a$. Тогда метрика становится недиагональной и конформный множитель исчезает:

$$g = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\dot{b}^2 x^2}{4b^2(1 + bx^2)^2} & \frac{\dot{b}x_\nu}{2b(1 + bx^2)^2} \\ \frac{\dot{b}x_\mu}{2b(1 + bx^2)^2} & \frac{\eta_{\mu\nu}}{(1 + bx^2)^2} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$b(t) := \frac{b_0}{a^2(t)} \quad (4)$$

и точка обозначает производную по времени.

Мы видим, что метрика однородной и изотропной Вселенной может быть недиагональна и может не содержать конформного множителя. Кроме того, скалярная кривизна пространственных сечений, которая пропорциональна $b(t)$, явно зависит от времени.

Теперь просто отбросим недиагональные члены, положим $g_{00} = 1$ и добавим масштабный множитель. Тогда метрика примет вид

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 \eta_{\mu\nu}}{(1 + bx^2)^2} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Эта метрика содержит две независимые произвольные функции времени: $a(t) > 0$ и $b(t)$. Она невырождена для всех значений b включая $b = 0$. Все сечения $t = \text{const}$ соответствующего пространства-времени, очевидно, являются пространствами постоянной кривизны и, следовательно, однородны и изотропны. Данная метрика представляет интерес, так как в общем случае позволяет анализировать решения, которые проходят через $b = 0$. Если такие решения существуют, то пространственные сечения в процессе эволюции меняют кривизну с положительной на отрицательную и наоборот.

От произвольной функции $b(t)$ нельзя избавиться путем преобразования координат без появления недиагональных членов.

Возникает интересная ситуация. С одной стороны, все пространственные сечения метрики (5) являются однородными и изотропными. С другой стороны, любая однородная и изотропная метрика должна иметь вид (1). Ответ на вопрос о том, как согласуются эти два утверждения, следующий: метрика (5) в целом не является однородной изотропной. Действительно, каждое сечение $t = \text{const}$ пространства-времени $\mathbb{M}$ является пространством постоянной кривизны, и пространственные (μ, ν) -компоненты уравнений Киллинга

$$\nabla_\alpha K_\beta + \nabla_\beta K_\alpha = 0 \quad (6)$$

удовлетворяются, однако смешанные $(0, \mu)$ -компоненты – нет. Шесть независимых векторов Киллинга пространственных сечений в стереографических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{K}_{0\mu} &= (1 + bx^2)\partial_\mu - \frac{2}{b}x_\mu x^\nu \partial_\nu, \\ \hat{K}_{\mu\nu} &= x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu, \end{aligned} \quad (7)$$

где индексы $\mu, \nu = 1, 2, 3$ нумеруют векторные поля Киллинга. Первые три вектора Киллинга генерируют трансляции в начале системы координат, а последние три вектора Киллинга – вращения. Мы видим, что первые три векторных поля Киллинга явно зависят от времени через функцию $b(t)$, и легко проверить, что смешанные $(0, \mu)$ -компоненты уравнений Киллинга (6) не выполняются.

Существует другой способ увидеть, что метрика (5) не является однородной и изотропной. Прямые вычисления дают следующее выражение для скалярной кривизны:

$$R = -\frac{24b}{a^2} + 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{1 + bx^2} \left(4 \frac{\dot{a}\dot{b}x^2}{a} + \ddot{b}x^2 \right) + 3 \frac{\dot{b}^2 x^4}{(1 + bx^2)^2} \right].$$

Она явно зависит от x и, следовательно, не является однородной и изотропной.

Этот пример показывает, что условие однородности и изотропности пространственных сечений не является достаточным для однородности и изотропности полной четырехмерной метрики. Эквивалентное определение следующее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство-время называется *однородным и изотропным*, если:

- 1) все сечения постоянного времени, $t = \text{const}$, являются пространствами постоянной кривизны $\mathbb{S}$;
- 2) внешняя кривизна гиперповерхностей $\mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{M}$ однородна и изотропна.

За определением внешней кривизны вложенных гиперповерхностей отсылаем читателя, например, к [18], [19]. В наших обозначениях внешняя кривизна $K_{\mu\nu}$ для блочно-диагональной метрики

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (8)$$

пропорциональна производной по времени от пространственной части метрики:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\dot{h}_{\mu\nu}. \quad (9)$$

Последнее определение однородного и изотропного пространства-времени эквивалентно определению, данному в монографии [2]. Действительно, первое требование означает, что пространство-время представляет собой топологическое произведение $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$. После этого метрику можно привести к блочно-диагональному виду (8). Затем второе условие определения означает, что производная по времени от пространственной части метрики должна быть пропорциональна самой метрике [2], т. е. выполнено уравнение

$$\dot{h}_{\mu\nu} = f h_{\mu\nu}, \quad (10)$$

где $f(t)$ – произвольная достаточно гладкая функция времени.

Если $f = 0$, то доказывать нечего, и метрика уже имеет вид (1) для $a = \text{const}$.

Пусть $f \neq 0$. Тогда введем новую временную координату $t \mapsto t'$, определенную дифференциальным уравнением

$$dt' = f(t) dt.$$

После этого уравнение (10) приобретает вид

$$\frac{dh_{\mu\nu}}{dt'} = h_{\mu\nu}.$$

Его общим решением является

$$h_{\mu\nu}(t', x) = C e^{t'} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x), \quad C = \text{const} \neq 0,$$

где $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x)$ – метрика постоянной кривизны на $\mathbb{S}$, которая не зависит от времени. Отсюда следует представление (1).

Отметим, что второе условие в определении однородной и изотропной Вселенной является необходимым, так как метрика (5) дает контрпример.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Несмотря на то что (5) не является метрикой однородной и изотропной Вселенной, имеет смысл рассмотреть возможности построения космологических моделей с такой метрикой, особенно в связи с вопросом о том, допускают ли уравнения Эйнштейна решения, описывающие изменение топологии пространства с течением времени.

В пространстве-времени с метрикой (5) имеется сферическая $\mathbb{SO}(3)$ -симметрия относительно выделенного начала координат $x^\mu = 0$. Прямые вычисления дают следующие выражения для символов Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\mu}{}^\nu &= \Gamma_{\mu 0}{}^\nu = -K_\mu{}^\nu, & \Gamma_{\mu\nu}{}^0 &= K_{\mu\nu}, \\ \Gamma_{\mu\nu}{}^\rho &= -\frac{2b}{(1+bx^2)}(x_\mu\delta_\nu^\rho + x_\nu\delta_\mu^\rho - x^\rho\eta_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (11)$$

где мы выписали только отличные от нуля компоненты. Внешняя кривизна (9) имеет вид

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= \left[-\frac{a\dot{a}}{(1+bx^2)^2} + \frac{a^2\dot{b}x^2}{(1+bx^2)^3} \right] \eta_{\mu\nu}, \\ K_\mu{}^\nu &:= g^{\nu\rho}K_{\mu\rho}, & g^{\mu\nu} &= \frac{(1+bx^2)^2}{a^2}\eta^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Все компоненты тензора Эйнштейна $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ отличны от нуля:

$$\begin{aligned} G_0{}^0 &= \frac{12b}{a^2} - 3\left[\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}x^2}{1+bx^2} \right]^2, & G_0{}^\mu &= -\frac{4\dot{b}x^\mu}{a^2}, \\ G_\mu{}^\nu &= \left[\frac{4b}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{6\dot{a}\dot{b}x^2}{a(1+bx^2)} + \frac{2\ddot{b}x^2}{1+bx^2} - \frac{5\dot{b}^2x^4}{(1+bx^2)^2} \right] \delta_\mu^\nu. \end{aligned} \quad (12)$$

Эти компоненты при $\dot{b} = 0$ равны компонентам тензора Эйнштейна для Вселенной Фридмана.

В качестве материи выберем скалярное поле $\varphi(t, x^2)$ и непрерывную среду с плотностью энергии $\mathcal{E}(t, x^2)$, давлением $\mathcal{P}(t, x^2)$ и скоростью $u = \{u^0, u^\mu\}$, $u^2 = 1$. Тогда тензор энергии-импульса материи состоит из двух частей:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= T_{1\alpha\beta} + T_{2\alpha\beta}, \\ T_{1\alpha\beta} &= \epsilon \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - g_{\alpha\beta} \left(\frac{\epsilon}{2} \partial \varphi^2 - V(\varphi) \right), & T_{2\alpha\beta} &= (\mathcal{E} + \mathcal{P})u_\alpha u_\beta - \mathcal{P}g_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

где $\partial \varphi^2 := g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi$ и $V(\varphi)$ – потенциал скалярного поля, включающий массовый член. Постоянная ϵ принимает два значения: $\epsilon = 1$ соответствует положительно определенному кинетическому слагаемому в гамильтониане, а $\epsilon = -1$ отвечает отрицательно определенному (госту). Мы предполагаем, что распределение материи вращательно-симметрично, т. е.

$$u^0 = u^0(t, x^2), \quad u^\mu = v \frac{(1+bx^2)^2}{a^2} x^\mu,$$

где $v(t, x^2)$ – некоторая функция от времени и квадрата радиуса x^2 . Кроме того, скалярное поле должно удовлетворять волновому уравнению

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\varphi + V(\varphi) = 0, \quad (13)$$

а тензор энергии-импульса сплошной среды – ковариантному закону сохранения и уравнению состояния:

$$\nabla_\beta T_{2\alpha}{}^\beta = 0, \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{E}). \quad (14)$$

Таким образом, полная система уравнений состоит из уравнений Эйнштейна, которые в наших обозначениях имеют вид

$$G_\alpha{}^\beta = -\frac{1}{2}T_\alpha{}^\beta, \quad (15)$$

а также уравнений (13) и (14) на неизвестные функции $a(t)$, $b(t)$, $\varphi(t, x^2)$, $\mathcal{E}(t, x^2)$, $\mathcal{P}(t, x^2)$ и $v(t, x^2)$. Конечно, первое из уравнений (14) является условием самосогласованности уравнений Эйнштейна (15). Полученная система уравнений сложна, и ее решения с $\dot{b} \neq 0$ в настоящее время неизвестны. При

$$\dot{b} = 0, \quad \varphi = \varphi(t), \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}(t), \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}(t), \quad v = 0$$

она переходит в уравнения Фридмана.

Из условия $u^2 = 1$ находится временная компонента скорости

$$u^0 = u_0 = \sqrt{1 - v^2 \frac{(1 + bx^2)^2}{a^2} x^2},$$

где выбрано решение с $u^0 > 0$ (линии тока сплошной среды направлены в будущее).

Для метрики (5) компоненты тензора энергии-импульса имеют вид

$$T_0{}^0 = \epsilon\dot{\varphi}^2 - \left(\frac{\epsilon}{2}\partial\varphi^2 - V\right) + (\mathcal{E} + \mathcal{P})u_0^2 - \mathcal{P}, \quad (16)$$

$$T_0{}^\mu = [2\epsilon\dot{\varphi}\varphi' + (\mathcal{E} + \mathcal{P})u_0v] \frac{(1 + bx^2)^2}{a^2} x^\mu, \quad (17)$$

$$T_\mu{}^\nu = [4\epsilon\varphi'^2 + (\mathcal{E} + \mathcal{P})v^2] \frac{(1 + bx^2)^2}{a^2} x_\mu x^\nu - \left[\frac{\epsilon}{2}\partial\varphi^2 - V + \mathcal{P}\right] \delta_\mu^\nu, \quad (18)$$

где штрих обозначает дифференцирование по x^2 .

В левой пространственной части уравнений (15) стоит тензор Эйнштейна (12), который пропорционален символу Кронекера. Правая часть уравнений (18) содержит две тензорные структуры: $x_\mu x^\nu$ и δ_μ^ν . Поэтому их необходимо приравнять к нулю по отдельности. Уравнение при $x_\mu x^\nu$ содержит ограничение на возможные поля материи:

$$4\epsilon(\varphi')^2 + (\mathcal{E} + \mathcal{P})v^2 = 0. \quad (19)$$

Для обычной материи это равенство не может быть выполнено, так как оба слагаемых неотрицательны. Поэтому нужно предположить, например, что выполнено неравенство $\mathcal{E} + \mathcal{P} < 0$ (нарушение изотропного условия энергодоминантности в моделях Вселенной Фридмана) или кинетический член скалярного поля имеет

не тот знак (гост, $\epsilon = -1$). Модели, в которых изотропное условие энергодоминантности нарушается, в последние годы привлекают значительный интерес. Их недостатки и достоинства рассмотрены, например, в статьях [20], [21]. Мы видим, что для выполнения равенства (19) одного вида материи недостаточно. Именно по этой причине мы выбрали два вида материи, чтобы они компенсировали друг друга в уравнениях Эйнштейна.

Уравнение со смешанными компонентами с учетом равенства (19) принимает вид

$$\frac{4\dot{b}}{a^2} = \epsilon\varphi' \left[\dot{\varphi} - 2\varphi' \frac{u_0}{v} \right] \frac{(1 + bx^2)^2}{a^2}. \quad (20)$$

Заметим, что уравнение (19) решается для космологической постоянной Λ , если ее рассматривать в качестве материи. В этом случае $\mathcal{E} = -\mathcal{P} = \Lambda$, и скалярное поле не зависит от x^2 . Тогда из уравнения (20) вытекает равенство $b = \text{const}$, т. е. мы получаем уравнения Фридмана.

Уравнение для скалярного поля (13) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} - 3\frac{\dot{b}x^2}{1 + bx^2}\dot{\varphi} + \frac{(1 + bx^2)^2}{a^2}\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}^2\varphi - 2\frac{1 + bx^2}{a^2}bx^\mu\partial_\mu\varphi + V(\varphi) = 0.$$

В целом полученные уравнения сложны, и мы оставим их решение для будущего исследования.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье построен пример пространства-времени, все пространственные сечения которого являются пространствами постоянной кривизны, но метрика в целом не является однородной и изотропной. Дано определение однородной и изотропной Вселенной в терминах вложения многообразий.

Для ответа на вопрос о том, насколько современные данные наблюдений свидетельствуют об однородности и изотропности внешней кривизны вложения $\mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{M}$, требуется отдельное исследование.

Настоящая статья является продолжением работы, начатой в [17]. Получена полная система уравнений для модели Вселенной с однородными и изотропными пространственными сечениями. Эта система уравнений обобщает систему уравнений Фридмана. Показано, что для непротиворечивости системы уравнений необходимо по крайней мере два вида материи. Эта система уравнений сложна и требует дальнейшего исследования.

Методы и подходы, использованные в статье, рассматривались в статьях [22]–[26].

Список литературы

- [1] C. Clarkson, “Establishing homogeneity of the universe in the shadow of dark energy”, *Compt. Rendus Phys.*, **13**:6 (2012), 682–718, arXiv: 1204.5505.
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, New York, 1972.
- [3] А. А. Фридман, “О кривизне пространства”, *Журн. русск. физ.-хим. о-ва, часть физ.*, **56**:1 (1924), 59–68; *УФН*, **80**:3 (1963), 439–446; **93**:2 (1967), 280–287.
- [4] А. А. Фридман, “О возможности мира с постоянной отрицательной кривизной пространства”, *УФН*, **80** (1963), 447–452.

- [5] G. Lemaître, “Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la Vitesse radiale de nébuleuses extra-galactiques”, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles A*, **47** (1927), 49–59.
- [6] G. Lemaître, “L’Univers en expansion”, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles A*, **53** (1933), 51–85.
- [7] H. P. Robertson, “On the foundations of relativistic cosmology”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **15** (1929), 822–829.
- [8] H. P. Robertson, “Relativistic cosmology”, *Rev. Modern Phys.*, **5**:1 (1933), 62–90.
- [9] H. P. Robertson, “Kinematics and world structure”, *Astrophys. J.*, **82** (1935), 284–301.
- [10] R. C. Tolman, “The effect of the annihilation of matter on the wave-length of light from the nebulae”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **16**:4 (1930), 320–337.
- [11] R. C. Tolman, “More complete discussion of the time-dependence of the non-static line element for the universe”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **16**:6 (1930), 409–420.
- [12] D. Hilbert, “Die Grundlagen der Physik”, *Math. Ann.*, **92**:1 (1924), 1–32.
- [13] G. Fubini, “Sugli spazii a quattro dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti”, *Ann. Mat. Pura Appl. Ser. III*, **9**:1 (1904), 33–90.
- [14] Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия*, ИЛ, М., 1948.
- [15] R. C. Tolman, “On the estimation of distances in a curved universe with a non-static line element”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **16**:7 (1930), 511–520.
- [16] A. G. Walker, “On Milne’s theory of world-structure”, *Proc. London Math. Soc. Ser. 2*, **42**:1 (1936), 90–127.
- [17] M. O. Katanaev, “On homogeneous and isotropic universe”, *Modern Phys. Lett. A*, **30**:34 (2015), 1550186, 5 с., arXiv: 1511.00991.
- [18] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1984.
- [19] М. О. Катанев, *Geometric methods in mathematical physics*, arXiv: 1311.0733.
- [20] И. Я. Арефьева, И. В. Волович, “Об изотропном энергетическом условии и космологии”, *ТМФ*, **155**:1 (2008), 3–12.
- [21] В. А. Рубаков, “Изотропное условие энергодоминантности и его нарушение”, *УФН*, **184**:2 (2014), 137–152.
- [22] G. A. Alekseev, “Collision of strong gravitational and electromagnetic waves in the expanding universe”, *Phys. Rev. D*, **93**:6 (2016), 061501, 6 pp.
- [23] А. К. Гущин, “ L_p -оценки некасательной максимальной функции для решения эллиптического уравнения второго порядка”, *Матем. сб.*, **207**:10 (2016), 28–55.
- [24] А. К. Гущин, “О разрешимости задачи Дирихле для неоднородного эллиптического уравнения второго порядка”, *Матем. сб.*, **206**:10 (2015), 71–102.
- [25] В. В. Жаринов, “Законы сохранения, дифференциальные тождества и связи уравнений в частных производных”, *ТМФ*, **185**:2 (2015), 227–251.
- [26] В. В. Жаринов, “О преобразовании Беклунда”, *ТМФ*, **189**:3 (2016), 323–334.