Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Денисов, Развитие концепции естественной геометрии для физических взаимодействий, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 2, 205–211

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:57:55

© 2017 г.

В. И. Денисов*

РАЗВИТИЕ КОНЦЕПЦИИ ЕСТЕСТВЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Проанализировано развитие концепции естественной геометрии для гравитационного поля в работах Логунова. Обсуждается применение этой концепции к нелинейной электродинамике вакуума. Показано, что определение естественной геометрии для нелинейной теории и нахождение ее метрического тензора позволяет получать достаточно полную информацию о законах распространения импульсов электромагнитного поля во внешних электромагнитных полях.

Ключевые слова: естественная геометрия, метрический тензор, гравитационное поле, нелинейная электродинамика вакуума.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9182>

В работах академика Логунова большое внимание уделялось вопросам теории гравитации и, особенно, выбору естественной геометрии для гравитационного поля и других физических полей. Вопрос о естественной геометрии для физических взаимодействий впервые был сформулирован Лобачевским в 1829 г. В своей работе [1] он писал: “... не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой Геометрии”.

Однако до начала XX века эта концепция не получила своего развития, так как все существовавшие теоретико-полевые модели физических взаимодействий использовали геометрии Евклида или Минковского. Ситуация изменилась после создания Эйнштейном [2] общей теории относительности (ОТО), столетний юбилей которой мы отметили в 2015 г. Эта теория внесла в физику представление о том, что естественной геометрией для гравитационного поля и всех полей материи является псевдориманова геометрия, метрический тензор которой согласно уравнениям Эйнштейна предопределяется распределением материи в пространстве. В ОТО гравитационное поле отождествляется с метрическим тензором пространства-времени g_{ik} , и это поле проявляется в искривлении пространства-времени.

В работах Логунова [3]–[5] развивался иной подход, в котором гравитационное поле рассматривалось как физическое поле в духе Фарадея–Максвелла. В этом

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: denisov@srd.sinp.msu.ru

подходе полевой переменной для описания гравитации служил симметричный тензор второго ранга $\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$, и естественной геометрией для этого поля являлась псевдоевклидова геометрия с метрическим тензором γ_{ik} .

Универсальный характер воздействия гравитационного поля на вещество, проявляющийся в равенстве инертной и гравитационной масс любого тела, требовал, чтобы движение вещества, взаимодействующего с внешним гравитационным полем, было локально неотличимым от свободного движения вещества в соответствующей ускоренной системе отсчета. Следствием этой универсальности является необходимость геометризации плотности лагранжиана вещества. Развивая эту идею, Логунов в дальнейших работах [6], [7] сформулировал принцип тождественности (принцип геометризации), согласно которому уравнения движения вещества под действием гравитационного поля φ_{ik} в псевдоевклидовом пространстве-времени с метрическим тензором γ_{ik} можно тождественно представить как уравнения движения вещества в римановом пространстве-времени с метрическим тензором g_{ik} , зависящим от гравитационного поля φ_{ik} и метрического тензора γ_{ik} . В соответствии с принципом тождественности геометризация теории проводилась в той минимальной степени (в виде геометризации плотности лагранжиана вещества), которая позволила описать известные экспериментальные факты и сохранить общепринятые понятия энергии-импульса для системы, включающей вещество и гравитационное поле.

Для определения явной зависимости метрического тензора g_{ik} от γ_{ik} и φ_{ik} использовались уравнения

$$\frac{\partial g_{nm}}{\partial \varphi_{ik}} = \frac{1}{2} [\delta_m^i \delta_n^k + \delta_m^k \delta_n^i],$$

которые имели вытекающий из выполненных гравитационных экспериментов постньютоновский предел.

Дальнейшее развитие этой теории привело к созданию теории гравитации [8]–[12], в которой гравитон обладал массой $m \sim 10^{-66}$ г. Уравнения гравитационного поля в теории с массивным гравитоном имеют вид

$$R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R + \frac{m^2}{2} \left[g^{ik} + (g^{im} g^{kn} - \frac{1}{2} g^{ik} g^{nm}) \gamma_{nm} \right] = 8\pi T^{ik}. \quad (1)$$

Метрический тензор псевдориманова пространства-времени g_{ik} в этой теории связан с гравитационным полем φ_{ik} и метрическим тензором псевдоевклидова пространства-времени γ_{ik} соотношением

$$\tilde{g}^{ik} = \tilde{\gamma}^{ik} + \tilde{\varphi}^{ik}, \quad (2)$$

где

$$\tilde{g}^{ik} = \sqrt{-g} g^{ik}, \quad \tilde{\gamma}^{ik} = \sqrt{-\gamma} \gamma^{ik}, \quad \tilde{\varphi}^{ik} = \sqrt{-\gamma} \varphi^{ik}.$$

Как показано в работе [7], теория с уравнениями (1), (2) описывает все гравитационные эксперименты, выполненные в Солнечной системе с постньютоновской точностью.

Концепция естественной геометрии для физических взаимодействий нашла свое применение не только в гравитации, но и в нелинейной электродинамике вакуума. В настоящее время в научной литературе [13]–[15] рассматриваются несколько теоретических моделей нелинейной электродинамики вакуума. В этих теориях нелинейность уравнений существенно проявляется при напряженностях электромагнитных полей $B, E \sim B_q$, где $B_q = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс.

В случаях, когда $B, E < B_q$, лагранжианы этих теорий можно записать в параметризованном постмаксвелловском приближении [16]–[18]:

$$L = \frac{\sqrt{-g}}{32\pi} \{2F_{(2)} + \xi[(\eta_1 - 2\eta_2)F_{(2)}^2 + 4\eta_2 F_{(4)}] + O(\xi^2 F_2^3)\} - \frac{\sqrt{-g}}{c} j^k A_k, \quad (3)$$

где $\xi = 1/B_q^2$, $F_{(2)} = F_{nm}F^{mn}$ и $F_{(4)} = F_{mn}F^{ni}F_{ik}F^{km}$ – инварианты тензора электромагнитного поля F_{nm} , индексы у которых поднимаются и опускаются с помощью метрического тензора псевдориманова пространства-времени g_{ik} , η_1 и η_2 – постмаксвелловские параметры, которые в электродинамике Борна–Инфельда совпадают, $\eta_1 = \eta_2$, а в теории Гейзенберга–Эйлера различаются:

$$\eta_1 = \frac{\alpha}{45\pi} = 5.1 \cdot 10^{-5}, \quad \eta_2 = \frac{7\alpha}{180\pi} = 9.0 \cdot 10^{-5}.$$

Уравнения электромагнитного поля нелинейной электродинамики с лагранжианом (3):

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^n} \{ \sqrt{-g} [(1 + \xi(\eta_1 - 2\eta_2)F_2)F^{mn} + 4\xi\eta_2 F^{ml}F_{lk}F^{kn}] \} = -\frac{4\pi}{c} j^m, \quad (4)$$

вместе с системой однородных уравнений

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^n} + \frac{\partial F_{kn}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ni}}{\partial x^k} = 0 \quad (5)$$

представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, к которым методы интегрирования линейных уравнений [19] неприменимы. Очевидно, что эту систему уравнений можно точно решить лишь в небольшом числе простейших физических ситуаций (см., например, статьи [20]–[22]).

Для интегрирования системы уравнений (4), (5) в ряде работ (см., например, [23], [24]) был разработан модифицированный метод, основанный на методе Ньюмена–Пенроуза [25], хорошо себя зарекомендовавший при решении задач ОТО. Однако из-за большой эвристичности этого метода добиться существенного успеха и на этом пути не удалось. Поэтому определение естественной геометрии для электромагнитного поля в нелинейной электродинамике вакуума и нахождение метрического тензора этой геометрии дает возможность теоретического исследования основных закономерностей электромагнитных явлений в этой теории.

Как указывалось в книге Логунова [26], “... любому физическому полю соответствует некоторая геометрия, называемая естественной, именно такая, что в отсутствие взаимодействия с другими полями фронт свободной волны этого физического поля движется по геодезической естественного пространства-времени”. Поэтому для нахождения метрического тензора естественной геометрии для электромагнитного поля в нелинейной электродинамике вакуума необходимо построить уравнение фронта волны (уравнение характеристик) для системы уравнений (4), (5). Для линейной электродинамики в произвольной материальной среде оно было получено в работах [27], [28] и имело следующий вид:

$$C^{iknm} \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^k} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^n} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^m} \right) = 0.$$

Для нелинейной электродинамики (4), (5) уравнение фронта волны было построено в статьях [29], [30]. В этом случае тензор C^{iknm} квадратируется, в результате чего уравнение фронта волны принимает вид

$$G_{(1)}^{ik} G_{(2)}^{nm} \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^k} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^n} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^m} \right) = 0.$$

При $\eta_1 \neq \eta_2$ в этом уравнении присутствуют два различных метрических тензора $G_{(1)}^{ik}$ и $G_{(2)}^{nm}$ естественной геометрии для электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} G_{(1)}^{ik} &= g^{ik} + 4\eta_1 \xi F^{ip} F_{p \cdot}^k, \\ G_{(2)}^{nm} &= g^{nm} + 4\eta_2 \xi F^{nl} F_{l \cdot}^m. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, при $\eta_1 \neq \eta_2$ закон распространения электромагнитной волны во внешнем электромагнитном поле зависит от поляризации волны (двулучепреломление). При этом мы имеем две нормальные волны, первая из которых распространяется по геодезическим псевдориманова пространства-времени с метрическим тензором $G_{(1)}^{ik}$, а вторая, имеющая ортогональную поляризацию, – по изотропным геодезическим с метрическим тензором $G_{(2)}^{nm}$. Метрические тензоры $G_{(1)}^{ik}$ и $G_{(2)}^{nm}$ естественной геометрии в нелинейной электродинамике вакуума зависят не только от метрического тензора g^{nm} , получаемого из уравнений гравитационного поля, но и от квадратичной комбинации тензора электромагнитного поля. Однако, как показано в работе [31], это не означает, что в нелинейной электродинамике вакуума принцип эквивалентности Эйнштейна для фотонов [32] нарушается. Наличие в метрическом тензоре естественной геометрии квадратичной комбинации тензора электромагнитного поля означает, что в нелинейной электродинамике вакуума на распространение фотонов влияет не только гравитационное поле, но и внешнее электромагнитное поле.

Знание метрических тензоров $G_{(1)}^{ik}$ и $G_{(2)}^{nm}$ позволяет, не обращаясь к нелинейным уравнениям (4), решать широкий круг задач о распространении электромагнитных волн во внешних электромагнитных полях. Это и задачи об искривлении лучей электромагнитных волн во внешних неоднородных электромагнитных полях [33], и задачи о запаздывании во внешнем неоднородном поле электромагнитного импульса, переносимого первой нормальной волной, по сравнению с импульсом, переносимым другой нормальной волной, имеющей ортогональную поляризацию [34]–[37], а также задачи нелинейной лазерной физики [38], [39].

Действительно, если уравнения

$$G_{(1,2)}^{ik} \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^k} \right) = 0 \quad (7)$$

позволяют провести разделение переменных, то их можно решить методом Гамильтона–Якоби. Это дает возможность записать уравнения для лучей, по которым распространяются нормальные волны, и определить закон движения электромагнитных импульсов по этим лучам. Если задача не обладает достаточной симметрией для разделения переменных, то можно воспользоваться методом Лагранжа–Шарпи [40] и перейти от уравнения фронта волны (7) к уравнениям для изотропных геодезических в пространстве-времени с метрическими тензорами $G_{(1)}^{ik}$ и $G_{(2)}^{ik}$ [41]:

$$\frac{dk^n}{d\sigma} = -G_{(1,2)}^{np} \left[\frac{\partial G_{pm}^{(1,2)}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial G_{mi}^{(1,2)}}{\partial x^p} \right] k^i k^m = 0, \quad (8)$$

где σ – некоторый аффинный параметр, $k^n = dx^n/d\sigma$ – касательный вектор к геодезической, удовлетворяющий условию

$$G_{nk}^{(1,2)} \frac{dx^n}{d\sigma} \frac{dx^k}{d\sigma} = 0.$$

Так как в большинстве лабораторных и астрофизических ситуаций (при $B, E < B_q$, где $B_q = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс) правая часть уравнений (8) содержит малый параметр, систему уравнений (8) можно решить методом последовательных приближений.

Следует отметить, что нахождение уравнения фронта волны и определение естественной геометрии позволяет решать широкий круг задач и в нелинейной электродинамике сплошных сред.

Таким образом, концепция естественной геометрии для физических взаимодействий наиболее плодотворна для нелинейных теорий, в которых нелинейность содержится при старших производных в лагранжиане.

Список литературы

- [1] Н. И. Лобачевский, “О началах геометрии”, *Казанский Вестник*, **XXV** (1829), 178–187.
- [2] A. Einstein, “Die Feldgleichungen der Gravitation”, *Sitzungsber. Königl. Preuß. Akad. Wiss. (Berlin)*, **48** (1915), 844–847.
- [3] А. А. Логунов, В. Н. Фоломешкин, “Энергия-импульс гравитационных волн в общей теории относительности”, *ТМФ*, **32:2** (1977), 167–175.
- [4] А. А. Логунов, В. Н. Фоломешкин, “Проблемы энергии-импульса и теория гравитации”, *ТМФ*, **32:3** (1977), 291–325.
- [5] А. А. Логунов, В. Н. Фоломешкин, “О геометризованных теориях гравитации”, *ТМФ*, **32:2** (1977), 147–166.
- [6] А. А. Логунов, В. И. Денисов, А. А. Власов, М. А. Мествиришвили, В. Н. Фоломешкин, “Новые представления о пространстве-времени и гравитации”, *ТМФ*, **40:3** (1979), 291–328.
- [7] A. A. Logunov, M. A. Mestvirishvili, “Relativistic theory of gravitation”, *Prog. Theor. Phys.*, **74:1** (1985), 31–50.
- [8] А. А. Логунов, “Основные принципы релятивистской теории гравитации”, *ТМФ*, **80:2** (1989), 165–172.
- [9] А. А. Логунов, “Основные уравнения для массивного гравитационного поля”, *ТМФ*, **92:2** (1992), 191–206.
- [10] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, “Самоограничение гравитационного поля и его роль во Вселенной”, *УФН*, **176:11** (2006), 1207–1225.
- [11] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, “Гравитационные волны в релятивистской теории гравитации”, *ТМФ*, **160:2** (2009), 270–275.
- [12] А. А. Логунов, *Релятивистская теория гравитации*, Наука, М., 2012.
- [13] M. Born, L. Infeld, “Foundations of the new field theory”, *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, **144**:852 (1934), 425–430.
- [14] W. Heisenberg, H. Euler, “Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons”, *Z. Phys.*, **98:11** (1936), 714–720.
- [15] G. Boillat, “Nonlinear electrodynamics: Lagrangians and equations of motion”, *J. Math. Phys.*, **11:3** (1970), 941–950.
- [16] В. И. Денисов, И. П. Денисова, “Проверяемый пост-максвелловский эффект нелинейной электродинамики в вакууме”, *Оптика и спектроскопия*, **90:2** (2001), 329–335.

- [17] В. И. Денисов, И. П. Денисова, “Взаимодействие интенсивного лазерного излучения со слабыми электромагнитными волнами на вакуумном участке кольцевого лазера”, *Оптика и спектроскопия*, **90**:6 (2001), 1023–1026.
- [18] I. P. Denisova, I. V. Krivchenkov, P. A. Vshivtseva, A. A. Zubrilo, “Letter: Nonlinear gravitational-electromagnetic bending of the rays of weak electromagnetic waves in the fields of pulsars and magnetars”, *Gen. Relativ. Gravitation*, **36**:4 (2004), 889–897.
- [19] К. В. Жуковский, “Метод обратных дифференциальных операторов с использованием ортогональных полиномов и специальных функций для решения некоторых типов дифференциальных уравнений и физических задач”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.*, 2015, № 2, 19–26.
- [20] Б. М. Барбашов, Н. А. Черников, “Решение задачи о рассеянии двух плоских волн в нелинейной скалярной теории поля типа Борна–Инфельда”, *ЖЭТФ*, **51**:8 (1966), 658–668.
- [21] В. И. Денисов, И. П. Денисова, “Эффект взаимодействия плоских электромагнитных волн в нелинейной электродинамике Борна–Инфельда”, *ТМФ*, **129**:1 (2001), 131–139.
- [22] В. И. Денисов, В. А. Соколов, “Исследование регуляризующих свойств нелинейной электродинамики в теории Эйнштейна–Борна–Инфельда”, *ЖЭТФ*, **140**:6 (2011), 1064.
- [23] И. П. Денисова, “Развитие метода спиновых коэффициентов для интегрирования уравнений биметрических теорий гравитации”, *Дифференц. уравнения*, **35**:7 (1999), 935–941.
- [24] П. А. Вшивцева, А. А. Зубрило, И. В. Кривченков, В. А. Соколов, “Развитие метода спиновых коэффициентов для интегрирования уравнений нелинейной электродинамики вакуума”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.*, 2006, № 5, 6–8.
- [25] Г. А. Алексеев, В. И. Хлебников, “Формализм Ньюмена–Пенроуза и его применение в общей теории относительности”, *ЭЧАЯ*, **9**:5 (1978), 790–870.
- [26] А. А. Логунов, *Лекции по теории относительности и гравитации*, Наука, М., 1987.
- [27] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.
- [28] W.-T. Ni, “Spacetime structure and asymmetric metric from the premetric formulation of electromagnetism”, *Phys. Lett. A*, **379**:20–21 (2015), 1297–1303.
- [29] В. И. Денисов, И. П. Денисова, “Уравнения эйконала в параметризованной нелинейной электродинамике вакуума”, *Докл. РАН*, **378**:4 (2001), 463–465.
- [30] В. И. Денисов, “Исследование эффективного пространства-времени нелинейной электродинамики вакуума в поле магнитного диполя”, *ТМФ*, **132**:2 (2002), 211–221.
- [31] М. Г. Гапочка, М. М. Денисов, И. П. Денисова, Н. В. Каленова, А. Ф. Королев, “Математическое моделирование нелинейно-электродинамического эффекта запаздывания сигналов в магнитном поле пульсаров”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **55**:11 (2015), 1893–1903.
- [32] V. I. Denisov, M. I. Denisov, *Phys. Rev. D*, **60**:4 (1999), 047301, 4 pp.
- [33] J. Y. Kim, “Bending of electromagnetic wave in an ultra-strong magnetic field”, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **10** (2012), 056, 9 pp., arXiv: 1208.1319.
- [34] В. И. Денисов, И. В. Кривченков, И. П. Денисова, “Эффект нелинейно-электродинамического запаздывания электромагнитных сигналов в поле магнитного диполя”, *ЖЭТФ*, **122**:2(8) (2002), 227–232.
- [35] V. I. Denisov, S. I. Svertilov, “Nonlinear electromagnetic and gravitational actions of neutron star fields on electromagnetic wave propagation”, *Phys. Rev. D*, **71**:6 (2005), 063002, 13 pp.
- [36] М. И. Васильев, В. А. Соколов, “Нелинейно-электродинамические эффекты в электромагнитном поле вращающегося пульсара”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.*, **67**:5 (2012), 8–12.
- [37] V. I. Denisov, V. A. Sokolov, M. I. Vasili’ev, “Nonlinear vacuum electrodynamics birefringence effect in a pulsar’s strong magnetic field”, *Phys. Rev. D.*, **90**:2 (2014), 023011, 7 pp.

- [38] V. I. Denisov, “Nonlinear effect of quantum electrodynamics for experiments with a ring laser”, *J. Opt. A*, **2**:5 (2000), 372–379.
- [39] В. А. Соколов, “Взаимодействие электромагнитных волн в сильном постоянном магнитном поле”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.*, 2009, №3, 108–110.
- [40] Л. Э. Эльсгольц, *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*, Наука, М., 1965.
- [41] П. А. Вшивцева, М. М. Денисов, “Математическое моделирование распространения электромагнитных волн в нелинейной электродинамике”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **49**:12 (2009), 2189–2200.