Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бруски, Ф. Калоджеро, О некоторых матричных функциональных уравнениях, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 1, 15–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:00:05

© 2016 г.

М. Бруски^{*†}, Ф. Калоджеро^{†*}

О НЕКОТОРЫХ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Исследуется пара матричных функциональных уравнений $\mathbf{G}(x)\mathbf{F}(y) = \mathbf{G}(xy)$, $\mathbf{G}(x)\mathbf{G}(y) = \mathbf{F}(y/x)$ с двумя независимыми скалярными переменными x, y и двумя $(N \times N)$ -матрицами $\mathbf{F}(z)$, $\mathbf{G}(z)$, где N – произвольное положительное целое число, причем элементы этих матриц являются функциями скалярной переменной z . Рассматривается простейший класс решений, т.е. такие матрицы, все элементы которых являются аналитическими функциями независимой переменной. Тогда как в скалярном ($N = 1$) случае такая пара функциональных уравнений обладает только совершенно тривиальными постоянными решениями, в матричном ($N > 1$) случае существуют нетривиальные решения. Полученные решения удовлетворяют дополнительной паре функциональных уравнений $\mathbf{F}(x)\mathbf{G}(y) = \mathbf{G}(y/x)$ и $\mathbf{F}(x)\mathbf{F}(y) = \mathbf{F}(xy)$, а также бесконечной иерархии дополнительных функциональных уравнений, содержащих более двух независимых переменных.

Ключевые слова: матричные функциональные уравнения.

DOI: 10.4213/tmf9185

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование функциональных уравнений имеет столетнюю историю, породившую многочисленную литературу (см., например, ссылки в работах [1], [2]). В этих исследованиях можно выделить два, разумеется взаимосвязанных, направления. *Первое направление* – это поиск *новых* функциональных уравнений, представляющих интерес, обладающих нетривиальными решениями, которые не являются тождественно равными нулю или постоянными, в простейшем функциональном пространстве, которое, к примеру, характеризуется аналитической зависимостью от (комплексных) независимых переменных. *Второе направление* – это подробное исследование решений известных функциональных уравнений во все более сложных

^{*}Physics Department, University of Rome “La Sapienza”, Roma, Italy.
E-mail: francesco.calogero@uniroma1.it

[†]Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma, Roma, Italy.
E-mail: mario.bruschi@roma1.infn.it, francesco.calogero@roma1.infn.it

функциональных пространствах (например, включающих функции, которые не являются непрерывными, функции с диофантовыми свойствами и т. д.). Настоящая статья примыкает к первому из этих двух направлений, мы сосредоточиваемся на выявлении *матричных* функциональных уравнений. В частности, мы рассматриваем функциональные уравнения, в которых зависимые переменные являются *матрицами*, а независимые переменные являются *скалярами*, и которые обладают *нетривиальными* решениями *только* в *подлинно матричном* случае (т. е. при редуцировании *матричнозначных* зависимых функций к *скалярным* они обладают *исключительно тривиальными* решениями). Мы полагаем, что найденные и изученные нами *матричные* функциональные уравнения являются *новыми*, и в этом убеждении нас укрепляют тщательные поиски, главным образом, в базах данных сети Интернет, которые тем не менее не могут быть абсолютно надежными при наличии огромного количества литературы по указанному вопросу.

Результаты представлены в разделе 2, а перспективные направления развития кратко сформулированы в разделе 3. Завершают статью приложения А–С.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе изложены наши основные результаты. Сначала введем матричные функциональные уравнения, которые мы будем рассматривать; затем перечислим ряд свойств матричнозначных решений этих функциональных уравнений и, наконец, покажем, что эти матричные функциональные уравнения, в отличие от их скалярных аналогов, все же обладают нетривиальными решениями, которые представимы в явном виде.

ОБОЗНАЧЕНИЯ 1. Мы будем обозначать $(N \times N)$ -матрицы жирными прописными буквами, N -векторы – жирными строчными буквами, а скаляры – обычными (прописными или строчными) буквами: так, например, в $(N \times N)$ -матрицу $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}(x)$ входят N^2 компонент $F_{nm} \equiv F_{nm}(x)$, а в N -вектор $\mathbf{z}$ входят N компонент z_n . Здесь N – вообще говоря, *произвольное положительное целое число*, а индексы n, m, ℓ пробегает целые значения от 1 до N (если не оговорено другое). Через $\mathbf{P}^{(\ell)}$ обозначим N “проективных матриц”, все элементы которых равны нулю, за исключением единственного диагонального элемента $P_{\ell\ell}^{(\ell)}$, который равен *единице*. Таким образом, компоненты $P_{nm}^{(\ell)}$ указанных $(N \times N)$ -матриц $\mathbf{P}^{(\ell)}$ имеют вид

$$P_{nm}^{(\ell)} = \delta_{n\ell}\delta_{m\ell}, \quad (1a)$$

при этом справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{P}^{(n)}\mathbf{P}^{(m)} = \delta_{nm}\mathbf{P}^{(n)}, \quad (1b)$$

характеризующие указанные N матриц $\mathbf{P}^{(n)}$ как “проекторы”. Здесь и далее δ_{nm} – символ Кронекера, $\delta_{nm} = 1$, если $n = m$, $\delta_{nm} = 0$, если $n \neq m$. Наконец, иногда в статье будем использовать единичную $(N \times N)$ -матрицу, которую обозначим как $\mathbf{I}$, с матричными элементами $I_{nm} = \delta_{nm}$.

В данной работе вводится и исследуется пара матричных функциональных уравнений

$$\mathbf{G}(x)\mathbf{F}(y) = \mathbf{G}(xy), \quad (2a)$$

$$\mathbf{G}(x)\mathbf{G}(y) = \mathbf{F}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2b)$$

с двумя независимыми скалярными переменными x, y и с двумя $(N \times N)$ -матрицами $\mathbf{F}(z)$, $\mathbf{G}(z)$, где N – произвольная целая постоянная, а элементы этих двух матриц являются функциями скалярной переменной z . Сосредоточимся на простейшем классе решений, т. е. на матрицах, все элементы которых являются аналитическими функциями независимой переменной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Из пары функциональных уравнений (2a) и (2b) следует, что матрицы $\mathbf{F}(z)$ и $\mathbf{G}(z)$ удовлетворяют также дополнительной паре функциональных уравнений

$$\mathbf{F}(x)\mathbf{G}(y) = \mathbf{G}\left(\frac{y}{x}\right), \quad (2c)$$

$$\mathbf{F}(x)\mathbf{F}(y) = \mathbf{F}(xy). \quad (2d)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\mathbf{F}(x)\mathbf{G}(y) = \mathbf{G}(y)\mathbf{G}(xy)\mathbf{G}(y) = \mathbf{G}(y)\mathbf{F}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbf{G}\left(\frac{y}{x}\right). \quad (3)$$

Первый шаг состоит в замене $\mathbf{F}(x)$ на $\mathbf{G}(y)\mathbf{G}(xy)$ с помощью уравнения (2b); второй шаг – в замене $\mathbf{G}(xy)\mathbf{G}(y)$ на $\mathbf{F}(1/x)$ снова с помощью уравнения (2b); третий шаг – в замене $\mathbf{G}(y)\mathbf{F}(1/x)$ на $\mathbf{G}(y/x)$ с помощью уравнения (2a). Это доказывает соотношение (2c).

Далее имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x)\mathbf{F}(y) &= \mathbf{G}(z)\mathbf{G}(xz)\mathbf{G}(z)\mathbf{G}(yz) = \\ &= \mathbf{G}(z)\mathbf{F}\left(\frac{1}{x}\right)\mathbf{G}(yz) = \mathbf{G}\left(\frac{z}{x}\right)\mathbf{G}(yz) = \mathbf{F}(xy). \end{aligned} \quad (4)$$

Первый шаг состоит в замене $\mathbf{F}(x)$ на $\mathbf{G}(z)\mathbf{G}(xz)$ с помощью уравнения (2b) и аналогичной замене $\mathbf{F}(y)$ на $\mathbf{G}(z)\mathbf{G}(yz)$; второй шаг – в замене $\mathbf{G}(xz)\mathbf{G}(z)$ на $\mathbf{F}(1/x)$ опять же с помощью уравнения (2b); третий шаг – в замене $\mathbf{G}(z)\mathbf{F}(1/x)$ на $\mathbf{G}(z/x)$ с помощью уравнения (2a); четвертый шаг – в замене $\mathbf{G}(z/x)\mathbf{G}(yz)$ на $\mathbf{F}(xy)$ с помощью уравнения (2b). Это доказывает соотношение (2d). Предложение доказано.

Далее мы часто будем ссылаться на четверку функциональных уравнений (2), включающую в себя два основных функциональных уравнения (2a) и (2b) и два функциональных уравнения (2c) и (2d).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Два основных матричных функциональных уравнения (2a) и (2b) независимы друг от друга, т. е. матрицы $\mathbf{F}(z)$ и $\mathbf{G}(z)$ можно задать таким образом, что они будут удовлетворять одному из этих уравнений, но не будут удовлетворять другому. Например, матрицы вида

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{G}(z) = \begin{pmatrix} z^{k_1} & 0 \\ 0 & z^{k_2} \end{pmatrix}, \quad (5a)$$

где k_1 и k_2 – два произвольных целых числа (но которые не могут быть оба равны нулю), удовлетворяют уравнению (2a), но не удовлетворяют уравнению (2b), а матрицы вида

$$\mathbf{F}(z) = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(z) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad (5b)$$

где a и b – два произвольных числа (но такие, что $ab \neq 1$), удовлетворяют уравнению (2b), но не удовлетворяют уравнению (2a).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно предположить, что любые два уравнения из четверки функциональных уравнений (2) влекут за собой два других. Однако это не так. В частности, два функциональных уравнения (2c) и (2d) не означают справедливости двух других матричных функциональных уравнений (2a) и (2b). Это можно показать на примере двух матриц

$$\mathbf{F}(z) = \begin{pmatrix} z^k & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & z^k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(z) = \begin{pmatrix} -z^{-k} & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ \alpha z^{-k} & 0 & z^{-k} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где η принимает значения 0 или 1 (таким образом, $\eta^2 = \eta$), а α , k – произвольные параметры ($\alpha \neq 1$; при этом, если требуется аналитичность, то k – целое число). Действительно, эти две матрицы, как легко заметит внимательный читатель, удовлетворяют двум функциональным уравнениям (2c) и (2d), но они не удовлетворяют двум матричным функциональным уравнениям (2a) и (2b).

С другой стороны, два матричных функциональных уравнения (2b) и (2c) влекут за собой матричное функциональное соотношение (2d) (но не функциональное уравнение (2a)). Приведем доказательство:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(z)\mathbf{G}(x)\mathbf{G}(y) &= \mathbf{F}(z)\mathbf{F}\left(\frac{y}{x}\right), \\ \mathbf{G}\left(\frac{x}{z}\right)\mathbf{G}(y) &= \mathbf{F}(z)\mathbf{F}\left(\frac{y}{x}\right), \\ \mathbf{F}\left(\frac{yz}{x}\right) &= \mathbf{F}(z)\mathbf{F}\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Первое из этих трех равенств получим умножением уравнения (2b) слева на $\mathbf{F}(z)$, второе – заменой $\mathbf{F}(z)\mathbf{G}(x)$ на $\mathbf{G}(x/z)$ с помощью (2c), третье – заменой $\mathbf{G}(x/z)\mathbf{G}(y)$ на $\mathbf{F}(yz/x)$ с помощью (2b). Ясно, что последнее соотношение совпадает с (2d), что и требовалось доказать.

Наконец, если предположить, что матрица $\mathbf{F}(z)$ обладает свойством (см. обозначения 1)

$$\mathbf{F}(1) = \mathbf{I}, \quad (8a)$$

что, очевидно, *подразумевается* в уравнении (2d), если предположить *обратимость* матрицы $\mathbf{F}(1)$, тогда ясно, что матричное функциональное уравнение (2b) (при $x = y$) влечет за собой соотношения

$$[\mathbf{G}(x)]^2 = \mathbf{I}, \quad [\mathbf{G}(x)] = [\mathbf{G}(x)]^{-1}. \quad (8b)$$

Кроме того, легко видеть, что если выполняется условие (8a), тогда из *одного* матричного функционального уравнения (2b) *следует* уравнение (2a), а значит (в силу предложения 1), из него *следует* и полная *четверка* функциональных уравнений (2). Приведем доказательство:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(z)\mathbf{G}(x)\mathbf{G}(y) &= \mathbf{G}(z)\mathbf{F}\left(\frac{y}{x}\right), \\ \mathbf{F}\left(\frac{x}{z}\right)\mathbf{G}(y) &= \mathbf{G}(z)\mathbf{F}\left(\frac{y}{x}\right), \\ \mathbf{G}(y) &= \mathbf{G}(x)\mathbf{F}\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Первое уравнение получим умножением (2b) слева на $\mathbf{G}(z)$, второе – заменой $\mathbf{G}(z)\mathbf{G}(x)$ на $\mathbf{F}(x/z)$ (снова с помощью (2b)), третье – с помощью подстановки $z = x$, используя (8a). Последняя формула, очевидно, эквивалентна уравнению (2a), что легко увидеть после замены в ней y на xy . На этом доказательство закончено.

Заметим, что последний результат *не противоречит* общей *независимости* двух матричных функциональных уравнений (2a) и (2b), о которой говорится в замечании 1; действительно, пример (5b) *не согласуется* со свойством (8a). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3. *Четверка* матричных функциональных уравнений, тесно связанная с уравнениями (2), имеет следующий вид:

$$\hat{\mathbf{F}}(y)\hat{\mathbf{G}}(x) = \hat{\mathbf{G}}(xy), \quad (10a)$$

$$\hat{\mathbf{G}}(y)\hat{\mathbf{G}}(x) = \hat{\mathbf{F}}\left(\frac{y}{x}\right), \quad (10b)$$

$$\hat{\mathbf{G}}(y)\hat{\mathbf{F}}(x) = \hat{\mathbf{G}}\left(\frac{y}{x}\right), \quad (10c)$$

$$\hat{\mathbf{F}}(y)\hat{\mathbf{F}}(x) = \hat{\mathbf{F}}(xy). \quad (10d)$$

В самом деле, очевидно, что если две матрицы $\mathbf{F}(z)$ и $\mathbf{G}(z)$ удовлетворяют *четверке* матричных функциональных уравнений (2) и являются *обратимыми*, тогда две матрицы

$$\hat{\mathbf{F}}(x) = [\mathbf{F}(x)]^{-1}, \quad \hat{\mathbf{G}}(z) = [\mathbf{G}(z)]^{-1} \quad (11)$$

удовлетворяют *четверке* матричных функциональных уравнений (10).

Другая, возможно более интересная, *четверка* матричных функциональных уравнений, связанных с уравнениями (2), имеет следующий вид:

$$\check{\mathbf{G}}(x)\check{\mathbf{F}}(y) = \check{\mathbf{G}}(x+y), \quad (12a)$$

$$\check{\mathbf{G}}(x)\check{\mathbf{G}}(y) = \check{\mathbf{F}}(y-x), \quad (12b)$$

$$\check{\mathbf{F}}(x)\check{\mathbf{G}}(y) = \check{\mathbf{G}}(y-x), \quad (12c)$$

$$\check{\mathbf{F}}(x)\check{\mathbf{F}}(y) = \check{\mathbf{F}}(x+y). \quad (12d)$$

В самом деле, очевидно, что если две матрицы $\mathbf{F}(z)$ и $\mathbf{G}(z)$ удовлетворяют *четверке* матричных функциональных уравнений (2), тогда две матрицы

$$\tilde{\mathbf{F}}(z) = \mathbf{F}e^{az}, \quad \tilde{\mathbf{G}}(z) = \mathbf{G}e^{az}, \quad (13)$$

где a – произвольное комплексное число, удовлетворяют *четверке* матричных функциональных уравнений (10); при этом ясно, что если две матрицы $\mathbf{F}(z)$ и $\mathbf{G}(z)$ зависят *аналитически* от комплексной переменной z , то и две матрицы $\tilde{\mathbf{F}}(z)$ и $\tilde{\mathbf{G}}(z)$, очевидно, тоже зависят аналитически от этой переменной (см. (13)).

Следовательно, все результаты, обсуждаемые здесь для матриц $\mathbf{F}(z)$ и $\mathbf{G}(z)$, удовлетворяющих матричным функциональным уравнениям (2), можно легко распространить на матрицы $\tilde{\mathbf{F}}(z)$ и $\tilde{\mathbf{G}}(z)$, удовлетворяющие матричным функциональным уравнениям (10), или на матрицы $\tilde{\mathbf{F}}(z)$ и $\tilde{\mathbf{G}}(z)$, удовлетворяющие матричным функциональным уравнениям (12). Эту задачу оставим заинтересованному читателю.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Очевидно, что *четверка* матричных функциональных уравнений (2) инвариантна относительно замены знака матрицы $\mathbf{G}(y)$, а именно: если пара матриц $\mathbf{F}(x)$ и $\mathbf{G}(y)$ удовлетворяет матричным функциональным уравнениям (2), то пара матриц $\mathbf{F}(x)$ и $-\mathbf{G}(y)$ также удовлетворяет этим уравнениям.

Важнее то, что *четверка* матричных функциональных уравнений (2) инвариантна также относительно *сопряжения*, т. е. если две матрицы $\mathbf{F}(x)$ и $\mathbf{G}(y)$ удовлетворяют этим уравнениям, то тем же свойством обладают и две сопряженные матрицы:

$$\tilde{\mathbf{F}}(x) = \mathbf{R}\mathbf{F}(x)\mathbf{R}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{G}}(y) = \mathbf{R}\mathbf{G}(y)\mathbf{R}^{-1}, \quad (14)$$

где $\mathbf{R}$ – произвольная, конечно обратимая, $(N \times N)$ -матрица, не зависящая от переменных x и y . Отсюда следует способ *обобщения* любого частного решения *четверки* матричных функциональных уравнений (2), которая далее считается заданной. Интересный пример представлен в приложении В.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Очевидно, что *четверка* матричных функциональных уравнений (2) обладает *постоянным* (не зависящим от z) решением

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{A}, \quad \mathbf{G}(z) = \mathbf{B} \quad (15a)$$

с двумя не зависящими от z $(N \times N)$ -матрицами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, удовлетворяющими матричным уравнениям

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^2 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}. \quad (15b)$$

Далее мы обычно будем игнорировать такие *тривиальные* решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если две матрицы $\mathbf{F}(x)$ и $\mathbf{G}(y)$, удовлетворяющие *четверке* функциональных уравнений (2), *коммутируют*, то обе эти матрицы *постоянные*, т. е. не зависят от своих аргументов x и y . Действительно, если

$$\mathbf{G}(y)\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(x)\mathbf{G}(y), \quad (16a)$$

то из (2a) и (2c) следует

$$\mathbf{G}(xy) \equiv \mathbf{G}(yx) = \mathbf{G}\left(\frac{y}{x}\right), \quad (16b)$$

а эта формула, очевидно, означает, что матрица $\mathbf{G}(z)$ не зависит от z . При этом из (2b) следует также, что и матрица $\mathbf{F}(z)$ не зависит от своего аргумента z . Следовательно, поскольку мы сосредоточились на *нетривиальном* случае матриц $\mathbf{F}(x)$

(или $\mathbf{G}(y)$), удовлетворяющих четверке функциональных уравнений (2), которые зависят от своих аргументов x (или y), эти две матрицы *не могут коммутировать*; в частности, они *не могут быть обе диагональными*.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Одно матричное функциональное уравнение (2d), взятое само по себе (т.е. независимо от оставшихся трех матричных функциональных уравнений четверки (2)), является хорошо известным матричным функциональным уравнением (см., например, [1]–[3]). В скалярном случае ($N = 1$), когда оно имеет вид $F(x)F(y) = F(xy)$, оно совпадает с одним из самых первых исследованных функциональных уравнений, которое теперь обычно связывается с именем Коши. Общее *аналитическое* решение этого уравнения имеет, конечно, вид $F(z) = z^k$, где k – произвольное *целое число*. Естественное обобщение этого решения на матричный случай (2d) имеет вид (см. обозначения 1)

$$\mathbf{F}(z) = \sum_{n=1}^N [\eta_n z^{k_n} \mathbf{P}^{(n)}], \quad (17)$$

где N констант η_n принимают значения 0 или 1, т.е. $\eta_n^2 = \eta_n$, а N параметров k_n произвольны (*целые числа*, если требуется *аналитичность*). Однако, даже если позволить обобщение этого решения его сопряжением, это *не будет* наиболее общим классом решений матричного функционального уравнения (2d) (см., например, [1]–[3]).

Также очевидно, что функциональное уравнение (2d) влечет за собой следующую бесконечную цепочку функциональных соотношений:

$$\prod_{s=1}^S [\mathbf{F}(z_s)] = \mathbf{F}\left(\prod_{s=1}^S z_s\right), \quad S = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

(см. аналогичные соотношения в замечании 8, в которые наряду с матрицей $\mathbf{F}(x)$ входит матрица $\mathbf{G}(y)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Очевидно, что если две матрицы $\mathbf{F}(x)$ и $\mathbf{G}(y)$ удовлетворяют *четверке* функциональных уравнений (2), включающих две независимые переменные x и y , они также удовлетворяют бесконечной иерархии матричных функциональных уравнений, у которых в левой части находится произведение *произвольного* числа $M > 2$ этих матриц (в любом порядке), каждая из которых зависит от своего аргумента, а в их правой части – единственная матрица $\mathbf{F}(\zeta)$ (если число матриц типа $\mathbf{G}$ в левой части *четное*) или единственная матрица $\mathbf{G}(\zeta)$ (если число матриц типа $\mathbf{G}$ в левой части *нечетное*) с аргументом ζ , являющимся соответствующим произведением всех аргументов матриц в правой части и/или обратных к ним. Первые представители этой бесконечной цепочки матричных функциональных соотношений имеют следующий вид:

$$\mathbf{F}(z_1)\mathbf{F}(z_2)\mathbf{F}(z_3) = \mathbf{F}(z_1 z_2 z_3), \quad (19a)$$

$$\mathbf{G}(z_1)\mathbf{G}(z_2)\mathbf{G}(z_3) = \mathbf{G}(z_1 z_2^{-1} z_3), \quad (19b)$$

$$\mathbf{F}(z_1)\mathbf{F}(z_2)\mathbf{G}(z_3) = \mathbf{G}(z_1^{-1} z_2^{-1} z_3), \quad (19c)$$

$$\mathbf{G}(z_1)\mathbf{G}(z_2)\mathbf{F}(z_3) = \mathbf{F}(z_1^{-1} z_2 z_3), \quad (19d)$$

что легко может проверить внимательный читатель. Он также легко получит следующие соотношения этой иерархии, а также, конечно, заметит, что соотношение (19a) совпадает со случаем $S = 3$ в соотношении (18).

Дополнительные функциональные уравнения, которым удовлетворяют соответствующие комбинации двух матриц $\mathbf{F}(z)$ и $\mathbf{G}(z)$, приводятся в приложении С.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Более компактные версии некоторых из приведенных выше формул можно получить, положив

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{H}_{+1}(z) \equiv \mathbf{H}_{+}(z), \quad \mathbf{G}(z) = \mathbf{H}_{-1}(z) \equiv \mathbf{H}_{-}(z). \quad (20a)$$

Например, *четверка* матричных функциональных уравнений (2) примет вид

$$\mathbf{H}_{\sigma'}(x)\mathbf{H}_{\sigma}(y) = \mathbf{H}_{\sigma''}(x^{\sigma}y), \quad (20b)$$

где $\sigma'' = \sigma\sigma'$, а оба параметра σ и σ' могут принимать значения ± 1 .

Наконец, поясним, каким образом можно получить большой класс *нетривиальных* $(N \times N)$ -матричных решений $\mathbf{F}(x)$ и $\mathbf{G}(y)$ для *пары* матричных функциональных уравнений (2a) и (2b) и, следовательно, *четверки* матричных функциональных уравнений (2), а также бесконечной *иерархии* матричных функциональных соотношений, выявленных в замечании 8.

Вначале мы определим различные альтернативные, но эквивалентные способы построения определенных классов таких решений, а далее объединим полученные результаты в предложении 2 (см. ниже). В итоге мы наметим дальнейшие важные обобщения этих решений.

ОБОЗНАЧЕНИЯ 2. В дальнейшем M параметров a_m , $m = 1, \dots, M$, представляют собой M *ненулевых произвольных* (возможно *комплексных*) чисел; M параметров k_m , $m = 1, \dots, M$, представляют собой M *произвольных* (*положительных, отрицательных или нулевых*) *целых чисел* (эти ограничения требуются для обеспечения *аналитической* зависимости матриц $\mathbf{F}(x)$ и $\mathbf{G}(y)$ от своих аргументов); L параметров η_{ℓ} , $\ell = 1, \dots, L$, принимают только значения 0 или 1, так что $\eta_{\ell}^2 = \eta_{\ell}$. Иногда также будут упоминаться параметры a , k , η без индексов, при этом подразумевается, что они удовлетворяют тем же ограничениям, как и только что перечисленные ограничения для параметров a_m , k_m , η_{ℓ} .

Опишем *первый* способ построения таких решений.

Прежде всего предположим, что N – четное число, $N = 2M$, где M – *произвольное положительное целое число*. Тогда, очевидно (это можно показать непосредственной проверкой), что некоторый класс решений обусловлен *диагональной* $(N \times N)$ -матрицей $\mathbf{F}(x)$ с элементами $F_{m,m}(x) = x^{k_m}$, $F_{N+1-m,N+1-m}(x) = x^{-k_m}$, и *антидиагональной* $(N \times N)$ -матрицей $\mathbf{G}(y)$ с элементами $G_{m,N+1-m}(x) = a_m^{-1}x^{-k_m}$, $G_{N+1-m,m}(x) = a_mx^{k_m}$, $m = 1, \dots, M$. Отметим, что обе эти матрицы имеют только по *одному* ненулевому элементу в каждой строке и в каждом столбце. Покажем это

на примере ($M = 3, N = 6$):

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{k_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{k_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-k_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-k_1} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{G}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-k_1}/a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-k_2}/a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-k_3}/a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 x^{k_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 x^{k_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 x^{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, предположим, что $N = 2M + L$, где M и L – два произвольных неотрицательных числа, т.е. теперь рассмотрим также и случай нечетных N . Тогда очевидно, что класс $(N \times N)$ -матричных решений получается добавлением в одно и то же место каждой из двух построенных выше $(2M \times 2M)$ -матриц $\mathbf{F}(x)$ и $\mathbf{G}(y)$ L дополнительных пар строк и столбцов, пересекающихся на диагонали результирующих $(N \times N)$ -матриц $\mathbf{F}(x)$ и $\mathbf{G}(y)$; единственное условие – диагональный элемент не равен тождественно нулю и имеет одно и то же значение для обеих матриц η_ℓ , $\ell = 1, \dots, L$. Заметим, что обе эти матрицы имеют не более одного ненулевого элемента в каждой строке и в каждом столбце. Рассмотрим еще один пример: для $M = 3, L = 2$ (следовательно, $N = 8$) из (21) получим

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{k_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{k_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-k_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-k_1} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbf{G}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-k_1}/a_1 \\ 0 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-k_2}/a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-k_3}/a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 x^{k_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 x^{k_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 x^{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом непосредственное обобщение этого класса решений получается соответствующей перестановкой аналогичным образом строк и столбцов пары $(N \times N)$ -матриц $\mathbf{F}(x)$ и $\mathbf{G}(y)$, т.е. перестановкой j -й строки с k -й и далее j -го столбца с k -м (или

наоборот). Например, из (22) перестановкой $4 \iff 8$ получим

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{k_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-k_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^{k_3} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\mathbf{G}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x^{-k_1}/a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-k_2}/a_2 & 0 \\ a_1 x^{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 x^{k_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 x^{k_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-k_3}/a_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот дополнительный этап пояснен здесь кратко, его смысл раскрывается далее в статье, а также в примерах, данных в приложении А, где также можно найти ряд полученных таким образом структурно различных решений.

Теперь опишем *второй*, итеративный способ построения таких решений, показывающий, как строить матричное решение порядка $N + 1$ из матричного решения порядка N или из матричного решения порядка $N - 1$. Матричное решение порядка $N + 1$ получим из матричного решения порядка N обычным добавлением строки и столбца, пересекающихся на *диагонали* результирующей матрицы порядка $N + 1$ и имеющих там значение η (т. е. 0 или 1), при этом все остальные элементы *тождественно равны нулю*. Например, из решения ($N = 2$, см. приложение А)

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & 0 \\ 0 & x^{-k_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{-1} y^{-k_1} \\ a_1 y^{k_1} & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

получим ($N = 3$, см. приложение А)

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-k_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1^{-1} y^{-k_1} \\ 0 & \eta_1 & 0 \\ a_1 y^{k_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (25a)$$

Матричное решение порядка $N + 1$ получим из матричного решения порядка $N - 1$ добавлением двух строк и двух столбцов, которые имеют только по одному не равному тождественно нулю элементу и которые пересекаются на *диагонали* результирующей матрицы порядка $N + 1$ и имеют на ней в случае матрицы $\mathbf{F}(x)$ порядка $N + 1$ величины x^k и x^{-k} . В случае результирующей матрицы $\mathbf{G}(y)$ порядка $N + 1$ ненулевые элементы локализируются в *недиагональных* позициях, в которых пересекаются две новые строки и два новых столбца, принимая там значения $a^{-1} x^{-k}$ и ax^k . В качестве примера получим из приведенного выше решения (24) следующие

матрицы ($N = 4$, см. приложение А):

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-k_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{-1}y^{-k_1} & 0 & 0 \\ a_1y^{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2^{-1}y^{-k_2} \\ 0 & 0 & a_2y^{k_2} & 0 \end{pmatrix} \quad (25b)$$

Если данное описание снова покажется не достаточно точным, читатель может обратиться к примерам приложения А. Заметим также, что описанное итеративное построение является наиболее удобным исходным пунктом для оценки полного числа *различных по структуре* матриц такого типа, как показано в вычислениях приложения А.

Опишем теперь третий путь получения пары $(N \times N)$ -матриц $\mathbf{F}(x)$ и $\mathbf{G}(y)$, преимущество которого состоит в том, что на нем основано аккуратное доказательство того, что построенные матрицы являются решением *пары* матричных функциональных уравнений (2a) и (2b). Для этого снова положим $N = 2M + L$ и введем постоянную $(N \times N)$ -матрицу $\mathbf{A}$, выраженную через M параметров a_m , а также зависящую от z $(N \times N)$ -матрицу $\mathbf{F}(z)$, выраженную через M параметров k_m и L параметров η_ℓ . Зададим матрицу $\mathbf{A}$ покомпонентно следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{m,N-m+1} &= \frac{1}{a_m}, & m &= 1, 2, \dots, M, \\ A_{M+\ell, M+\ell} &= 1, & \ell &= 1, 2, \dots, L, \\ A_{N-m+1, m} &= a_m, & m &= 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (26)$$

а все остальные ее элементы *нулевые*. $(N \times N)$ -матрица $\mathbf{F}(z)$ *диагональная*, зададим ее покомпонентно следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{m,m}(z) &= z^{k_m}, & m &= 1, 2, \dots, M, \\ F_{M+\ell, M+\ell}(z) &= \eta_\ell, & \ell &= 1, 2, \dots, L, \\ F_{N-m+1, N-m+1}(z) &= z^{-k_m}, & m &= 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (27)$$

Например, для $N = 7$, $M = 2$, $L = 3$ имеем

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\mathbf{F}(z) = \begin{pmatrix} z^{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{k_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-k_1} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $(N \times N)$ -матрица $\mathbf{F}(z)$ удовлетворяет матричному функциональному уравнению

$$\mathbf{F}(x)\mathbf{F}(y) = \mathbf{F}(xy) \quad (29)$$

(которое в действительности совпадает с уравнением (2d)) и что $(N \times N)$ -матрица $\mathbf{A}$ удовлетворяет следующим простым тождествам (см. обозначения 1):

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}. \quad (30)$$

Кроме того, легко проверить справедливость дополнительного тождества

$$\mathbf{A}\mathbf{F}(z)\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{F}(z)\mathbf{A} = \mathbf{F}\left(\frac{1}{z}\right). \quad (31)$$

Далее, введем матрицу $\mathbf{G}(z)$ следующим образом:

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{A}\mathbf{F}(z). \quad (32)$$

В этом случае, например, для $N = 7$, $M = 2$, $L = 3$, имеем

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{A}\mathbf{F}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-k_1}/a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-k_2}/a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 z^{k_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 z^{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Теперь совсем легко показать, что пара $(N \times N)$ -матриц $\mathbf{F}(z)$ и $\mathbf{G}(z)$ удовлетворяет двум основным функциональным уравнениям (2a) и (2b). Действительно, уравнение (2a) получим немедленно умножением уравнения (29) слева на $\mathbf{A}$ и с использованием соотношения (32). При этом очевидно, что уравнение (29) после замены x на $1/x$ принимает вид

$$\mathbf{F}\left(\frac{1}{x}\right)\mathbf{F}(y) = \mathbf{F}\left(\frac{y}{x}\right), \quad (34a)$$

откуда с помощью тождества (31) получим

$$\mathbf{A}\mathbf{F}(x)\mathbf{A}\mathbf{F}(y) = \mathbf{F}\left(\frac{y}{x}\right), \quad (34b)$$

а с помощью (32) получим в точности уравнение (2b), что и требовалось доказать.

Таким образом, построена пара $(N \times N)$ -матриц $\mathbf{F}(z)$ и $\mathbf{G}(z)$, которые удовлетворяют двум основным функциональным уравнениям (2a) и (2b). Дополнительные решения опять получим перестановкой строк и столбцов пары матриц $\mathbf{F}(z)$ и $\mathbf{G}(z)$. Легко заметить, что этого можно достичь соответствующими *сопряжениями*, заданными элементарными $(N \times N)$ -матрицами $\mathbf{R}^{(n,m)}$, полученными из единичной матрицы $\mathbf{I}$ перестановкой строки n со строкой m или, аналогично, столбца n со столбцом m (таким образом, эти матрицы имеют только один элемент, равный единице, в каждой строке и каждом столбце, из них $N - 2$ элементов находятся на диагонали, а два – во *взаимно сопряженных недиагональных* позициях, т.е. элементы nm и mn , где $n \neq m$). Хорошо известно, что матрица $\mathbf{R}^{(n,m)}$,

действуя слева на матрицу общего вида $\mathbf{W}$, переставляет строку n со строкой m в матрице $\mathbf{W}$, а действуя справа – переставляет столбец n со столбцом m в матрице $\mathbf{W}$. Таким образом, $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{R}^{(n,m)} \mathbf{W} \mathbf{R}^{(n,m)}$ – матрица, полученная из $\mathbf{W}$ перестановкой строки n со строкой m , а также столбца n со столбцом m . Но для таких матриц $\mathbf{R}^{(n,m)}$ имеем $(\mathbf{R}^{(n,m)})^2 = \mathbf{I}$, $(\mathbf{R}^{(n,m)})^{-1} = \mathbf{R}^{(n,m)}$, следовательно, матрица $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{R}^{(n,m)} \mathbf{W} \mathbf{R}^{(n,m)} = \mathbf{R}^{(n,m)} \mathbf{W} (\mathbf{R}^{(n,m)})^{-1}$ действительно является сопряженной.

Например, для $N = 7$ сопряжение

$$\tilde{\mathbf{F}}(z) = \mathbf{R}^{(2,5)} \mathbf{F}(z) (\mathbf{R}^{(2,5)})^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{G}}(z) = \mathbf{R}^{(2,5)} \mathbf{G}(z) (\mathbf{R}^{(2,5)})^{-1},$$

заданное матрицей

$$\mathbf{R}^{(2,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (34c)$$

переводит две матрицы $\mathbf{F}(z)$ и $\mathbf{G}(z)$ (см. (28) и (33)) в две матрицы следующего вида:

$$\tilde{\mathbf{F}}(z) = \begin{pmatrix} z^{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z^{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-k_1} \end{pmatrix}, \quad (35a)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-k_1}/a_1 \\ 0 & \eta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-k_2}/a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 z^{k_2} & 0 & 0 \\ a_1 z^{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (35b)$$

Конечно, все полученные таким образом пары матриц удовлетворяют (см. замечание 4) *паре* матричных функциональных уравнений (2a) и (2b). Поэтому очевидно, как с помощью такого рода *сопряжений* получить весь класс структурно различных решений $\mathbf{F}(z)$ и $\mathbf{G}(z)$ основных функциональных уравнений (2a) и (2b), а также, как следствие, решения *четверки* матричных функциональных уравнений (2) и бесконечной *иерархии* матричных функциональных соотношений, введенных в замечании 8.

В заключение данного раздела подведем итог полученным выше результатам, возможно с некоторым повторением, в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $N = L + 2M$, где N – произвольное положительное целое число, а M и L – неотрицательные целые числа. Заметим, что для данного N существует $1 + \lfloor N/2 \rfloor$ различных значений M и L , где $\lfloor N/2 \rfloor$ означает целую часть числа $N/2$, т.е. $\lfloor N/2 \rfloor = N/2$, если N четное, $\lfloor N/2 \rfloor = (N - 1)/2$, если N нечетное. Далее, разделим произвольным образом $N = L + 2M$ целых чисел от 1 до N на три множества: первое множество содержит L из этих N целых чисел (мы обозначим ниже эти числа n_ℓ , где $\ell = 1, \dots, L$); второе и третье множества содержат по M целых чисел, и эти $2M$ чисел мы обозначим $\nu_m^{(+)}$ (числа, принадлежащие второму множеству) и $\nu_m^{(-)}$ (числа, принадлежащие третьему множеству), где $m = 1, \dots, M$. Заметим, что тем самым мы ввели спаривание между M числами $\nu_m^{(+)}$ и $\nu_m^{(-)}$, имеющими тот же индекс m , и что $N = L + 2M$ целых чисел n_ℓ , $\nu_m^{(+)}$ и $\nu_m^{(-)}$ различны между собой по построению. Мы также будем использовать введенные выше $N = L + 2M$ параметров η_ℓ , $\ell = 1, \dots, L$, и a_m , k_m , $m = 1, \dots, M$ (см. обозначения 2).

Пары $(N \times N)$ -матриц $\mathbf{F}(z)$ и $\mathbf{G}(z)$, удовлетворяющие двум основным функциональным уравнениям (2a) и (2b) и, следовательно, двум другим уравнениям четверки (2), а также всем функциональным уравнениям из замечания 8, зададим следующим образом. Каждая из этих двух $(N \times N)$ -матриц имеет $N(N - 1)$ тождественно равных нулю элементов (т.е. они равны нулю независимо от значений параметров), а оставшиеся N элементов заполняют строки и столбцы так, что каждая из N строк и каждый из N столбцов этих двух $(N \times N)$ -матриц $\mathbf{F}(z)$ и $\mathbf{G}(z)$ имеет один элемент, не равный тождественно нулю, значение которого задается с помощью введенных выше параметров следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{nn}(z) &= \eta_\ell & \text{для } n &= n_\ell, \quad \ell = 1, \dots, L, \\ F_{nn}(z) &= z^{k_m} & \text{для } n &= \nu_m^{(+)}, \quad m = 1, \dots, M, \\ F_{nn}(z) &= z^{-k_m} & \text{для } n &= \nu_m^{(-)}, \quad m = 1, \dots, M; \end{aligned} \quad (36a)$$

$$\begin{aligned} G_{nn}(z) &= \eta_\ell & \text{для } n &= n_\ell, \quad \ell = 1, \dots, L, \\ G_{nn'}(z) &= a_m^{-1} z^{-k_m} & \text{для } n &= \nu_m^{(+)}, \quad n' = \nu_m^{(-)}, \quad m = 1, \dots, M, \\ G_{n'n}(z) &= a_m z^{k_m} & \text{для } n &= \nu_m^{(+)}, \quad n' = \nu_m^{(-)}, \quad m = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (36b)$$

Отметим, что эти формулы означают, что $(N \times N)$ -матрица $\mathbf{F}(z)$ является диагональной с L (диагональными) элементами, принимающими L значений η_ℓ , $\ell = 1, \dots, L$ (следовательно, не зависящими от z), а из оставшихся $2M$ (диагональных) элементов M элементов имеют значения z^{k_m} , а другие M элементов – значения z^{-k_m} (следовательно, зависят от z , если k_m не равняется нулю). В то же время все элементы соответствующей $(N \times N)$ -матрицы $\mathbf{G}(z)$ тождественно равны нулю, за исключением следующих: на диагонали находятся те же (не зависящие от z) элементы η_ℓ в тех же позициях, что и в матрице $\mathbf{F}(z)$; вне диагонали существуют (вообще говоря, зависящие от z) недиагональные элементы $G_{\nu_m^{(+)} \nu_m^{(-)}}(z) = a_m^{-1} z^{-k_m}$ и $G_{\nu_m^{(-)} \nu_m^{(+)}}(z) = a_m z^{k_m}$, где $m = 1, \dots, M$, а индексы $\nu_m^{(+)}$ и $\nu_m^{(-)}$ отражают тот факт, что соответствующая (диагональная) матрица $\mathbf{F}(z)$ имеет два (диагональных) элемента $F_{\nu_m^{(+)} \nu_m^{(+)}}(z) = z^{k_m}$ и $F_{\nu_m^{(-)} \nu_m^{(-)}}(z) = z^{-k_m}$.

Явный вид этих матриц для $N = 2, 3, 4$ представлен в приложении А, где также дана оценка их числа (для произвольного N).

Сформулированное предложение 2 предоставляет множество различных решений матричных функциональных уравнений (2a) и (2b), каждое из которых состоит из пары $(N \times N)$ -матриц $\mathbf{F}(x)$ и $\mathbf{G}(y)$, зависящих от $2M$ параметров a_m и k_m , а также от L параметров η_ℓ (произвольных, за исключением наложенных выше ограничений). Ряд других решений можно получить с помощью замечания 4: заменяя знак матрицы $\mathbf{G}(z)$ (что, однако, сводится только к переопределению M параметров a_m , если L либо равняется нулю, либо не равняется нулю, но при этом равны нулю все L параметров η_ℓ) и, что особенно важно, применяя дополнительные сопряжения, задаваемые матрицами $\mathbf{R}$, зависящими от дополнительных свободных параметров (таким образом, конечно, можно получить и *недиагональные* $(N \times N)$ -матрицы $\tilde{\mathbf{F}}(z)$; аккуратный пример приведен в приложении В).

С другой стороны, подчеркнем еще раз, что для $N = 1$, т.е. в *скалярном* случае, существуют только три *совершенно тривиальных* аналитических решения пары матричных функциональных уравнений (2a) и (2b): $F(x) = G(y) = 0$ и $F(x) = 1$, $G(y) = \pm 1$.

3. ПЕРСПЕКТИВЫ

Остается *открытым* вопрос о том, содержит ли найденный выше класс решений пары функциональных уравнений (2a) и (2b) *все* решения этих *матричных* функциональных уравнений, имеющие *аналитическую* зависимость от своих *скалярных* переменных.

Кроме того, существует класс нерешенных проблем, касающихся построения решений матричных функциональных уравнений (2a) и (2b), принадлежащих более сложному функциональному пространству по сравнению с очень простым рассмотренным выше пространством.

Наконец, интересным направлением дальнейших исследований является поиск других *новых* функциональных уравнений, возможно, связанных с введенными выше (см., например, уравнения, представленные в приложении С).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

О числе различных пар матриц $\mathbf{F}(x)$ и $\mathbf{G}(y)$

Определим *число различных по структуре* $(N \times N)$ -матричнозначных решений, удовлетворяющих *паре* матричных функциональных уравнений (2a) и (2b), а следовательно, и *четверке* матричных функциональных уравнений (2), а также бесконечной *иерархии* матричных функциональных соотношений, найденных в замечании 8, на что уже указывалось в предложении 2. Ниже мы воспроизведем *все* матрицы такого рода, полученные для $N = 2$, $N = 3$ и $N = 4$.

Конечно, число S_N таких решений совпадает с числом матриц $\mathbf{F}(z)$, описанных в предложении 2 (поскольку каждой такой матрице соответствует однозначно определенная матрица $\mathbf{G}(z)$, за исключением того, что теперь мы считаем *разными* только такие решения, которые *различны по структуре*): например, мы *не считаем* такие две матрицы, как, скажем, $\begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \eta_2 & 0 \\ 0 & \eta_1 \end{pmatrix}$, *различными*, поскольку η_1 и η_2 означают два параметра, значения которых (в нашем случае 0 или 1) можно выбирать *произвольно*. При рассмотрении процесса построения *диагональной* матрицы

порядка $N + 1$ для матриц, имеющих структуру (36a), путем добавления соответствующим образом одного не зависящего от z диагонального элемента η_ℓ (конечно, вместе с соответствующими строкой и столбцом) к такой же матрице порядка N или двух зависящих от z диагональных элемента $z^{\pm k_m}$ (конечно, вместе с двумя соответствующими строками и столбцами) к такой же матрице порядка $N - 1$ становится очевидным, что это число задается рекуррентным соотношением

$$S_{N+1} = S_N + N S_{N-1} \quad (37a)$$

с

$$S_0 = S_1 = 1, \quad (37b)$$

из которого вытекает

$$S_0 = 1, \quad S_1 = 1, \quad S_2 = 2, \quad S_3 = 4, \quad S_4 = 10, \quad \dots \quad (37c)$$

Отметим, что эта последовательность

$$1, 1, 2, 4, 10, 26, 76, 232, 764, \dots \quad (37d)$$

является последовательностью A000085 для On-line “Энциклопедии целых последовательностей”¹⁾. Следовательно, эти числа являются белловскими:

$$S_N = B_{N, \leq 2} = \sum_{k=0}^N \left\{ \begin{matrix} N \\ k \end{matrix} \right\}_{\leq 2}, \quad (37e)$$

где $\left\{ \begin{matrix} N \\ k \end{matrix} \right\}_{\leq 2}$ – ограниченные числа Стирлинга второго рода (см., например, [4], [5]).

Перечислим *все (различные по структуре)* решения, указанные в предложении 2 для $N = 2$, $N = 3$ и $N = 4$.

A.1. Два решения для $N = 2M + L = 2$. Одно (тривиальное) решение для $M = 0$, $L = 2$:

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Одно (нетривиальное) решение для $M = 1$, $L = 0$:

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & 0 \\ 0 & x^{-k_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{-1} y^{-k_1} \\ a_1 y^{k_1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

A.2. Четыре решения для $N = 2M + L = 3$. Одно (тривиальное) решение для $M = 0$, $L = 3$:

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

¹⁾<http://oeis.org/A000085>.

Три (нетривиальных) решения для $M = 1, L = 1$:

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-k_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1^{-1}y^{-k_1} \\ 0 & \eta_1 & 0 \\ a_1y^{k_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (41a)$$

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & x^{-k_1} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{-1}y^{-k_1} & 0 \\ a_1y^{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 \end{pmatrix}, \quad (41b)$$

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & x^{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & x^{-k_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{-1}y^{-k_1} \\ 0 & a_1y^{k_1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (41c)$$

A.3. Десять решений для $N = 2M + L = 4$. Одно (тривиальное) решение для $M = 0, L = 4$:

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_4 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Шесть (нетривиальных) решений для $M = 1, L = 2$:

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-k_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1^{-1}y^{-k_1} \\ 0 & \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_2 & 0 \\ a_1y^{k_1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (43a)$$

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-k_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1^{-1}y^{-k_1} & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & 0 \\ a_1y^{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 \end{pmatrix}, \quad (43b)$$

$$\mathbf{F}(z) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{-1}y^{-k_1} & 0 & 0 \\ a_1y^{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 \end{pmatrix}, \quad (43c)$$

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-k_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1^{-1}y^{-k_1} \\ 0 & 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & a_1y^{k_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (43d)$$

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-k_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{-1}y^{-k_1} & 0 \\ 0 & a_1y^{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 \end{pmatrix}, \quad (43e)$$

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-k_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1^{-1}y^{-k_1} \\ 0 & 0 & a_1y^{k_1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (43f)$$

Три (нетривиальных) решения для $M = 2, L = 0$:

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-k_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1^{-1}y^{-k_1} \\ 0 & 0 & a_2^{-1}y^{-k_2} & 0 \\ 0 & a_2y^{k_2} & 0 & 0 \\ a_1y^{k_1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (44a)$$

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-k_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-k_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1^{-1}y^{-k_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2^{-1}y^{-k_2} \\ a_1y^{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2y^{k_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (44b)$$

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-k_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{-1}y^{-k_1} & 0 & 0 \\ a_1y^{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2^{-1}y^{-k_2} \\ 0 & 0 & a_2y^{k_2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (44c)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Замечательный пример

В данном приложении мы представим две замечательные $(N \times N)$ -матрицы $\tilde{\mathbf{F}}(x; \mathbf{z})$ и $\tilde{\mathbf{G}}(y; \mathbf{z})$, удовлетворяющие *паре* матричных функциональных уравнений (2a) и (2b), а следовательно, удовлетворяющие и *четверке* матричных функциональных уравнений (2), а также бесконечной *иерархии* матричных функциональных соотношений, полученных в замечании 8. Здесь и далее $\mathbf{z}$ – N -вектор, N компонентами которого являются N параметров z_n , которые можно задать *произвольно*, за исключением того ограничения, что *все они различны между собой* (иначе следует взять соответствующие пределы, см. ниже). Эти две матрицы были получены из описанных выше матриц специального вида с помощью соответствующего *сопряжения*, как объясняется ниже.

Действительно, пусть $\mathbf{F}(x)$ – *диагональная* $(N \times N)$ -матрица с элементами

$$F_{nn}(x) = x^{N-2n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (45a)$$

и $\mathbf{G}(x)$ – *антидиагональная* $(N \times N)$ -матрица, у которой *все элементы равны нулю*, за исключением *антидиагональных*, имеющих вид

$$G_{n, N-n+1}(y) = y^{-(N-2n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (45b)$$

Очевидно, что эти две матрицы соответствуют двум матрицам, описанным в предложении 2 для $N = 2M + L$, $L = 0$ или $L = 1$ (и если $L = 1$, то $\eta_1 = 1$), $k_{\nu(+)} = N - 2n_+ + 1$, $a_{\nu(+)} = 1$. Теперь сопряжем (см. замечание 4) эти две матрицы с помощью матрицы Вандермонда $\mathbf{R}(\mathbf{z})$ с элементами $R_{nm}(\mathbf{z}) = z_n^{m-1}$, зависящими от N чисел z_n (*произвольно* заданных, возможно даже комплексных, но *все они должны быть различными*):

$$\tilde{\mathbf{F}}(x; \mathbf{z}) = \mathbf{R}(\mathbf{z})\mathbf{F}(x)[\mathbf{R}(\mathbf{z})]^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{G}}(y; \mathbf{z}) = \mathbf{R}(\mathbf{z})\mathbf{G}(y)[\mathbf{R}(\mathbf{z})]^{-1}. \quad (46a)$$

Замечательное свойство этих двух матриц проявляется в точной форме матричных элементов *обеих* матриц:

$$\tilde{F}_{nm}(x; \mathbf{z}) = \frac{1}{x^{N-1}} \prod_{\substack{\ell=1, \\ \ell \neq m}}^N \frac{x^2 z_\ell - z_n}{z_m - z_\ell}, \quad (46b)$$

$$\tilde{G}_{nm}(y; \mathbf{z}) = \frac{1}{y^{N-1}} \prod_{\substack{\ell=1, \\ \ell \neq m}}^N \frac{y^2 z_n z_\ell - 1}{z_m - z_\ell}. \quad (46c)$$

Заметим, что матрица $\tilde{\mathbf{F}}(x; \mathbf{z})$ *инвариантна* относительно произвольного перемасштабирования $z_n \Rightarrow cz_n$ (где c – произвольное комплексное число, отличное от нуля) N параметров z_n ; а матрица $\tilde{\mathbf{G}}(y; \mathbf{z})$ *инвариантна* относительно (другого) перемасштабирования $z_n \Rightarrow cz_n$, $y \Rightarrow y/c$, в которое также входит независимая переменная y и которое оставляет инвариантным произведение yz_n .

Внимательный читатель заметит сходство этих матриц с матрицами, которые были введены в работе [6] и обсуждались в работе [3].

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Здесь представлен (без разъяснений) ряд дополнительных функциональных уравнений, которым удовлетворяют (что легко может проверить внимательный читатель) соответствующие комбинации пары $(N \times N)$ -матриц $\mathbf{F}(z)$ и $\mathbf{G}(z)$, удовлетворяющих *четверке* функциональных уравнений (2).

Функциональным уравнениям

$$\Phi^{(\sigma)}(x) \Phi^{(\sigma')}(y) = \sigma \Psi^{(\sigma)}(x) \Psi^{(\sigma')}(y) = \Phi^{(\sigma\sigma')}(xy) + \sigma \Phi^{(\sigma\sigma')}\left(\frac{y}{x}\right), \quad (47a)$$

$$\Psi^{(\sigma)}(x) \Phi^{(\sigma')}(y) = \sigma \Phi^{(\sigma)}(x) \Psi^{(\sigma')}(y) = \Psi^{(\sigma\sigma')}(xy) + \sigma \Psi^{(\sigma\sigma')}\left(\frac{y}{x}\right), \quad (47b)$$

где σ и σ' – два произвольных *знака*, т.е. $\sigma^2 = (\sigma')^2 = 1$, удовлетворяет пара $(N \times N)$ -матриц

$$\Phi^{(\sigma)}(z) = \mathbf{F}(z) + \sigma \mathbf{F}\left(\frac{1}{z}\right), \quad \Psi^{(\sigma)}(z) = \mathbf{G}(z) + \sigma \mathbf{G}\left(\frac{1}{z}\right). \quad (47c)$$

Заметим, что эти матрицы обладают простым свойством

$$\Phi^{(\sigma)}\left(\frac{1}{z}\right) = \sigma \Phi^{(\sigma)}(z), \quad \Psi^{(\sigma)}\left(\frac{1}{z}\right) = \sigma \Psi^{(\sigma)}(z). \quad (47d)$$

Вообще, *четверке* функциональных уравнений

$$\Phi^{(a,b)}(x) \Phi^{(a',b')}(y) = \Phi^{(aa',bb')}(xy) + \Phi^{(ab',ba')}\left(\frac{x}{y}\right), \quad (48a)$$

$$\Psi^{(a,b)}(x) \Psi^{(a',b')}(y) = \Phi^{(ba',ab')}(xy) + \Phi^{(bb',aa')}\left(\frac{x}{y}\right), \quad (48b)$$

$$\Phi^{(a,b)}(x)\Psi^{(a',b')}(y) = \Psi^{(ba',ab')}(xy) + \Psi^{(bb',aa')}\left(\frac{x}{y}\right), \quad (48c)$$

$$\Psi^{(a,b)}(x)\Phi^{(a',b')}(y) = \Psi^{(aa',bb')}(xy) + \Psi^{(ab',ba')}\left(\frac{x}{y}\right), \quad (48d)$$

где a, b, a', b', x, y – произвольные комплексные переменные, удовлетворяют функции

$$\Phi^{(a,b)}(z) = a\mathbf{F}(z) + b\mathbf{F}\left(\frac{1}{z}\right), \quad \Psi^{(a,b)}(z) = a\mathbf{G}(z) + b\mathbf{G}\left(\frac{1}{z}\right), \quad (48e)$$

которые, кроме того, удовлетворяют (что непосредственно следует из их определения (48e)) простым функциональным уравнениям

$$\Phi^{(a,b)}(z) = \Phi^{(b,a)}\left(\frac{1}{z}\right), \quad \Psi^{(a,b)}(z) = \Psi^{(b,a)}\left(\frac{1}{z}\right). \quad (48f)$$

И, кроме того, справедлива дополнительная *пятерка* матричных функциональных уравнений

$$\Omega^{(a,b)}(x)\Omega^{(a',b')}(y) = \Omega^{(aa',ba')}(xy) + \Omega^{(bb',ab')}\left(\frac{y}{x}\right), \quad (49a)$$

$$\Omega^{(a,b)}(x)\Phi^{(a',b')}(y) = \Omega^{(aa',ba')}(xy) + \Omega^{(ab',bb')}\left(\frac{x}{y}\right), \quad (49b)$$

$$\Phi^{(a,b)}(x)\Omega^{(a',b')}(y) = \Omega^{(aa',bb')}(xy) + \Omega^{(ba',ab')}\left(\frac{y}{x}\right), \quad (49c)$$

$$\Omega^{(a,b)}(x)\Psi^{(a',b')}(y) = \Omega^{(bb',ab')}\left(\frac{1}{xy}\right) + \Omega^{(ba',aa')}\left(\frac{y}{x}\right), \quad (49d)$$

$$\Psi^{(a,b)}(x)\Omega^{(a',b')}(y) = \Omega^{(bb',aa')}(xy) + \Omega^{(ab',ba')}\left(\frac{y}{x}\right), \quad (49e)$$

где

$$\Omega^{(a,b)}(z) = a\mathbf{F}(z) + b\mathbf{G}(z). \quad (49f)$$

Наконец, проводя дальнейшее обобщение, заметим, что $(N \times N)$ -матрица $\Omega(\alpha_+, \alpha_-, \beta_+, \beta_-; z)$, заданная в виде

$$\Omega(\alpha_+, \alpha_-, \beta_+, \beta_-; z) = \alpha_+\mathbf{F}(z) + \alpha_-\mathbf{F}\left(\frac{1}{z}\right) + \beta_+\mathbf{G}(z) + \beta_-\mathbf{G}\left(\frac{1}{z}\right), \quad (50a)$$

удовлетворяет следующему *единственному* функциональному уравнению, зависящему от десяти переменных $\alpha_+, \alpha_-, \beta_+, \beta_-, \alpha'_+, \alpha'_-, \beta'_+, \beta'_-, x, y$:

$$\begin{aligned} & \Omega(\alpha_+, \alpha_-, \beta_+, \beta_-; x)\Omega(\alpha'_+, \alpha'_-, \beta'_+, \beta'_-; y) = \\ & = \Omega(\alpha_+\alpha'_+ + \beta_-\beta'_+, \alpha_-\alpha'_- + \beta_+\beta'_-, \alpha_-\beta'_+ + \beta_+\alpha'_+, \alpha_+\beta'_- + \beta_-\alpha'_-; xy) + \\ & + \Omega\left(\alpha_+\alpha'_- + \beta_-\beta'_-, \alpha_-\alpha'_+ + \beta_+\beta'_+, \alpha_-\beta'_- + \beta_+\alpha'_-, \alpha_+\beta'_+ + \beta_-\alpha'_+; \frac{x}{y}\right) \equiv \\ & \equiv \sum_{\sigma=+,-} \Omega(\alpha_+\alpha'_\sigma + \beta_-\beta'_\sigma, \alpha_-\alpha'_-\sigma + \beta_+\beta'_-\sigma, \alpha_-\beta'_\sigma + \beta_+\alpha'_\sigma, \alpha_+\beta'_-\sigma + \beta_-\alpha'_-\sigma; xy^{\sigma 1}). \end{aligned} \quad (50b)$$

Список литературы

- [1] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Academic Press, New York, London, 1966; reprinted by Dover, New York, 2006.
- [2] J. Aczél, J. G. Dhombres, *Functional Equations in Several Variables*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [3] M. Bruschi, F. Calogero, *Aequat. Math.*, **90**:3, 541–557.
- [4] I. Mezo, *J. Integer Sequences*, **17**:1 (2014), 14.1.1, 18 pp.
- [5] F. L. Miksa, L. Moser, M. Wyman, *Canad. Math. Bull.*, **1**:2 (1958), 87–96.
- [6] F. Calogero, *J. Math. Phys.*, **56** (2015), 033506, 23 pp.