Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Цинь Сю Сунь, Фан Ли, Обобщение H -псевдобиналгебр
Ли, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 1, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:40:09

© 2017 г.

Цинь-Сю Сунь*, Фан Ли†

ОБОБЩЕНИЕ H -ПСЕВДОБИАЛГЕБР ЛИ

Исследуются Ном- H -псевдобииалгебры Ли. Представлены несколько примеров и теорема, позволяющая построить эти новые алгебраические структуры. Рассмотрены кограничные Ном- H -псевдобииалгебры Ли и соответствующие Ном-уравнения Янга–Бакстера.

Ключевые слова: Ном-бииалгебра Ли, Ном- H -псевдобииалгебра Ли, Ном-алгебра, классическое Ном-уравнение Янга–Бакстера.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9188>

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно введенное понятие H -псевдобииалгебры над кокоммутативной алгеброй Хопфа [1] представляет собой обобщение на случай многих переменных концепции конформной алгебры Ли [2], которая была введена Кацем в связи с вертексными алгебрами [3]. Алгебраические свойства каждого элемента в H -псевдобииалгебре Ли могут быть переформулированы в терминах его коэффициентов Фурье, которые в физической терминологии иногда называются операторами рождения и уничтожения. Пространство всех операторов уничтожения является (как правило, бесконечномерной) алгеброй Ли, а скобки Ли непрерывны по отношению к линейно компактной топологии. При дальнейшем изучении таких структур полезно использовать исследование линейно компактных бесконечномерных алгебр Ли, проведенное Картаном [4] и Гилменом [5], [6].

H -псевдобииалгебры (Ли) тесно связаны с дифференциальными алгебрами Ли в формализме Ритта и Гамильтона в теории нелинейных эволюционных уравнений [7]–[12]. Однако, поскольку H -псевдобииалгебры представляют собой новые алгебраические структуры, их роль во многих областях математики еще не до конца понятна. Как

Работа поддержана Natural Science Foundation of Zhejiang Province of China (грант № LQ13A010018) и National Natural Science Foundation of China (гранты № 11226069, 11401530).

*Department of Mathematics, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou, China. E-mail: qxsun@126.com

†Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou, China.
E-mail: fangli@cms.zju.edu.cn

ожидают специалисты, при некоторых условиях имеет место аналогичная связь “многомерных” псевдобиалгебр Ли и “многомерных” вертексных алгебр, введенных в монографии [3]. В случае коммутативной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ H -псевдобиалгебры Ли соотносятся с операторным разложением для ультралокальных полей (как и линейные скобки Пуассона) в $H = U(\mathfrak{g})$.

Структуры Ном-алгебр с недавних пор исследуются многими авторами. Основная особенность состоит в том, что тождества, определяющие алгебраические структуры, скручены гомоморфизмами. Данные алгебры появились в 90-х годах в примерах q -деформаций алгебр Витта и Вирасоро [13]–[15]. В работах [16]–[22]. Эти примеры и их обобщения послужили побудительной причиной исследований классов ассоциативных Ном-алгебр, Ном-алгебр Ли и их универсальных обертывающих ассоциативных Ном-алгебр, n -арных Ном-алгебр Намбу–Ли, Ном-колагебр и Ном-алгебр Хопфа. Такие более общие теории, как формальная теория деформаций, теория гомологий и когомологий, изучались в работах [23]–[26]. В то же время Яу разработал обобщение уравнения Янга–Бакстера (ЯБ), а также исследовал скрученную версию классического уравнения ЯБ и другие тесно связанные с ними объекты в случае Ном-биалгебр Ли [27]–[29].

Понятие H -коалгебр Ли и H -псевдобиалгебр Ли было введено с позиций псевдодуальности в работах [30], [31]. Также был предложен аналог классического уравнения ЯБ и дринфельдовского дубля для псевдоалгебр. Классическое уравнение ЯБ, также известное как классическое уравнение треугольников, было введено Склианиным в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния [32], [33]. Это уравнение в своем исходном тензорном виде является классическим пределом квантового уравнения ЯБ [34], [35] и играет важную роль в теории интегрируемых систем [36], [37], гамильтоновых структур [38], [9], алгебрах Каца–Мури [39], группах Пуассона–Ли (см. работу [40] и ссылки в ней), а также в теории биалгебр Ли [41]. Классическое уравнение ЯБ в H -псевдоалгебре L для $r = \sum_i a_i \otimes b_i \in L^{\otimes 2}$ имеет вид

$$[[r, r]] = \mu_{-1}^3([a_j, a_i] \otimes b_j \otimes b_i) - \mu_{-2}^4(a_i \otimes [a_j, b_i] \otimes b_j) - \mu_{-3}^2(a_i \otimes a_j \otimes [b_j, b_i]) = 0, \quad (1.1)$$

где $\mu_{-k}^l(\cdot)$ означает, что элемент алгебры Хопфа H , который в аргументе стоит на k -м месте, действует через посредство антипода на элемент алгебры L , стоящий на l -м месте.

Многие авторы изучали обобщения биалгебр Ли, и многие результаты были получены (см., например, [42], [29]). Для нас представляет интерес возможность работать в рамках этой конструкции с таким хорошо известным обобщением биалгебр Ли, как H -псевдобиалгебры Ли. Понятие H -псевдобиалгебры Ли L , являющееся обобщением понятия биалгебры Ли на случай, когда L – это не только векторное пространство, но и H -модуль, было введено в работе [30]. В этой работе H -коалгебра Ли – это просто коалгебра Ли, совместимая со структурой H -модуля, при этом H -псевдобиалгебры можно рассматривать как алгебры Ли в категории псевдотензоров, а не в категории векторных пространств. В то же время H -псевдобиалгебра Ли является одновременно и H -коалгеброй, и H -псевдоалгеброй Ли, удовлетворяющей условию коцикла. В работе [43] мы ввели Ном- H -псевдоалгебры Ли путем скручивания условия Якоби с помощью морфизма H -модуля. Дальнейшее обобщение H -псевдобиалгебр Ли представляется интересным и естественным.

Мы определяем подходящее понятие Ном- H -псевдобиабелгебры Ли, где Ном- H -коабелгебра Ли и Ном- H -псевдоабелгебра Ли удовлетворяют условию коцикла, причем на самом деле это условие есть условие 1-коцикла в Ном- H -псевдобиабелгебре Ли L с коэффициентами из $L \otimes L$ в редуцированном комплексе [43].

Настоящая статья является частью постоянно ведущегося исследования [43], [44] Ном- H -псевдобиабелгебр и связанных с ними теорий. Вдохновленные работами [26], [27] и [30], [31], мы вводим Ном- H -псевдобиабелгебры Ли и соответствующее Ном-уравнение ЯБ. В разделе 2 мы изучаем теорию Ном- H -псевдобиабелгебр Ли, которые являются обобщением как H -псевдобиабелгебр Ли, так и Ном-биабелгебр Ли. Более того, мы описываем общий метод получения Ном- H -псевдобиабелгебр Ли. Кограничные Ном- H -псевдобиабелгебры Ли и связанная с ними теория Ном-уравнения ЯБ рассматриваются в разделе 3. В заключении мы кратко формулируем физические перспективы наших исследований.

Читатель может обратиться к монографии [45] по поводу терминологии алгебр Хопфа. Мы используем обозначение Свидлера $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$. Всюду в статье все векторные пространства, линейные отображения и тензорные произведения рассматриваются над алгебраически замкнутым полем k , все алгебры Хопфа H коммутативны, $X = H^* = \text{Hom}_k(H, k)$ дуальна к алгебре H и $\sigma: H \otimes H \rightarrow H \otimes H$ есть перестановка, $\sigma(f \otimes g) = g \otimes f$.

2. НОМ- H -ПСЕВДОБИАЛГЕБРЫ

В данном разделе мы в основном рассматриваем Ном- H -псевдобиабелгебры Ли, которые являются обобщением как H -псевдобиабелгебр Ли [30], так и Ном-биабелгебр Ли [29], [42]. Кроме того, мы доказываем теорему, на основе которой из H -псевдобиабелгебр строятся Ном- H -псевдобиабелгебры. Мы также предлагаем некоторый способ построения Ном- H -псевдобиабелгебры Ли из заданной Ном- H -псевдобиабелгебры.

Начнем с некоторых сведений о H -псевдобиабелгебрах. Детали можно найти в работе [43].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [43]. Ном- H -псевдоабелгеброй Ли над H -модулем L называется тройка (L, μ, α) , где $\mu = [\cdot * \cdot]$, $\mu \in \text{Hom}_{H^{\otimes 2}}(L \otimes L, H^{\otimes 2} \otimes_H L)$, $\alpha \in \text{Hom}_H(L, L)$, такая, что для всех $x, y, z \in L$ выполнены следующие свойства:

условие *косоккоммутативности*

$$[x * y] = -(\sigma \otimes_H I)[y * x],$$

Ном-тождество Якоби в $H^{\otimes 3} \otimes_H L$

$$[\alpha(x) * [y * z]] - (\sigma \otimes I \otimes_H I)[\alpha(y) * [x * z]] = [[x * y] * \alpha(z)].$$

В частности, для одномерной алгебры Хопфа $H = k$ Ном- H -псевдоабелгебра Ли есть просто обычная Ном-алгебра Ли над полем k [18]. Если $\alpha = I_L$, то Ном- H -псевдоабелгебра Ли есть обычная H -псевдоабелгебра Ли [1].

Напомним, что для алгебры Хопфа H отображение $\mathcal{F}: H \otimes H \rightarrow H \otimes H$, заданное формулой

$$\mathcal{F}(f \otimes g) = (f \otimes 1)(S \otimes I)\Delta(g) = fS(g_{(1)}) \otimes g_{(2)},$$

называется преобразованием Фурье. Преобразование $\mathcal{F}$ является изоморфизмом векторного пространства, и обратное преобразование задается как

$$\mathcal{F}^{-1}(f \otimes g) = (f \otimes 1)\Delta(g) = fg_{(1)} \otimes g_{(2)}.$$

Преобразование Фурье также называется λ -скобкой [1]. Помимо псевдоскобки $[a * b]$ авторы работы [1] ввели еще одну скобку $[a, b] \in H \otimes L$ как преобразование Фурье для $[a * b]$:

$$[a, b] = \sum_i \mathcal{F}(f_i \otimes g_i)(1 \otimes c_i) = \sum_i f_i S(g_{i(1)}) \otimes g_{i(2)} c_i, \text{ если } [a * b] = \sum_i f_i \otimes g_i \otimes_H c_i.$$

Другими словами,

$$[a, b] = \sum_i h_i \otimes c_i, \text{ если } [a * b] = \sum_i (h_i \otimes 1) \otimes_H c_i.$$

Эквивалентное определение Ном- H -псевдоалгебры Ли можно сформулировать так: это конформная Ном- H -алгебра Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 [43]. Конформная Ном- H -алгебра Ли над H -модулем L – это тройка $(L, [\cdot, \cdot], \alpha)$, где $[\cdot, \cdot]: L \otimes L \rightarrow H \otimes L$ определено выше и $\alpha \in \text{Ном}_H(L, L)$, в которой для всех $a, b, c \in L$, $h \in H$ выполнены следующие свойства:

H -полуторалинейность

$$[ha, b] = (h \otimes 1)[a, b], [a, hb] = (1 \otimes h_{(2)})[a, b](S(h_{(1)}) \otimes 1),$$

косокоммутативность

$$\text{если } [a, b] = \sum_i h_i \otimes c_i, \quad \text{то } [b, a] = - \sum_i S(h_{i(1)}) \otimes h_{i(2)} c_i, \quad (2.1)$$

Ном-тождество Якоби в $H \otimes H \otimes L$

$$[\alpha(a), [b, c]] - (\sigma \otimes I)[\alpha(b), [a, c]] = (\mathcal{F}^{-1} \otimes I)[[a, b], \alpha(c)]. \quad (2.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 [30]. H -псевдобиалгебра Ли – это тройка $(L, [\cdot * \cdot], \delta)$ такая, что $(L, [\cdot * \cdot])$ – псевдоалгебра, (L, δ) – H -коалгебра, причем для всех $a, b \in L$ выполнено условие коцикла

$$a * \delta(b) - (\sigma \otimes_H I)(b * \delta(a)) = \delta([a * b]).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4 [29]. Ном-биалгебра Ли – это структура из четырех элементов $(L, [\cdot, \cdot], \Delta, \alpha)$, где $(L, [\cdot, \cdot], \alpha)$ – Ном-алгебра Ли и (L, Δ, α) – Ном-коалгебра Ли, такая, что для всех $x, y \in L$ выполнено следующее условие совместности:

$$\Delta([x, y]) = \text{ad}_{\alpha(x)}\Delta(y) - \text{ad}_{\alpha(y)}\Delta(x).$$

Далее мы обобщаем оба понятия: и понятие H -псевдобиалгебры, и понятие Ном-биалгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Ном- H -коалгеброй Ли называется тройка (L, δ, α) , в которой $\delta: L \rightarrow L \otimes L$ есть H -морфизм и $\alpha \in \text{Ном}_H(L, L)$, такая, что выполнены следующие равенства:

$$\delta\alpha = \alpha^{\otimes 2}\delta, \quad \tau\delta = -\delta, \quad (\alpha \otimes \delta)\delta - \sigma_{12}(\alpha \otimes \delta)\delta = (\delta \otimes \alpha)\delta,$$

где $\sigma_{12} \in S_3$ и $\tau: L \otimes L \rightarrow L \otimes L$ есть перестановка, $\tau(m \otimes n) = n \otimes m$.

Данное определение совпадает с определением Ном-коалгебры Ли [20], совместимой со структурой H -модуля для L .

Пусть V и W – два H -модуля. H -псевдолинейное отображение из V в W есть k -линейное отображение $\varphi: V \rightarrow (H \otimes H) \otimes_H W$ такое, что

$$\varphi(hv) = ((1 \otimes h) \otimes_H 1)\varphi(v), \quad h \in H, \quad v \in V.$$

Мы обозначаем векторное пространство всех таких отображений как $\text{Chom}(V, W)$. Левое действие группы H на $\text{Chom}(V, W)$ задано следующим образом:

$$(h\varphi)(v) = ((h \otimes 1) \otimes_H 1)\varphi(v).$$

В частном случае $V = W$ мы полагаем $\text{Cend}(V) = \text{Chom}(V, V)$. Всюду в статье, если иное не оговорено особо, мы используем обозначение $V^* = \text{Chom}(V, k)$.

Пусть L – конечный свободный H -модуль с базисом $\{a_i\}_{i=1}^n$. Дуальный базис $\{a_i\}_{i=1}^n$ в $L^* = \text{Chom}(L, k)$ определяется как набор $\{a^j\}_{j=1}^n$, в котором каждый элемент $a^j \in L^*$ задан формулой

$$a^i * (a_j) = (1 \otimes 1) \otimes_H \delta_{ij}.$$

Очевидно, что $\{a^j\}_{j=1}^n$ является набором линейно независимых элементов, которые H -порождают L^* .

ТЕОРЕМА 2.1. 1) Пусть $(L, [\cdot * \cdot], \alpha)$ – конечная свободная Ном- H -псевдоалгебра с $L = \oplus_{i=1}^N H a_i$ и $\alpha: L \rightarrow L$ есть H -морфизм, а псевдоскобка задается как

$$[a_i * a_j] = \sum_{k=1}^N (h_k^{ij} \otimes l_k^{ij}) \otimes_H a_k.$$

Пусть $L^* = \text{Chom}(L, k) = \oplus_{i=1}^N H a^i$ дуальна алгебре L и $\{a^i\}$ – дуальный базис, отвечающий $\{a_i\}$. Пусть $\beta: L^* \rightarrow L^*$ есть дуальный H -морфизм для α . Определим $\delta: L^* \rightarrow L^* \otimes L^*$ как

$$\delta(a^k) = \sum_{i,j} S(h_k^{ij}) a^i \otimes S(l_k^{ij}) a^j$$

и положим $\delta(ha^k) = \Delta(h)\delta(a^k)$. Тогда (L^*, δ, β) является Ном- H -коалгеброй Ли.

2) Наоборот, пусть (L, δ, β) – конечная Ном- H -коалгебра Ли. Тогда левый H -модуль $(L^*, [\cdot_x \cdot], \alpha)$ является конформной Ном- H -алгеброй Ли с x -скобкой

$$[f_x g]_y(a) = \sum f_{x(2)}(a_{(1)}) g_{yS(x_{(1)})}(a_{(2)}), \quad f, g \in L^*, \quad a \in L, \quad x, y \in X = H^*,$$

и $\delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 4.5 в [30].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Ном- H -псевдобиагебра Ли – это такая структура из четырех объектов $(L, [\cdot * \cdot], \delta, \alpha)$, где (L, δ, α) – Ном- H -коалгебра Ли и $(L, [\cdot * \cdot], \alpha)$ – Ном- H -псевдоалгебра Ли, что выполнено условие совместности

$$\delta([x * y]) = x * \delta(y) - (\sigma \otimes_H I)(y * \delta(x)), \quad x, y \in L, \quad (2.3)$$

где

$$x * \delta(y) = \sum_i (f_i S(g_{i(1)}) \otimes 1) \otimes_H (g_{i(2)} a_i \otimes \alpha(y_2)) + \sum_j (k_j S(l_{j(1)}) \otimes 1) \otimes_H (\alpha(y_1) \otimes l_{j(2)} b_j),$$

если

$$[\alpha(x) * y_1] = \sum_i f_i \otimes g_i \otimes_H a_i = \sum_i f_i S(g_{i(1)}) \otimes 1 \otimes_H g_{i(2)} a_i,$$

$$[\alpha(x) * y_2] = \sum_j k_j \otimes l_j \otimes_H b_j = \sum_j k_j S(l_{j(1)}) \otimes 1 \otimes_H l_{j(2)} b_j.$$

Морфизм $f: L \rightarrow L'$ Ном- H -псевдобиагебр есть такой H -морфизм, что $\alpha f = f \alpha$, $f[\cdot * \cdot] = [\cdot * \cdot](f \otimes f)$ и $\delta f = (f \otimes f) \delta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В частном случае одномерной алгебры Хопфа $H = k$ Ном- H -псевдобиагебра Ли – это обычная Ном-биагебра Ли над полем k [29]. В случае $\alpha = I_L$ Ном- H -псевдобиагебра Ли есть H -псевдобиагебра Ли [30].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Условие совместности (2.3) для кокоммутатора $\delta: L \rightarrow L \otimes L$ и псевдоскобки $[\cdot * \cdot]$ в определении Ном- H -псевдобиагебры Ли является условием того, что δ есть 1-коцикл Ном- H -псевдоалгебры Ли $(L, [\cdot * \cdot], \alpha)$ с коэффициентами из $L \otimes L$ в редуцированном комплексе [43].

Следующее предложение дает способ построения Ном- H -псевдобиагебры Ли из заданной Ном- H -псевдобиагебры Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть H' – субалгебра Хопфа в H и $(L, [\cdot * \cdot], \bar{\delta}, \alpha)$ есть Ном- H' -псевдобиагебра Ли. Тогда $(\text{Cur}(L), \gamma, \delta, \beta)$ является Ном- H -псевдобиагеброй Ли с $\text{Cur}(L) = H \otimes_{H'} L$, $\beta = I_H \otimes_{H'} \alpha$, где

$$\delta(f \otimes_{H'} a) = (f_{(1)} \otimes_{H'} a_{(1)}) \otimes (f_{(2)} \otimes_{H'} a_{(2)}),$$

$$\begin{aligned} \gamma(f \otimes_{H'} a) \otimes (g \otimes_{H'} b) &= [(f \otimes_{H'} a) * (g \otimes_{H'} b)] = \\ &= ((f \otimes g) \otimes_H 1)[a * b] = \sum_i (f f_i \otimes g g_i) \otimes_H (1 \otimes_{H'} e_i), \end{aligned}$$

если $\Delta(f) = f_{(1)} \otimes f_{(2)}$, $\bar{\delta}(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ и $[a * b] = \sum_i (f_i \otimes g_i) \otimes_{H'} e_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2.12 из работы [43] $(\text{Cur}(L), \gamma, \beta)$, в которой $\text{Cur}(L) = H \otimes_{H'} L$ и $\beta = I_H \otimes_{H'} \alpha$, является Ном- H -псевдоалгеброй Ли. Далее мы покажем, что тогда $(\text{Cur}(L), \delta, \beta)$ есть Ном- H -коалгебра Ли. Для любого $f \otimes_{H'} a \in H \otimes_{H'} L$ мы имеем

$$\begin{aligned} \delta \beta(f \otimes_{H'} a) &= \delta(f \otimes_{H'} \alpha(a)) = (f_{(1)} \otimes_{H'} \alpha(a)_{(1)}) \otimes (f_{(2)} \otimes_{H'} \alpha(a)_{(2)}) = \\ &= (f_{(1)} \otimes_{H'} \alpha(a_{(1)})) \otimes (f_{(2)} \otimes_{H'} \alpha(a_{(2)})) = (\beta \otimes \beta) \delta(f \otimes_{H'} a), \end{aligned}$$

поэтому $\delta\beta = (\beta \otimes \beta)\delta$. Поскольку $\tau\bar{\delta} = -\bar{\delta}$ и алгебра H кокоммутативна, получаем

$$\begin{aligned}\tau\delta(f \otimes_{H'} a) &= (f_{(2)} \otimes_{H'} a_{(2)}) \otimes (f_{(1)} \otimes_{H'} a_{(1)}) = -(f_{(2)} \otimes_{H'} a_{(1)}) \otimes (f_{(1)} \otimes_{H'} a_{(2)}) = \\ &= -(f_{(1)} \otimes_{H'} a_{(1)}) \otimes (f_{(2)} \otimes_{H'} a_{(2)}) = -\delta(f \otimes_{H'} a),\end{aligned}$$

тем самым $\tau\delta = -\delta$.

Простое вычисление дает

$$\begin{aligned}(\beta \otimes \delta)\delta(f \otimes_{H'} a) &= (\beta \otimes \delta)(f_{(1)} \otimes_{H'} a_{(1)}) \otimes (f_{(2)} \otimes_{H'} a_{(2)}) = \\ &= (f_{(1)} \otimes_{H'} \alpha(a_{(1)})) \otimes (f_{(21)} \otimes_{H'} a_{(21)}) \otimes (f_{(22)} \otimes_{H'} a_{(22)}), \\ \sigma_{12}(\beta \otimes \delta)\delta(f \otimes_{H'} a) &= (f_{(21)} \otimes_{H'} a_{(21)}) \otimes (f_{(1)} \otimes_{H'} \alpha(a_{(1)})) \otimes (f_{(22)} \otimes_{H'} a_{(22)})\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(\delta \otimes \beta)\delta(f \otimes_{H'} a) &= (\delta \otimes \beta)(f_{(1)} \otimes_{H'} a_{(1)}) \otimes (f_{(2)} \otimes_{H'} a_{(2)}) = \\ &= (f_{(11)} \otimes_{H'} a_{(11)}) \otimes (f_{(12)} \otimes_{H'} a_{(12)}) \otimes (f_{(2)} \otimes_{H'} \alpha(a_{(2)})).\end{aligned}$$

Поскольку $(L, \bar{\delta}, \alpha)$ – Ном- H' -коалгебра Ли, мы имеем

$$((\alpha \otimes \bar{\delta})\bar{\delta} - \sigma_{12}(\alpha \otimes \bar{\delta})\bar{\delta})(a) = ((\bar{\delta} \otimes \alpha)\bar{\delta})(a),$$

то есть

$$\alpha(a_{(1)}) \otimes a_{(21)} \otimes a_{(22)} - a_{(21)} \otimes \alpha(a_{(1)}) \otimes a_{(22)} = \sum a_{(11)} \otimes a_{(12)} \otimes \alpha(a_{(2)}).$$

Следовательно, $(\beta \otimes \delta)\delta - \sigma_{12}(\beta \otimes \delta)\delta = (\delta \otimes \beta)\delta$. Отсюда вытекает, что $(\text{Cur}(L), \delta, \beta)$, где $\text{Cur}(L) = H \otimes_{H'} L$, есть Ном- H -коалгебра Ли.

Наконец, проверим условие совместности (2.3):

$$\delta([(f \otimes_{H'} a) * (g \otimes_{H'} b)]) = (f \otimes_{H'} a) * \delta(g \otimes_{H'} b) - (\sigma \otimes_H I)(g \otimes_{H'} b) * \delta(f \otimes_{H'} a).$$

Предположим, что

$$\begin{aligned}[a * b] &= \sum_i (f_i \otimes g_i) \otimes_{H'} e_i, & [\alpha(a) * b_{(1)}] &= \sum_i l_i \otimes k_i \otimes_{H'} c_i, \\ [\alpha(a) * b_{(2)}] &= \sum_i p_i \otimes q_i \otimes_{H'} w_i, & [\alpha(b) * a_{(1)}] &= \sum_i m_i \otimes n_i \otimes_{H'} r_i, \\ [\alpha(b) * a_{(2)}] &= \sum_i s_i \otimes t_i \otimes_{H'} z_i.\end{aligned}$$

Тогда

$$\bar{\delta}([a * b]) = \bar{\delta}\left(\sum_i f_i \otimes g_i \otimes_{H'} e_i\right) = \sum_i (f_i \otimes g_i) \otimes_{H'} (e_{i(1)} \otimes e_{i(2)}), \quad (2.4)$$

$$a * \bar{\delta}(b) = \sum_i (l_i \otimes k_i) \otimes_{H'} (c_i \otimes \alpha(b_{(2)})) + \sum_j (p_j \otimes q_j) \otimes_{H'} (\alpha(b_{(1)}) \otimes w_j), \quad (2.5)$$

$$b * \bar{\delta}(a) = \sum_i (m_i \otimes n_i) \otimes_{H'} (r_i \otimes \alpha(a_{(2)})) + \sum_j (s_j \otimes t_j) \otimes_{H'} (\alpha(a_{(1)}) \otimes z_j), \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \delta[(f \otimes_{H'} a) * (g \otimes_{H'} b)] &= \delta\left(\sum_i (ff_i \otimes gg_i) \otimes_H (1 \otimes_{H'} e_i)\right) = \\ &= \sum_i (ff_i \otimes gg_i) \otimes_H ((1 \otimes_{H'} e_{i(1)}) \otimes (1 \otimes_{H'} e_{i(2)})), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} [\beta(f \otimes_{H'} a) * (g_{(1)} \otimes_{H'} b_{(1)})] &= [(f \otimes_{H'} \alpha(a)) * (g_{(1)} \otimes_{H'} b_{(1)})] = \\ &= \sum_i (fl_i \otimes g_{(1)} k_i) \otimes_H (1 \otimes_{H'} c_i) \end{aligned} \quad (2.8)$$

и

$$\begin{aligned} [\beta(f \otimes_{H'} a) * (g_{(2)} \otimes_{H'} b_{(2)})] &= [(f \otimes_{H'} \alpha(a)) * (g_{(2)} \otimes_{H'} b_{(2)})] = \\ &= \sum_i (fp_i \otimes g_{(2)} q_i) \otimes_H (1 \otimes_{H'} w_i). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из соотношений (2.8) и (2.9) мы имеем

$$\begin{aligned} (f \otimes_{H'} a) * \delta(g \otimes_{H'} b) &= \sum_i (fl_i \otimes g_{(1)} k_i) \otimes_H ((1 \otimes_{H'} c_i) \otimes (g_{(2)} \otimes_{H'} \alpha(b_{(2)}))) + \\ &+ \sum_j (fp_j \otimes g_{(2)} q_j) \otimes_H ((g_{(1)} \otimes_{H'} \alpha(b_{(1)})) \otimes (1 \otimes_{H'} w_j)). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} (g \otimes_{H'} b) * \delta(f \otimes_{H'} a) &= \sum_i (gm_i \otimes f_{(1)} n_i) \otimes_H ((1 \otimes_{H'} r_i) \otimes (f_{(2)} \otimes_{H'} \alpha(a_{(2)}))) + \\ &+ \sum_j (gs_j \otimes f_{(2)} t_j) \otimes_H ((f_{(1)} \otimes_{H'} \alpha(a_{(1)})) \otimes (1 \otimes_{H'} z_j)). \end{aligned}$$

Поскольку $(L, [\cdot * \cdot], \bar{\delta}, \alpha)$ является Ном- H' -псевдобиагеброй Ли, мы имеем

$$\bar{\delta}([a * b]) = a * \bar{\delta}(b) - (\sigma \otimes_{H'} I)(b * \bar{\delta}(a)),$$

тем самым

$$\begin{aligned} \sum_i (f_i \otimes g_i) \otimes_{H'} (e_{i(1)} \otimes e_{i(2)}) &= \\ &= \sum_i (l_i \otimes k_i) \otimes_{H'} (c_i \otimes \alpha(b_{(2)})) + \sum_j (p_j \otimes q_j) \otimes_{H'} (\alpha(b_{(1)}) \otimes w_j) - \\ &- \sum_i (n_i \otimes m_i) \otimes_{H'} (r_i \otimes \alpha(a_{(2)})) - \sum_j (t_j \otimes s_j) \otimes_{H'} (\alpha(a_{(1)}) \otimes z_j). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\delta([(f \otimes_{H'} a) * (g \otimes_{H'} b)]) = (f \otimes_{H'} a) * \delta(g \otimes_{H'} b) - (\sigma \otimes_H I)(g \otimes_{H'} b) * \delta(f \otimes_{H'} a).$$

Следовательно, $(\text{Cur}(L), \gamma, \delta, \beta = I_H \otimes_{H'} \alpha)$ с $\text{Cur}(L) = H \otimes_{H'} L$ является Ном- H -псевдобиагеброй Ли.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. В более общем случае предположим, что $\varphi: H' \rightarrow H$ есть гомоморфизм алгебры Хопфа, $(L, [\cdot * \cdot], \bar{\delta}, \alpha)$ есть Ном- H' -псевдобиа́лгебра Ли. Тогда $(H \otimes_{H'} L, \gamma, \delta, I_H \otimes_{H'} \alpha)$ является Ном- H -псевдобиа́лгеброй Ли, в которой

$$\delta(f \otimes_{H'} a) = (f_{(1)} \otimes_{H'} a_{(1)}) \otimes (f_{(2)} \otimes_{H'} a_{(2)})$$

и

$$\gamma((f \otimes_{H'} a) \otimes (g \otimes_{H'} b)) = \sum_i (f\varphi(f_i) \otimes g\varphi(g_i)) \otimes_H (1 \otimes_{H'} e_i),$$

если

$$\Delta(f) = \sum f_{(1)} \otimes f_{(2)}, \quad \bar{\delta}(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}, \quad [a * b] = \sum_i (f_i \otimes g_i) \otimes_{H'} e_i.$$

Аналогично случаям Ном- H -псевдобиа́лгебр Ли из работы [43] и Ном-биа́лгебр Ли из работы [29] в следующей теореме утверждается, что H -псевдобиа́лгебра Ли деформируется в Ном- H -псевдобиа́лгебру Ли под действием эндоморфизма H -псевдобиа́лгебр Ли.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $(L, [\cdot * \cdot], \delta)$ есть H -псевдобиа́лгебра Ли и $\alpha: L \rightarrow L$ есть морфизм H -псевдобиа́лгебры Ли. Тогда $L_\alpha = (L, [\cdot * \cdot]_\alpha, \delta_\alpha, \alpha)$ является Ном- H -псевдобиа́лгеброй Ли с $[\cdot * \cdot]_\alpha = \alpha[\cdot * \cdot]$ и $\delta_\alpha = \delta\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2.10 из работы [43] $L_\alpha = (L, [\cdot * \cdot]_\alpha, \alpha)$ с $[\cdot * \cdot]_\alpha = \alpha[\cdot * \cdot]$ является Ном- H -псевдоалгеброй Ли. Нетрудно проверить, что $(L, \delta_\alpha, \alpha)$ есть Ном- H -коалгебра Ли. Далее проверяем, что для $[\cdot * \cdot]_\alpha$ и δ_α имеет место условие совместности (2.3). С одной стороны, в силу $\delta\alpha = \alpha^{\otimes 2}\delta$ и $[\cdot * \cdot]_\alpha = \alpha[\cdot * \cdot]$ мы имеем

$$\delta_\alpha([a * b]_\alpha) = \delta\alpha(\alpha[a * b]) = \delta\alpha^2[a * b] = (\alpha^{\otimes 2})^2(\delta([a * b])).$$

С другой стороны, предположив, что

$$\begin{aligned} [a * b_1] &= \sum_i f_i \otimes g_i \otimes_H e_i = \sum_i f_i S(g_{i(1)}) \otimes 1 \otimes_H g_{i(2)} e_i, \\ [a * b_2] &= \sum_j k_j \otimes l_j \otimes_H w_j = \sum_j k_j S(l_{j(1)}) \otimes 1 \otimes_H l_{j(2)} w_j, \end{aligned}$$

с использованием соотношения $[\cdot * \cdot]_\alpha = \alpha[\cdot * \cdot] = [\cdot * \cdot]_\alpha^{\otimes 2}$ мы получаем

$$[\alpha(a) * \alpha(b_1)]_\alpha = \sum_i f_i \otimes g_i \otimes_H \alpha^2(e_i) = \sum_i f_i S(g_{i(1)}) \otimes 1 \otimes_H g_{i(2)} \alpha^2(e_i) \quad (2.10)$$

$$[\alpha(a) * \alpha(b_2)]_\alpha = \sum_j k_j \otimes l_j \otimes_H \alpha^2(w_j) = \sum_j k_j S(l_{j(1)}) \otimes 1 \otimes_H l_{j(2)} \alpha^2(w_j). \quad (2.11)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 a * \delta_\alpha(b) &= a * \delta(\alpha(b)) = \sum_i (f_i S(g_{i(1)}) \otimes 1) \otimes_H (g_{i(2)} \alpha^2(e_i) \otimes \alpha^2(b_2)) + \\
 &\quad + \sum_j (k_i S(l_{j(1)}) \otimes 1) \otimes_H (\alpha^2(b_1) \otimes l_{i(2)} \alpha^2(w_j)) = \\
 &= (\alpha^{\otimes 2})^2 \left(\sum_i (f_i S(g_{i(1)}) \otimes 1) \otimes_H (g_{i(2)} e_i \otimes b_2) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_j (k_i S(l_{j(1)}) \otimes 1) \otimes_H (b_1) \otimes l_{i(2)} w_j \right) = \\
 &= (\alpha^{\otimes 2})^2 (a \cdot \delta(b)). \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

Аналогично

$$b * \delta_\alpha(a) = (\alpha^{\otimes 2})^2 (b \cdot \delta(a)). \tag{2.13}$$

Поскольку $(L, [\cdot * \cdot], \delta)$ есть H -псевдобиалгебра Ли, получаем

$$\delta([a * b]) = a \cdot \delta(b) - (\sigma \otimes_{H'} I)(b \cdot \delta(a)). \tag{2.14}$$

Учитывая соотношения (2.12)–(2.14), окончательно имеем

$$\delta_\alpha([a * b]_\alpha) = a * \delta_\alpha(b) - (\sigma \otimes_H I)(b * \delta_\alpha(a)).$$

ПРИМЕР 2.1. Пусть H – коммутативная алгебра Хопфа, $G(H)$ – множество группоподобных элементов из H . Зафиксируем элемент $p \in H$ так, что $gp = pg$ для любого $g \in G(H)$. Предположим, что $L = Ha \oplus Hb$ есть H -псевдоалгебра Ли ранга 2 с коммутатором $[\cdot * \cdot]$ (продолженным на основе условий косокоммутативности и полутаролинейности), который задан равенствами $[a * a] = 0 = [b * b]$, $[a * b] = (p \otimes 1) \otimes_H b$. Зададим отображение $\delta: L \rightarrow L \otimes L$ следующим образом: $\delta(a) = 0$, $\delta(b) = pa \otimes b - b \otimes pa$. Тогда (L, δ) – H -коалгебра Ли.

Зададим $\alpha: L \rightarrow L$ равенствами $\alpha(a) = ga$, $\alpha(b) = gb$. Тогда α – эндоморфизм H -псевдобиалгебры Ли L . По теореме 2.2 $(L, [\cdot * \cdot]_\alpha, \delta_\alpha, \alpha)$ является Ном- H -псевдобиалгеброй Ли с

$$\begin{aligned}
 [a * a]_\alpha &= [b * b]_\alpha = 0, & [a * b]_\alpha &= (p \otimes 1) \otimes_H gb, \\
 \delta_\alpha(a) &= 0, & \delta_\alpha(b) &= \Delta(g)\delta(b).
 \end{aligned}$$

3. КОГРАНИЧНЫЕ НОМ- H -ПСЕВДОБИАЛГЕБРЫ ЛИ

Пусть $(L, [\cdot * \cdot], \alpha)$ есть Ном- H -псевдоалгебра Ли и $r = \sum_i a_i \otimes b_i \in L \otimes L$. Запишем классическое Ном-уравнение ЯБ:

$$\begin{aligned}
 [[r, r]]^\alpha &= \mu_{-1}^3([a_j, a_i] \otimes \alpha(b_j) \otimes \alpha(b_i)) - \mu_{-2}^4(\alpha(a_i) \otimes [a_j, b_i] \otimes \alpha(b_j)) - \\
 &\quad - \mu_{-3}^2(\alpha(a_i) \otimes \alpha(a_j) \otimes [b_j, b_i]), \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

где $\mu_{-k}^l(\cdot)$ означает, что элемент из H , который стоит в аргументе на k -м месте, действует через посредство антипода на элемент из L , стоящий на l -м месте. Например,

$$\mu_{-1}^3(h \otimes l \otimes m \otimes n) = l \otimes S(h)m \otimes n, \quad l, m, n \in L, \quad h \in H.$$

Если $\alpha = I$, то классическое Ном-уравнение ЯБ (3.1) есть просто классическое уравнение ЯБ (1.1) в H -псевдоалгебре Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Кограничная Ном- H -псевдобиалгебра Ли $(L, [\cdot * \cdot], \delta, \alpha, r)$ образована Ном- H -псевдобиалгеброй $(L, [\cdot * \cdot], \delta, \alpha)$ и элементом $r = \sum a_i \otimes b_i \in L^{\otimes 2}$ таким, что $\alpha^{\otimes 2}(r) = r$ и

$$\delta(a) = a \cdot r = \sum \mu([a, a_i] \otimes \alpha(b_i) + \sigma_{12}(\alpha(a_i) \otimes [a, b_i])), \quad a \in L,$$

где $\mu: H \otimes (L \otimes L) \rightarrow L \otimes L$ задается равенством $\mu(h \otimes m \otimes n) = \Delta(h)(m \otimes n)$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $(L, [\cdot * \cdot])$ – H -псевдоалгебра Ли, $r \in L^{\otimes 2}$ является решением классического Ном-уравнения ЯБ (1.1) и $\alpha: L \rightarrow L$ есть морфизм H -псевдоалгебры. Тогда $(\alpha^{\otimes 2})^n(r)$ (где $n \geq 0$) является решением классического Ном-уравнения ЯБ (3.1) в Ном- H -псевдоалгебре Ли $L_\alpha = (L, [\cdot * \cdot]_\alpha, \alpha)$ с $[\cdot * \cdot]_\alpha = \alpha[\cdot * \cdot]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.10 из [43], $L_\alpha = (L, [\cdot * \cdot]_\alpha, \alpha)$ с $[\cdot * \cdot]_\alpha = \alpha[\cdot * \cdot]$ является Ном- H -псевдоалгеброй Ли. Пусть

$$r = \sum_i a_i \otimes b_i \in L \otimes L, \quad [a_j * a_i] = \sum h^{ji} \otimes 1 \otimes_H c_{ji}.$$

Тогда

$$[a_j, a_i] = \sum h^{ji} \otimes c_{ji}, \quad [a_j * a_i]_\alpha = [\alpha(a_j) * \alpha(a_i)] = \sum h^{ji} \otimes 1 \otimes_H \alpha(c_{ji}).$$

Следовательно,

$$\alpha([a_j, a_i]) = \sum h^{ji} \otimes \alpha(c_{ji}), \quad [a_j, a_i]_\alpha = [\alpha(a_j), \alpha(a_i)] = \sum h^{ji} \otimes \alpha(c_{ji}). \quad (3.2)$$

Отсюда вытекает, что

$$\alpha([a_j, a_i]) = [a_j, a_i]_\alpha = [\alpha(a_j), \alpha(a_i)] \quad (3.3)$$

и

$$\begin{aligned} \mu_{-1}^3([a_j, a_i]_\alpha \otimes \alpha(b_j) \otimes \alpha(b_i)) &= \mu_{-1}^3(h^{ji} \otimes \alpha(c_{ji}) \otimes \alpha(b_j) \otimes \alpha(b_i)) = \\ &= \alpha(c_{ji}) \otimes S(h^{ji})\alpha(b_j) \otimes \alpha(b_i) = \alpha^{\otimes 3}(c_{ji} \otimes S(h^{ji})b_j \otimes b_i) = \\ &= \alpha^{\otimes 3}(\mu_{-1}^3([a_j, a_i] \otimes b_j \otimes b_i)). \end{aligned}$$

Тогда для целых $n \geq 0$ мы имеем

$$\alpha^n([a_j, a_i]) = [a_j, a_i]_{\alpha^n} \quad (3.4)$$

и

$$\mu_{-1}^3([a_j, a_i]_{\alpha^n} \otimes \alpha^n(b_j) \otimes \alpha^n(b_i)) = (\alpha^n)^{\otimes 3}(\mu_{-1}^3([a_j, a_i] \otimes b_j \otimes b_i)). \quad (3.5)$$

Аналогично,

$$\mu_{-2}^4(\alpha^n(a_i) \otimes [a_j, b_i]_{\alpha^n} \otimes \alpha^n(b_j)) = (\alpha^n)^{\otimes 3}(\mu_{-2}^4(a_i \otimes [a_j, b_i] \otimes b_j)), \quad (3.6)$$

$$\mu_{-3}^2(\alpha^n(a_i) \otimes \alpha^n(a_j) \otimes [b_j, b_i]_{\alpha^n}) = (\alpha^n)^{\otimes 3}(\mu_{-3}^2(a_i \otimes a_j \otimes [b_j, b_i])). \quad (3.7)$$

Комбинируя соотношения (3.4)–(3.7), получаем

$$\begin{aligned}
& [(\alpha^{\otimes 2})^n(r), (\alpha^{\otimes 2})^n(r)]^\alpha = \mu_{-1}^3([\alpha^n(a_j), \alpha^n(a_i)]_\alpha \otimes \alpha^{n+1}(b_j) \otimes \alpha^{n+1}(b_i)) - \\
& - \mu_{-2}^4(\alpha^{n+1}(a_i) \otimes [\alpha^n(a_j), \alpha^n(b_i)]_\alpha \otimes \alpha^{n+1}(b_j) - \\
& - \mu_{-3}^2(\alpha^{n+1}(a_i) \otimes \alpha^{n+1}(a_j) \otimes [\alpha^n(b_j), \alpha^n(b_i)]_\alpha) = \\
& = \mu_{-1}^3([a_j, a_i]_{\alpha^{n+1}} \otimes \alpha^{n+1}(b_j) \otimes \alpha^{n+1}(b_i)) - \\
& - \mu_{-2}^4(\alpha^{n+1}(a_i) \otimes [a_j, b_i]_{\alpha^{n+1}} \otimes \alpha^{n+1}(b_j)) - \\
& - \mu_{-3}^2(\alpha^{n+1}(a_i) \otimes \alpha^{n+1}(a_j) \otimes [b_j, b_i]_{\alpha^{n+1}}) = \\
& = (\alpha^{n+1})^{\otimes 3}(\mu_{-1}^3([a_j, a_i] \otimes b_j \otimes b_i) - \mu_{-2}^4(a_i \otimes [a_j, b_i] \otimes b_j) - \mu_{-3}^2(a_i \otimes a_j \otimes [b_j, b_i])) = \\
& = (\alpha^{n+1})^{\otimes 3}([r, r]) = 0.
\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $(L, [\cdot * \cdot], \delta, r)$ есть кограничная H -псевдобиалгебра Ли и $\alpha: L \rightarrow L$ является морфизмом H -псевдоалгебры Ли таким, что $\alpha^{\otimes 2}(r) = r$. Тогда $L_\alpha = (L, [\cdot * \cdot]_\alpha, \delta_\alpha, \alpha, r)$ есть кограничная Нот- H -псевдобиалгебра Ли, в которой $[\cdot * \cdot]_\alpha = \alpha[\cdot * \cdot]$ и $\delta_\alpha = \delta\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $r = \sum a_i \otimes b_i$. Используя соотношения $\alpha[\cdot * \cdot] = [\cdot * \cdot]_\alpha$ и $\alpha^{\otimes 2}(r) = r$, мы получаем

$$\begin{aligned}
\alpha^{\otimes 2}(\delta(a)) &= \alpha^{\otimes 2}\left(\sum(\mu[a, a_i] \otimes b_i + \sigma_{12}(a_i \otimes [a, b_i]))\right) = \\
&= \sum \mu([\alpha(a), \alpha(a_i)] \otimes \alpha(b_i) + \sigma_{12}(\alpha(a_i) \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)])) = \\
&= \sum \mu([\alpha(a), a_i] \otimes b_i + \sigma_{12}(a_i \otimes [\alpha(a), b_i])) = \delta(\alpha(a)).
\end{aligned}$$

Поэтому α – морфизм H -псевдобиалгебры Ли L . По теореме 2.2 $L_\alpha = (L, [\cdot * \cdot]_\alpha, \alpha)$ с $[\cdot * \cdot]_\alpha = \alpha[\cdot * \cdot]$ является Нот- H -псевдобиалгеброй Ли.

Аналогично,

$$\begin{aligned}
\delta_\alpha(a) &= \delta(\alpha(a)) = \sum \mu([\alpha(a), a_i] \otimes b_i + \sigma_{12}(a_i \otimes [\alpha(a), b_i])) = \\
&= \sum \mu([\alpha(a), \alpha(a_i)] \otimes \alpha(b_i) + \sigma_{12}(\alpha(a_i) \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)])) = \\
&= \sum \mu([a, a_i]_\alpha \otimes \alpha(b_i) + \sigma_{12}(\alpha(a_i) \otimes [a, b_i]_\alpha)).
\end{aligned}$$

Отсюда в соответствии с определением 3.1 мы получаем, что L_α – кограничная Нот- H -псевдобиалгебра Ли.

ТЕОРЕМА 3.3. Предположим, что $(L, [\cdot * \cdot], \alpha)$ есть Нот- H -псевдоалгебра Ли и $\mu: H \otimes (L \otimes L) \rightarrow L \otimes L$ задается формулами

$$\mu(h \otimes t \otimes n) = \Delta(h)(t \otimes n), \quad r = \sum_i a_i \otimes b_i \in L \otimes L, \quad \alpha^{\otimes 2}(r) = r.$$

Отображение $\delta_r: L \rightarrow L \otimes L$, заданное как

$$\delta_r(a) = a \cdot r = \sum_i \mu([a, a_i] \otimes \alpha(b_i) + \sigma_{12}(\alpha(a_i) \otimes [a, b_i])), \quad a \in L,$$

является кокоммутатором структуры Нот- H -псевдобиабелевы Ли $(L, [\cdot * \cdot], \alpha)$, если и только если выполнены следующие условия:

- 1) $\delta_{r+r_{21}}(a) = 0$, где $r_{21} = \sum_i b_i \otimes a_i$;
- 2) $\alpha^{\otimes 3}(\mu_3(a \cdot [[r, r]]^\alpha)) = 0$, где $\mu_3(h \otimes m \otimes n \otimes p) = ((\Delta \otimes I)\Delta(h))(m \otimes n \otimes p)$ и

$$a \cdot (r_1 \otimes r_2 \otimes r_3) = a \cdot r_1 \otimes \alpha(r_2) \otimes \alpha(r_3) + \alpha(r_1) \otimes a \cdot r_2 \otimes \alpha(r_3) + \\ + \alpha(r_1) \otimes \alpha(r_2) \otimes a \cdot r_3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $a, b \in L$ положим $[a * b] = h^{a,b} \otimes 1 \otimes_H c_{a,b}$. По определению отображения δ_r мы имеем

$$\begin{aligned} \delta_{r+r_{21}}(a) &= \sum \mu([a, a_i] \otimes \alpha(b_i) + \sigma_{12}(\alpha(a_i) \otimes [a, b_i])) + \\ &\quad + \sum \mu([a, b_i] \otimes \alpha(a_i) + \sigma_{12}(\alpha(b_i) \otimes [a, a_i])) = (\delta_r + \iota\delta_r)(a), \\ \delta_r(a) = a * r &= \sum \mu([a, a_i] \otimes \alpha(b_i) + \sigma_{12}(\alpha(a_i) \otimes [a, b_i])) = \\ &= \sum \mu(h^{a,a_i} \otimes c_{a,a_i} \otimes \alpha(b_i) + \sigma_{12}(\alpha(a_i) \otimes h^{a,b_i} \otimes c_{a,b_i})) = \\ &= \sum h^{a,a_i} \cdot (c_{a,a_i} \otimes \alpha(b_i)) + h^{a,b_i} \cdot (\alpha(a_i) \otimes c_{a,b_i}), \\ \sigma\delta_r(a) &= \sigma \left(\sum h^{a,a_i} \cdot (c_{a,a_i} \otimes \alpha(b_i)) + h^{a,b_i} \cdot (\alpha(a_i) \otimes c_{a,b_i}) \right) = \\ &= \sum h^{a,a_i} \cdot (\alpha(b_i) \otimes c_{a,a_i}) + h^{a,b_i} \cdot (c_{a,b_i} \otimes \alpha(a_i)) = \\ &= \sum \mu([a, b_i] \otimes \alpha(a_i) + \sigma_{12}(\alpha(b_i) \otimes [a, a_i])). \end{aligned}$$

Следовательно, $\delta_r(a) + \sigma\delta_r(a) = \delta_{r+r_{21}}(a)$. Таким образом, условие кососимметричности отображения δ_r эквивалентно $\delta_{r+r_{21}}(a) = 0$.

С учетом (3.2) и (3.3) имеем

$$\begin{aligned} (\delta_r \otimes \alpha)\delta_r(a) &= (\delta_r \otimes \alpha)(h^{a,a_i} \cdot (c_{a,a_i} \otimes \alpha(b_i)) + h^{a,b_i} \cdot (\alpha(a_i) \otimes c_{a,b_i})) = \\ &= h_{(1)}^{a,a_i} \delta_r(c_{a,a_i}) \otimes h_{(2)}^{a,a_i} \alpha^2(b_i) + h_{(1)}^{a,b_i} \delta_r(\alpha(a_i)) \otimes h_{(2)}^{a,b_i} \alpha(c_{a,b_i}) = \\ &= h^{a,a_i} \cdot (\delta_r(c_{a,a_i}) \otimes \alpha^2(b_i)) + h^{a,b_i} \cdot (\delta_r(\alpha(a_i)) \otimes \alpha(c_{a,b_i})) = \\ &= h^{a,a_i} \cdot (h^{c_{a,a_i},a_j} \cdot (c_{c_{a,a_i},a_j} \otimes \alpha(b_j)) \otimes \alpha^2(b_i) + \\ &\quad + h^{c_{a,a_i},b_j} \cdot (\alpha(a_j) \otimes c_{c_{a,a_i},b_j}) \otimes \alpha^2(b_i)) + \\ &\quad + h^{a,b_i} \cdot (h^{a,a_j} \cdot (\alpha(c_{a_i,a_j}) \otimes \alpha^2(b_j)) \otimes \alpha(c_{a,b_i}) + \\ &\quad + h^{a_i,b_j} \cdot (\alpha^2(a_j) \otimes \alpha(c_{a_i,b_j})) \otimes \alpha(c_{a,b_i})) = \\ &= \mu_1(\mu_2^{3,4}([a, a_i], a_j] \otimes \alpha(b_j) \otimes \alpha^2(b_i))) + \\ &\quad + \mu_2(\mu_3^{1,4}(\alpha(a_j) \otimes [a, a_i], b_j] \otimes \alpha^2(b_i))) + \\ &\quad + \mu_3(\mu_1^{2,3}([\alpha(a_i), \alpha(a_j)] \otimes \alpha^2(b_j) \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)])) = \\ &\quad + \mu_3(\mu_2^{1,3}(\alpha^2(a_j) \otimes [\alpha(a_i), \alpha(b_j)] \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)])), \end{aligned}$$

где $\mu_k^{r,s}(\cdot)$ означает, что элемент из H , стоящий в аргументе на k -м месте, действует на элемент из $L \otimes L$, образованный r -м и s -м аргументами; $\mu_k(\cdot)$ означает, что

элемент из H , стоящий на k -м месте, действует на элемент из $L \otimes L \otimes L$, образованный всеми остальными элементами в аргументе. Так, для всех $m, n, p \in L$ и $f, g \in H$

$$\begin{aligned}\mu_2^{1,3}(m \otimes f \otimes n \otimes g \otimes p) &= f_{(1)}m \otimes f_{(2)}n \otimes g \otimes p, \\ \mu_3(m \otimes n \otimes f \otimes p) &= (\Delta \otimes I)\Delta(f)(m \otimes n \otimes p).\end{aligned}$$

Пусть $\sum_{\text{с.р.}}$ означает сумму по всем циклическим перестановкам сомножителей в произведении $L \otimes L \otimes L$. Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{\text{с.р.}}(\delta_r \otimes \alpha)\delta_r(a) &= \mu_1(\mu_2^{3,4}([a, a_i], a_j) \otimes \alpha(b_j) \otimes \alpha^2(b_i))) + \\ &+ \mu_2(\mu_3^{1,4}(\alpha(a_j) \otimes [a, a_i], b_j) \otimes \alpha^2(b_i))) + \\ &+ \mu_3(\mu_1^{2,3}([\alpha(a_i), \alpha(a_j)] \otimes \alpha^2(b_j) \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)])) + \\ &+ \mu_3(\mu_2^{1,3}(\alpha^2(a_j) \otimes [\alpha(a_i), \alpha(b_j)] \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)])) + \\ &+ \mu_2(\mu_3^{4,5}(\alpha^2(b_i) \otimes [a, a_i], a_j) \otimes \alpha(b_j))) + \\ &+ \mu_3(\mu_4^{2,5}(\alpha^2(b_i) \otimes \alpha(a_j) \otimes [a, a_i], b_j))) + \\ &+ \mu_1(\mu_3^{4,5}([\alpha(a), \alpha(b_i)] \otimes [\alpha(a_i), \alpha(a_j)] \otimes \alpha^2(b_j))) + \\ &+ \mu_1(\mu_4^{3,5}([\alpha(a), \alpha(b_i)] \otimes \alpha^2(a_j) \otimes [\alpha(a_i), \alpha(b_j)])) + \\ &+ \mu_3(\mu_4^{1,5}(\alpha(b_j) \otimes \alpha^2(b_i) \otimes [a, a_i], a_j))) + \\ &+ \mu_1(\mu_2^{3,5}([a, a_i], b_j) \otimes \alpha^2(b_i) \otimes \alpha(a_j))) + \\ &+ \mu_2(\mu_4^{1,5}(\alpha^2(b_j) \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)] \otimes [\alpha(a_i), \alpha(a_j)])) + \\ &+ \mu_2(\mu_1^{2,5}([\alpha(a_i), \alpha(b_j)] \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)] \otimes \alpha^2(a_j))).\end{aligned}$$

В силу соотношения (3.3) и условия косокоммутативности (2.1) мы имеем

$$\begin{aligned}\mu_3(a \cdot [[r, r]]^\alpha) &= \mu_3(a \cdot (\mu_{-1}^3([a_j, a_i] \otimes \alpha(b_j) \otimes \alpha(b_i)) - \\ &- \mu_{-2}^4(\alpha(a_i) \otimes [a_j, b_i] \otimes \alpha(b_j)) - \mu_{-3}^2(\alpha(a_i) \otimes \alpha(a_j) \otimes [b_j, b_i])) = \\ &= -\mu_1(\mu_2^{3,4}(\mathcal{F} \otimes I \otimes I \otimes I)([a, [a_i, a_j]] \otimes \alpha^2(b_j) \otimes \alpha^2(b_i))) + \\ &+ \mu_2(\mu_1^{2,5}([\alpha(a_i), \alpha(a_j)] \otimes [a, \alpha(b_i)] \otimes \alpha^2(b_j))) + \\ &+ \mu_3((\mu_{-1}^3([\alpha(a_j), \alpha(a_i)] \otimes \alpha^2(b_j) \otimes [a, \alpha(b_i)])) + \\ &+ \mu_1(\mu_3^{4,5}([a, \alpha(a_i)] \otimes [\alpha(b_i), \alpha(a_j)] \otimes \alpha^2(b_j))) + \\ &+ \mu_2(\mu_3^{4,5}(I \otimes \mathcal{F} \otimes I \otimes I)(\alpha^2(a_j) \otimes [a, [b_j, a_i]] \otimes \alpha^2(b_i))) + \\ &+ \mu_3(\mu_{-2}^1(\alpha^2(a_j) \otimes [\alpha(b_j), \alpha(a_i)] \otimes [a, \alpha(b_i)])) + \\ &+ \mu_1(\mu_4^{3,5}([a, \alpha(a_i)] \otimes \alpha^2(a_j) \otimes [\alpha(b_i), \alpha(b_j)])) - \\ &- \mu_3^{14}(\alpha^2(a_i) \otimes (I \otimes \rho(\alpha(b_i)))(\mu_1^{2,3}([a, \alpha(a_j)] \otimes \alpha(b_j))) + \\ &+ \mu_3(\mu_4^{2,5}(I \otimes I \otimes \mathcal{F} \otimes I)(\alpha^2(a_i) \otimes \alpha^2(a_j) \otimes [a, [b_i, b_j]])),\end{aligned}$$

где $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье, заданное в п. 2 настоящей статьи, и $\rho(b)(a) = [a, b]$ для всех $a, b \in L$. Далее проверяем, что

$$\alpha^{\otimes 3}(\mu_3(a \cdot [[r, r]]^\alpha)) + \sum_{\text{с.р.}}(\delta_r \otimes \alpha)\delta_r(a) = 0.$$

Аналогично доказательству равенства (3.5) мы можем показать, что $\alpha^{\otimes 3}$ коммутирует с каждым из $\mu_k^{r,s}$, μ_{-k}^l и μ_k .

Повторим всю процедуру доказательства, используя, что $\alpha^{\otimes 2}(r) = r$. Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned} & \mu_3(\mu_1^{2,3}([\alpha(a_i), \alpha(a_j)] \otimes \alpha^2(b_j) \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)])) + \\ & + \alpha^{\otimes 3}(\mu_3((\mu_{-1}^3([\alpha(a_j), \alpha(a_i)] \otimes \alpha^2(b_j) \otimes [a, \alpha(b_i)]))) = 0. \end{aligned}$$

В самом деле, в силу условия косокоммутативности (2.1)

$$\begin{aligned} & \mu_3(\mu_1^{2,3}([\alpha(a_i), \alpha(a_j)] \otimes \alpha^2(b_j) \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)])) = \\ & = -\mu_3(\mu_1^{2,3}(h_{(-1)}^{a_j, a_i} \otimes h_{(2)}^{a_j, a_i} \alpha(c_{a_j, a_i}) \otimes \alpha^2(b_j) \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)])) = \\ & = -\mu_3(h_{(-1)(1)}^{a_j, a_i} h_{(2)}^{a_j, a_i} \alpha(c_{a_j, a_i}) \otimes h_{(-1)(2)}^{a_j, a_i} \alpha^2(b_j) \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)]) = \\ & = -\mu_3(\alpha(c_{a_j, a_i}) \otimes S(h^{a_j, a_i}) \alpha^2(b_j) \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)]) = \\ & = -\mu_3(\mu_{-1}^3([\alpha(a_j), \alpha(a_i)] \otimes \alpha^2(b_j) \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)])) = \\ & = -\alpha^{\otimes 3} \mu_3((\mu_{-1}^3([\alpha(a_j), \alpha(a_i)] \otimes \alpha^2(b_j) \otimes [a, \alpha(b_i)]))). \end{aligned}$$

Используя вновь условие (2.1) и равенство $S^2 = I$, мы получаем

$$\begin{aligned} & \alpha^{\otimes 3}(\mu_3(\mu_{-2}^1(\alpha^2(a_j) \otimes [\alpha(b_j), \alpha(a_i)] \otimes [a, \alpha(b_i)]))) = \\ & = -\alpha^{\otimes 3}(\mu_3(\mu_{-2}^1(\alpha^2(a_j) \otimes S(h_{(1)}^{a_i, b_j}) \otimes h_{(2)}^{a_i, b_j} \alpha(c_{a_i, b_j}) \otimes [a, \alpha(b_i)]))) = \\ & = -\alpha^{\otimes 3}(\mu_3(S(S(h_{(1)}^{a_i, b_j})) \alpha^2(a_j) \otimes h_{(2)}^{a_i, b_j} \alpha(c_{a_i, b_j}) \otimes [a, \alpha(b_i)])) = \\ & = -\alpha^{\otimes 3}(\mu_3(h_{(1)}^{a_i, b_j} \alpha^2(a_j) \otimes h_{(2)}^{a_i, b_j} \alpha(c_{a_i, b_j}) \otimes [a, \alpha(b_i)])) = \\ & = -\alpha^{\otimes 3}(\mu_3(\mu_2^{1,3} \alpha^2(a_j) \otimes [\alpha(a_i), \alpha(b_j)] \otimes [a, \alpha(b_i)])) = \\ & = -\mu_3(\mu_2^{1,3} \alpha^3(a_j) \otimes \alpha([\alpha(a_i), \alpha(b_j)]) \otimes \alpha([a, \alpha(b_i)])) = \\ & = -\mu_3(\mu_2^{1,3} \alpha^2(a_j) \otimes [\alpha(a_i), \alpha(b_j)] \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)]). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \mu_3(\mu_2^{1,3}(\alpha^2(a_j) \otimes [\alpha(a_i), \alpha(b_j)] \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)])) + \\ & + \alpha^{\otimes 3}(\mu_3(\mu_{-2}^1(\alpha^2(a_j) \otimes [\alpha(b_j), \alpha(a_i)] \otimes [a, \alpha(b_i)]))) = 0. \end{aligned}$$

Используя Нот-тождество Якоби (2.2), мы получаем

$$\begin{aligned} & \mu_1(\mu_2^{3,4}([a, a_i], a_j] \otimes \alpha(b_j) \otimes \alpha^2(b_i))) - \\ & - \alpha^{\otimes 3}(\mu_1(\mu_2^{3,4}(\mathcal{F} \otimes I \otimes I \otimes I)([a, [a_i, a_j]] \otimes \alpha^2(b_j) \otimes \alpha^2(b_i)))) = \\ & = \mu_2^{3,4}([a, a_i], a_j] \otimes \alpha(b_j) \otimes \alpha^2(b_i))) - \\ & - \mu_1(\mu_2^{3,4}(\mathcal{F} \otimes I \otimes I \otimes I)((\alpha([a, [a_i, a_j]])) \otimes \alpha^3(b_j) \otimes \alpha^3(b_i))) = \\ & = -\mu_1(\mu_2^{3,4}((\mathcal{F} \sigma \otimes I \otimes I \otimes I)([\alpha(a_i), [a, a_j]] \otimes \alpha^2(b_j) \otimes \alpha^2(b_i)))) = \\ & = -\mu_1(\mu_2^{3,5}([a, a_j], \alpha(a_i)] \otimes \alpha^2(b_j) \otimes \alpha^2(b_i))). \end{aligned}$$

В соответствии с уже доказанным п. 1 теоремы мы имеем

$$\begin{aligned}
& \mu_1(\mu_2^{3,5}([a, a_i], b_j) \otimes \alpha^2(b_i) \otimes \alpha(a_j)) - \mu_1(\mu_2^{3,5}([a, a_j], \alpha(a_i)) \otimes \alpha^2(b_j) \otimes \alpha^2(b_i)) + \\
& \quad + \mu_3(\mu_4^{1,5}(\alpha(b_j) \otimes \alpha^2(b_i) \otimes [a, a_i], a_j)) = \\
& = \mu_1(\mu_2^{3,5}([a, a_j], b_i) \otimes \alpha^2(b_j) \otimes \alpha(a_i) + [a, a_j], \alpha(a_i)) \otimes \alpha^2(b_j) \otimes \alpha^2(b_i)) + \\
& \quad + \mu_3(\mu_4^{1,5}(\alpha(b_j) \otimes \alpha^2(b_i) \otimes [a, a_i], a_j)) = \\
& = -\mu_3(\mu_4^{1,5}(\alpha^2(b_i) \otimes \alpha^2(b_j) \otimes [a, a_j], \alpha(a_i) + \alpha(a_i) \otimes \alpha^2(b_j) \otimes [a, a_j], b_i)) + \\
& \quad + \mu_3(\mu_4^{1,5}(\alpha(b_j) \otimes \alpha^2(b_i) \otimes [a, a_i], a_j)) = \\
& = -\mu_3(\mu_4^{1,5}(\alpha(a_i) \otimes \alpha^2(b_j) \otimes [a, a_j], b_i)).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned}
& \mu_1(\mu_3^{4,5}([\alpha(a), \alpha(b_i)] \otimes [\alpha(a_i), \alpha(a_j)] \otimes \alpha^2(b_j))) + \\
& \quad + \alpha^{\otimes 3} \mu_1(\mu_3^{4,5}([a, \alpha(a_i)] \otimes [\alpha(b_i), \alpha(a_j)] \otimes \alpha^2(b_j))) = \\
& = \mu_1(\mu_3^{4,5}([\alpha(a), b_i] \otimes [a_i, a_j] \otimes \alpha(b_j))) + \\
& \quad + \mu_1(\mu_3^{4,5}([\alpha(a), \alpha^2(a_i)] \otimes \alpha([\alpha(b_i), \alpha(a_j)]) \otimes \alpha^3(b_j))) = \\
& = \mu_1(\mu_3^{4,5}([\alpha(a), b_i] \otimes [a_i, a_j] \otimes \alpha(b_j))) + \mu_1(\mu_3^{4,5}([\alpha(a), a_i] \otimes [b_i, a_j] \otimes \alpha(b_j))) = \\
& = \mu_1(\mu_3^{4,5}(I \otimes \rho(a_j) \otimes I)(\alpha([a, b_i]) \otimes \alpha(a_i) \otimes \alpha(b_j) + \alpha([a, a_i]) \otimes \alpha(b_i) \otimes \alpha(b_j))) = \\
& = \mu_1(\mu_3^{4,5}(\alpha \otimes \rho(a_j) \otimes I)([a, b_i] \otimes \alpha(a_i) \otimes \alpha(b_j) + [a, a_i] \otimes \alpha(b_i) \otimes \alpha(b_j))) = \\
& = \mu_2^{3,4} \{ ((\alpha \otimes \rho(a_j)) \mu_1^{2,3}([a, b_i] \otimes \alpha(a_i) + [a, a_i] \otimes \alpha(b_i))) \otimes \alpha(b_j) \} = \\
& = \mu_2^{3,4} \{ ((\alpha \otimes \rho(a_j)) \mu_1^{2,3}(-\alpha(b_i) \otimes [a, a_i] + \alpha(a_i) \otimes [a, b_i])) \} = \\
& = -\mu_2(\mu_3^{4,5}(\alpha^2(b_i) \otimes [a, a_i], a_j) \otimes \alpha(b_j) + \alpha^2(a_i) \otimes [a, b_i], a_j) \otimes \alpha(b_j)).
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
& \mu_2(\mu_3^{4,5}(\alpha^2(b_i) \otimes [a, a_i], a_j) \otimes \alpha(b_j)) - \\
& \quad - \mu_2(\mu_3^{4,5}(\alpha^2(b_i) \otimes [a, a_i], a_j) \otimes \alpha(b_j) + \alpha^2(a_i) \otimes [a, b_i], a_j) \otimes \alpha(b_j)) = \\
& = -\mu_2(\mu_3^{4,5}(\alpha^2(a_i) \otimes [a, b_i], a_j) \otimes \alpha(b_j)).
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
& \mu_1(\mu_4^{3,5}([\alpha(a), \alpha(b_i)] \otimes \alpha^2(a_j) \otimes [\alpha(a_i), \alpha(b_j)])) + \\
& \quad + \alpha^{\otimes 3}(\mu_1(\mu_4^{3,5}([a, \alpha(a_i)] \otimes \alpha^2(a_j) \otimes [\alpha(b_i), \alpha(b_j)]))) = \\
& = \mu_1(\mu_4^{3,5}([\alpha(a), b_i] \otimes \alpha(a_j) \otimes [a_i, b_j])) + \\
& \quad + \mu_1(\mu_4^{3,5}([\alpha(a), \alpha^2(a_i)] \otimes \alpha^3(a_j) \otimes \alpha([\alpha(b_i), \alpha(b_j)]))) = \\
& = \mu_1(\mu_4^{3,5}([\alpha(a), b_i] \otimes \alpha(a_j) \otimes [a_i, b_j])) + \mu_1(\mu_4^{3,5}([\alpha(a), a_i] \otimes \alpha(a_j) \otimes \alpha([b_i, b_j]))) = \\
& = \mu_1(\mu_4^{3,5}(I \otimes I \otimes I \otimes \rho(b_j))([\alpha(a), b_i] \otimes \alpha(a_j) \otimes a_i + [\alpha(a), a_i] \otimes \alpha(a_j) \otimes b_i)) = \\
& = \mu_3^{2,4} \{ ((I \otimes I \otimes \rho(b_j)) \mu_1^{2,4}([\alpha(a), b_i] \otimes \alpha(a_j) \otimes a_i + [\alpha(a), a_i] \otimes \alpha(a_j) \otimes b_i)) \} = \\
& = -\mu_3^{2,4} \{ ((\alpha \otimes I \otimes \rho(b_j)) \mu_3^{1,4}(\alpha(b_i) \otimes \alpha(a_j) \otimes [a, a_i] + \alpha(a_i) \otimes \alpha(a_j) \otimes [a, b_i])) \} = \\
& = -\mu_3(\mu_4^{2,5}(\alpha^2(b_i) \otimes \alpha(a_j) \otimes [a, a_i], b_j) + \alpha^2(a_i) \otimes \alpha(a_j) \otimes [a, b_i], b_j)),
\end{aligned}$$

и очевидно, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \mu_3(\mu_4^{2,5}(\alpha^2(b_i) \otimes \alpha(a_j) \otimes [[a, a_i], b_j])) - \\ & - \mu_3(\mu_4^{2,5}(\alpha^2(b_i) \otimes \alpha(a_j) \otimes [[a, a_i], b_j] + \alpha^2(a_i) \otimes \alpha(a_j) \otimes [[a, b_i], b_j])) = \\ & = -\mu_3(\mu_4^{2,5}(\alpha^2(a_i) \otimes \alpha(a_j) \otimes [[a, b_i], b_j])). \end{aligned}$$

Аналогично нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} & \mu_2(\mu_1^{2,5}([\alpha(a_i), \alpha(b_j)] \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)] \otimes \alpha^2(a_j))) + \\ & + \alpha^{\otimes 3}(\mu_2(\mu_1^{2,5}([\alpha(a_i), \alpha(a_j)] \otimes [a, \alpha(b_i)] \otimes \alpha^2(b_j)))) = \\ & = \mu_2(\mu_1^{2,5}([a_i, b_j] \otimes [a, b_i] \otimes a_j + [a_i, a_j] \otimes [a, b_i] \otimes b_j)) = \\ & = \mu_2(\mu_1^{2,5}([\alpha(a_i), \alpha(b_j)] \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)] \otimes \alpha^2(a_j))) + \\ & + \alpha^{\otimes 3}(\mu_2(\mu_1^{2,5}([\alpha(a_i), \alpha(a_j)] \otimes [a, \alpha(b_i)] \otimes \alpha^2(b_j)))) = \\ & = \mu_2(\mu_1^{2,5}([a_i, b_j] \otimes [\alpha(a), b_i] \otimes \alpha(a_j))) + \\ & + \mu_2(\mu_1^{2,5}(\alpha([\alpha(a_i), \alpha(a_j)]) \otimes \alpha([a, \alpha(b_i)]) \otimes \alpha^3(b_j))) = \\ & = \mu_2(\mu_1^{2,5}([a_i, b_j] \otimes [\alpha(a), b_i] \otimes \alpha(a_j))) + \mu_2(\mu_1^{2,5}([a_i, a_j] \otimes [\alpha(a), b_i] \otimes \alpha(b_j))) = \\ & = -\mu_2(\mu_4^{1,5}(\alpha(a_j) \otimes [\alpha(a), b_i] \otimes [a_i, b_j] + \alpha(b_j) \otimes [\alpha(a), b_i] \otimes [a_i, a_j])). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \mu_2(\mu_4^{1,5}(\alpha^2(b_j) \otimes [\alpha(a), \alpha(b_i)] \otimes [\alpha(a_i), \alpha(a_j)])) - \\ & - \mu_2(\mu_4^{1,5}(\alpha(a_j) \otimes [\alpha(a), b_i] \otimes [a_i, b_j] + \alpha(b_j) \otimes [\alpha(a), b_i] \otimes [a_i, a_j])) = \\ & = -\mu_2(\mu_4^{1,5}(\alpha(a_j) \otimes [\alpha(a), b_i] \otimes [a_i, b_j])). \end{aligned}$$

Расчеты показывают, что

$$\begin{aligned} & \mu_2(\mu_3^{1,4}(\alpha(a_j) \otimes [[a, a_i], b_j] \otimes \alpha^2(b_i))) + \\ & + \alpha^{\otimes 3}(\mu_2(\mu_3^{4,5}(I \otimes \mathcal{F} \otimes I \otimes I)(\alpha^2(a_j) \otimes [a, [b_j, a_i]] \otimes \alpha^2(b_i)))) - \\ & - \mu_2(\mu_3^{4,5}(\alpha^2(a_j) \otimes [[a, b_j], a_i] \otimes \alpha(b_i))) = \\ & = \mu_2(\mu_3^{1,4}(\alpha^2(a_j) \otimes [[a, a_i], \alpha(b_j)] \otimes \alpha^2(b_i))) + \\ & + \mu_2(\mu_3^{4,5}(I \otimes \mathcal{F} \otimes I \otimes I)(\alpha^2(a_j) \otimes [\alpha(a), [b_j, a_i]] \otimes \alpha^2(b_i))) - \\ & - \mu_2(\mu_3^{4,5}(\alpha^2(a_j) \otimes [[a, b_j], \alpha(a_i)] \otimes \alpha^2(b_i))) = \\ & = -\mu_2(\mu_3^{4,5}(\alpha^2(a_j) \otimes (\mathcal{F} \otimes I)(\sigma \otimes I)[\alpha(b_j), [a, a_i]] \otimes \alpha^2(b_i))) + \\ & + \mu_2(\mu_3^{4,5}(I \otimes \mathcal{F} \otimes I \otimes I)(\alpha^2(a_j) \otimes [\alpha(a), [b_j, a_i]] \otimes \alpha^2(b_i))) - \\ & - \mu_2(\mu_3^{4,5}(\alpha^2(a_j) \otimes [[a, b_j], \alpha(a_i)] \otimes \alpha^2(b_i))) = 0, \end{aligned}$$

где последнее равенство вытекает из Ном-тождества Якоби (2.2). Теперь, используя условие косокоммутативности (2.1) и утверждение, сделанное в п. 1 настоящей

теоремы, мы получаем

$$\begin{aligned}
& -\alpha^{\otimes 3}(\mu_3^{14}(\alpha^2(a_i) \otimes (I \otimes \rho(\alpha(b_i)))(\mu_1^{2,3}([a, \alpha(a_j)] \otimes \alpha(b_j)))) - \\
& \quad - \mu_3(\mu_4^{1,5}(\alpha(a_i) \otimes \alpha^2(b_j) \otimes [[a, a_j], b_i])) - \mu_2(\mu_4^{1,5}(\alpha(a_j) \otimes [\alpha(a), b_i] \otimes [a_i, b_j])) - \\
& \quad - \mu_3(\alpha(a_i) \otimes (\alpha^2 \otimes \rho(b_i))\mu_2^{1,3}(a_j \otimes [a, b_j])) = \\
& = \mu_3(\mu_4^{25}(\alpha^2(a_i) \otimes \alpha^2(a_j) \otimes [[a, b_j], \alpha(b_i)])) = \\
& = -\mu_3(\mu_4^{25}(\alpha^2(a_i) \otimes \alpha^2(a_j) \otimes (\mathcal{F} \otimes I)(\sigma \otimes I)([\alpha(b_i), [a, b_j]]))).
\end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
& \alpha^{\otimes 3}(\mu_3(\mu_4^{2,5}(I \otimes I \otimes \mathcal{F} \otimes I)(\alpha^2(a_i) \otimes \alpha^2(a_j) \otimes [a, [b_i, b_j]]))) - \\
& \quad - \mu_3(\mu_4^{2,5}(\alpha^2(a_i) \otimes \alpha(a_j) \otimes [[a, b_i], b_j])) = \\
& = \mu_3(\mu_4^{25}(I \otimes I \otimes \mathcal{F} \otimes I)(\alpha^2(a_i) \otimes \alpha^2(a_j) \otimes [a, [b_i, b_j]])) - \\
& \quad - \mu_3(\mu_4^{2,5}(\alpha^2(a_i) \otimes \alpha(a_j) \otimes [[a, b_i], b_j])) = \\
& = \mu_3(\mu_4^{25}(I \otimes I \otimes \mathcal{F} \otimes I)(\alpha^2(a_i) \otimes \alpha^2(a_j) \otimes [\alpha(a), [b_i, b_j]])) - \\
& \quad - \mu_3(\mu_4^{2,5}(\alpha^2(a_i) \otimes \alpha^2(a_j) \otimes [[a, b_i], \alpha(b_j)]))).
\end{aligned}$$

Используя Ном-тождество Якоби (2.2), мы получаем

$$\begin{aligned}
& \alpha^{\otimes 3}(\mu_3(\mu_4^{2,5}(I \otimes I \otimes \mathcal{F} \otimes I)(\alpha^2(a_i) \otimes \alpha^2(a_j) \otimes [a, [b_i, b_j]]))) - \\
& \quad - \mu_3(\mu_4^{2,5}(\alpha^2(a_i) \otimes \alpha(a_j) \otimes [[a, b_i], b_j])) - \\
& \quad - \mu_3(\mu_4^{25}(\alpha^2(a_i) \otimes \alpha^2(a_j) \otimes (\mathcal{F} \otimes I)(\sigma \otimes I)([\alpha(b_i), [a, b_j]]))) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\alpha^{\otimes 3}(\mu_3(a \cdot [[r, r]]^\alpha)) + \sum_{\text{с.р.}} (\delta_r \otimes \alpha) \delta_r(a) = 0.$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ном-биалгебры Ли исследовались в векторных пространствах, а Ном- H -псевдобиалгебры Ли рассматриваются в H -модулях, где H – кокоммутативная алгебра Хопфа. Мы можем заменить H любой квазитреугольной алгеброй Хопфа. В свете того что аннуляторная алгебра для ассоциативной псевдоалгебры $\text{Cend}H$ является дринфельдовским дублем алгебры H , мы уверены, что имеется тесная связь между теорией H -псевдобиалгебр Ли и квантовыми группами. Мы исследовали Ном- H -псевдобиалгебры Ли, скручивая тождества с помощью морфизмов H -модулей. Такая возрастающая сложность приводит к большей гибкости алгебраических структур и открывает новые возможности их применения в математической физике.

С другой стороны, имеются нетривиальные примеры H -псевдобиалгебр Ли [30], [31], и в соответствии с теоремой 2.2 мы можем построить Ном- H -псевдобиалгебры Ли из заданных H -псевдобиалгебр Ли. Используя предложение 2.1, мы можем получить структуры Ном- H -псевдобиалгебр из некоторых Ном- H -псевдобиалгебр Ли. Эти примеры показывают, что теория Ном- H -псевдобиалгебр Ли более богата,

чем теория классических Ном-биалгебр Ли и теория H -псевдобиалгебр Ли. На основании этого мы ожидаем, что будущие исследования Ном- H -псевдобиалгебр Ли могут оказаться полезными как с прикладной точки зрения, так и с точки зрения более глубокого понимания Ном- H -псевдобиалгебр Ли и H -псевдобиалгебр Ли.

Список литературы

- [1] B. Bakalov, A. D'Andrea, V. G. Кас, "Theory of finite pseudoalgebras", *Adv. Math.*, **162**:1 (2001), 1–140.
- [2] A. D'Andrea, V. G. Кас, "Structure theory of finite conformal algebras", *Selecta Math. (N. S.)*, **4**:3 (1998), 377–418.
- [3] В. Г. Кац, *Вертексные алгебры для начинающих*, МЦНМО, М., 2005.
- [4] E. Cartan, "Les groupes de transformation continus, infinis, simples", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, **26** (1909), 93–161.
- [5] V. Guillemin, "A Jordan–Hölder decomposition for a certain class of infinite dimensional Lie algebras", *J. Differential Geom.*, **2**:3 (1968), 313–345.
- [6] V. Guillemin, "Infinite-dimensional primitive Lie algebras", *J. Differential Geom.*, **4**:3 (1970), 257–282.
- [7] I. Dorfman, *Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations*, Nonlinear Science: Theory and Applications, John Wiley and Sons, Chichester, 1993.
- [8] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, "Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория", *УМН*, **44**:6(270) (1989), 29–98.
- [9] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, "Гамильтоновы операторы и классическое уравнение Янга–Бакстера", *Функц. анализ и его прил.*, **16**:4 (1982), 1–9.
- [10] О. И. Мохов, "О скобках Пуассона типа Дубровина–Новикова (ДН-скобки)", *Функц. анализ и его прил.*, **22**:4 (1988), 92–93.
- [11] X. Xu, "Equivalence of conformal superalgebras to Hamiltonian superoperators", *Algebra Colloq.*, **8**:1 (2001), 63–92.
- [12] Е. И. Зельманов, "Об одном классе локальных трансляционно инвариантных алгебр Ли", *Докл. АН СССР*, **292**:6 (1987), 1294–1297.
- [13] N. Aizawa, H. Sato, "q-deformation of the Virasoro algebra with central extension", *Phys. Lett. B*, **256**:2 (1991), 185–190.
- [14] C. Daskaloyannis, "Generalized deformed Virasoro algebras", *Modern Phys. Lett. A*, **7**:9 (1992), 809–816.
- [15] N. H. Hu, "q-Witt algebras, q-Lie algebras, q-holomorph structure and representations", *Algebra Colloq.*, **6**:1 (1999), 51–70.
- [16] H. Ataguema, A. Makhlouf, S. Silvestrov, "Generalization of n -ary Nambu algebras and beyond", *J. Math. Phys.*, **50**:8 (2009), 083501, 15 pp.
- [17] J. Arnlind, A. Makhlouf, S. Silvestrov, "Ternary Hom–Nambu–Lie algebras induced by Hom–Lie algebras", *J. Math. Phys.*, **51**:4 (2010), 043515, 11 pp.
- [18] J. T. Hartwig, D. Larsson, S. D. Silvestrov, "Deformations of Lie algebras using σ -derivations", *J. Algebra*, **295**:2 (2006), 314–361.
- [19] A. Makhlouf, S. D. Silvestrov, "Hom–algebra structures", *J. Gen. Lie Theory Appl.*, **2**:2 (2008), 51–64.
- [20] A. Makhlouf, S. Silvestrov, "Hom–algebras and Hom–coalgebras", *J. Algebra Appl.*, **9**:4 (2010), 553–589, arXiv:0811.0400.
- [21] A. Makhlouf, S. D. Silvestrov, "Hom–Lie admissible Hom–coalgebras and Hom–Hopf algebras", *Generalized Lie Theory in Mathematics, Physics and Beyond*, eds. S. Silvestrov, E. Paal, V. Abramov, A. Stolin, Springer, Berlin, 2009, 189–206.

- [22] D. Yau, “On n -ary Hom–Nambu and Hom–Nambu–Lie algebras”, *J. Geom. Phys.*, **62**:2 (2012), 506–522, arXiv: 1004.2080.
- [23] F. Ammar, Z. Ejbehi, A. Makhlouf, “Cohomology and deformations of Hom–algebras”, *J. Lie Theory*, **21**:4 (2011), 813–836, arXiv: 1005.0456.
- [24] F. Ammar, S. Mabrouk, A. Makhlouf, “Representations and cohomology of n -ary multiplicative Hom–Nambu–Lie algebras”, *J. Geom. Phys.*, **61**:10 (2011), 1898–1913.
- [25] A. Makhlouf, S. Silvestrov, “Notes on 1-parameter formal deformations of Hom–associative and Hom–Lie algebras”, *Forum Math.*, **22**:4 (2010), 715–739, arXiv: 0712.3130.
- [26] D. Yau, “Hom–algebras and homology”, *J. Lie Theory*, **19**:2 (2009), 409–421.
- [27] D. Yau, “The Hom–Yang–Baxter equation, Hom–Lie algebras, and quasi-triangular bialgebras”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:16 (2009), 165202, 12 pp.
- [28] D. Yau, “The Hom–Yang–Baxter equation and Hom–Lie algebras”, *J. Math. Phys.*, **52**:5 (2011), 053502, 19 pp.
- [29] D. Yau, “The classical Hom–Yang–Baxter equation and Hom–Lie bialgebras”, *Internat. Electron. J. Algebra*, **17** (2015), 11–45.
- [30] C. Boyallian, J. I. Liberati, “On pseudo-bialgebras”, *J. Algebra*, **372** (2012), 1–34.
- [31] J. Liberati, “On conformal bialgebras”, *J. Algebra*, **319**:6 (2008), 2295–2318.
- [32] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантовый метод обратной задачи. I”, *ТМФ*, **40**:2 (1979), 194–220.
- [33] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга”, *УМН*, **34**:5(209) (1979), 13–63.
- [34] R. J. Baxter, “One dimensional anisotropic Heisenberg chain”, *Ann. Phys.*, **70**:2 (1972), 323–327.
- [35] C. N. Yang, “Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction”, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:23 (1967), 1312–1315.
- [36] O. Babelon, C. M. Viallet, *Integrable models, Yang–Baxter equations, and quantum groups. Part I*, Trieste preprint SISSA 54 EP, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [37] O. Babelon, C. M. Viallet, “Hamiltonian structures and Lax equations”, *Phys. Lett. B*, **237**:3–4 (1990), 411–416.
- [38] И. М. Гельфанд, И. В. Чередник, “Абстрактный гамильтонов формализм для классических пучков Янга–Бакстера”, *УМН*, **38**:3(231) (1983), 3–21.
- [39] В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993.
- [40] C. M. Bai, L. Guo, X. Ni, “Nonabelian generalized Lax pairs, the classical Yang–Baxter equation and PostLie algebras”, *Commun. Math. Phys.*, **297**:2 (2010), 553–596.
- [41] В. Г. Дринфельд, “Квантовые группы”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VIII*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **155**, 1986, 18–49.
- [42] Y. H. Sheng, C. M. Bai, “A new approach to Hom–Lie bialgebras”, *J. Algebra*, **399** (2014), 232–250.
- [43] Q. X. Sun, “Generalization of H -pseudoalgebraic structures”, *J. Math. Phys.*, **53**:1 (2012), 012105, 18 pp.
- [44] Q. X. Sun, “On n -ary Hom–Lie H -pseudoalgebras”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:19 (2012), 195208, 13 pp.
- [45] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Mathematics Lecture Note Series, Benjamin, New York, 1969.

Поступила в редакцию 8.03.2016,
после доработки 16.11.2016