Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Да-Вэй Цзо, И-Тянь Гао, Юй-Цзе Фэн, Лун Сюэ, Юй-Хао Сунь, Волны-убийцы в бароклинных течениях, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 2, 291–303

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:54:40

© 2017 г. Да-Вэй Цзо^{*†}, И-Тянь Гао^{*}, Юй-Цзе Фэн^{*},
Лун Сюэ^{*}, Юй-Хао Сунь^{*}

ВОЛНЫ-УБИЙЦЫ В БАРОКЛИННЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Изучается *AB*-система, которую можно использовать для описания маргинально неустойчивых бароклинных волновых пакетов в геофизических жидкостях. С помощью высших шагов обобщенного преобразования Дарбу получены решения в виде волн-убийц; проанализированы их распространение и взаимодействие. Получены светлые волны-убийцы с одним и двумя пиками. Положения и величины максимумов и минимумов амплитуды волнового пакета и поправка к среднему потоку, которая возникает из-за саморектификации нелинейной волны, выражены через параметр, описывающий состояние основного течения, параметр, отвечающий за взаимодействие волнового пакета и средней скорости потока, и через групповую скорость. Показано, что взаимодействие волнового пакета и среднего потока, а также групповая скорость влияют на распространение и взаимодействие амплитуды волнового пакета и саморектификацию нелинейной волны.

Ключевые слова: бароклинные течения, волны-убийцы, преобразование Дарбу.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9192>

1. ВВЕДЕНИЕ

Бароклинные волны помогают понять поведение крупномасштабных атмосферных потоков и другие явления геофизической гидродинамики [1]. Бароклинная неустойчивость как понятие, возникающее при изучении атмосферы и океана, описывает процесс, с помощью которого потенциальная энергия неустойчивого среднего потока может быть преобразована в кинетическую энергию возмущений [2], [3]. Для

Работа выполнена при поддержке National Natural Science Foundation of China (грант № 11272023), Open Fund of State Key Laboratory of Information Photonics and Optical Communications, Beijing University of Posts and Telecommunications (грант IPOC2013B008), а также Foundation of Hebei Education Department of China (грант QN2015051).

^{*}Ministry of Education, Key Laboratory of Fluid Mechanics, Laboratory of Computational Fluid Mechanics, Beihang University, Beijing, China. E-mail: gaoyt163@163.com

[†]Department of Mathematics and Physics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang, China

подобных возмущений существуют два различных источника энергии, возникающих в подобных неустойчивых системах [4]: горизонтальный (север-юг) сдвиг среднего движения и вертикальный сдвиг потенциальной энергии, связанный с градиентом плотности север-юг [2]–[4].

Одно из нелинейных эволюционных уравнений, описывающих двойные источники энергии таких возмущений, представляет собой двуслойную систему, в которой скорости в каждом слое постоянны, но сдвиг скоростей отличен от нуля [4]. В окрестности минимального критического вертикального сдвига двуслойная модель маргинально устойчивых волновых пакетов описывается AB -системой [5]–[9]

$$A_{xt} = \alpha A + \beta AB, \quad B_x = -\frac{1}{2}\gamma(AA^*)_t, \quad (1)$$

где A – амплитуда бароклинного волнового пакета, B – поправка к среднему потоку, возникающая из-за саморектификации бароклинной волны [5], α – параметр состояния основного потока, β отвечает за взаимодействие волнового пакета и среднего потока, γ – групповая скорость [8], а звездочка обозначает комплексное сопряжение. Данная система может быть использована для описания маргинально неустойчивых бароклинных волновых пакетов в геофизических жидкостях. Для системы (1) были получены пары Лакса и периодические решения [7], а также законы сохранения и мультисолитонные решения, выведенные из преобразования Дарбу (ПД) [6].

С другой стороны, объектом изучения был феномен волн-убийц, возникающих ниоткуда и бесследно исчезающих [10]–[15]. Такие волны характеризуются “большими” амплитудами и возникают в открытом море [16], [11], в конденсатах Бозе–Эйнштейна [17], в оптических системах и сверхжидкостях [18]–[21]. Это явление можно объяснить с помощью решений типа волн-убийц и модуляционной неустойчивости [20], [22], [23]. Были предложены различные методы получения решений нелинейных эволюционных уравнений для волн-убийц: с использованием алгебро-геометрического подхода [13], [24], билинейного метода Хироты [25], модификаций ПД [20], [21] и обобщенного ПД [18]. Тем не менее, насколько нам известно, решения типа волн-убийц и обобщенные ПД системы (1) до сих пор не получены.

В настоящей работе с помощью символьных вычислений [26]–[28] получено обобщенное ПД для системы (1) (см. раздел 2). В разделе 3 выведены решения типа волн-убийц, отвечающие высшим шагам обобщенного ПД. В разделе 4 обсуждаются распространение и взаимодействие волн-убийц. Раздел 5 содержит заключение.

2. ОБОБЩЕННОЕ ПД ДЛЯ СИСТЕМЫ (1)

В данном разделе получено обобщенное ПД для системы (1). Пара Лакса системы (1) имеет вид [7], [29], [30]

$$\vec{\Psi}_x = U\vec{\Psi}, \quad \vec{\Psi}_t = V\vec{\Psi}, \quad (2)$$

где $\vec{\Psi} = (\psi_1, \psi_2)^T$ и

$$U = \begin{bmatrix} -i\lambda & \frac{1}{2}\sqrt{\beta\gamma}A \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\beta\gamma}A^* & i\lambda \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{i(\alpha + \beta B)}{4\lambda} & -\frac{i\sqrt{\beta\gamma}A_t}{4\lambda} \\ -\frac{i\sqrt{\beta\gamma}A_t^*}{4\lambda} & -\frac{i(\alpha + \beta B)}{4\lambda} \end{bmatrix}; \quad (3)$$

здесь λ – параметр, не зависящий от x и t , а ψ_1 и ψ_2 – функции от x и t , верхний индекс Т означает транспонирование. Условие совместности $U_t - V_x + UV - VU = 0$ приводит [7] к системе (1).

Напомним кратко ПД для системы (1) [6]. Верхним индексом $[k]$ у матрицы или функции будем обозначать матрицы или функции, которые получены в результате ПД или обобщенного ПД порядка k .

Предположим, что $A = \mathcal{A}$, $B = \mathcal{B}$ – решения системы (1) и $(\phi_1, \phi_2)^T$ – решение пары Лакса (2) при $A = \mathcal{A}$, $B = \mathcal{B}$ и $\lambda = \lambda_1$, где $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ϕ_1 и ϕ_2 – функции от x и t , а λ_1 – параметр, не зависящий от x и t . Матрица ПД M имеет вид [6]

$$M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2^* \\ \phi_2 & -\phi_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2^* \\ \phi_2 & -\phi_1^* \end{bmatrix}^{-1}, \quad (4)$$

где верхний индекс -1 обозначает обратную матрицу. Таким образом, решения $\mathcal{A}^{[1]}$ и $\mathcal{B}^{[1]}$ системы (1) записываются как [6]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{[1]} &= \mathcal{A} - \frac{4i}{\sqrt{\beta\gamma}} \frac{(\lambda_1 - \lambda_1^*)\phi_1\phi_2^*}{\phi_1\phi_1^* + \phi_2\phi_2^*}, \\ \mathcal{B}^{[1]} &= \mathcal{B} - \frac{4i}{\beta} \frac{(\lambda_1 - \lambda_1^*)[\phi_1\phi_1^*(\phi_2\phi_2^*)_t - \phi_2\phi_2^*(\phi_1\phi_1^*)_t]}{(\phi_1\phi_1^* + \phi_2\phi_2^*)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из ПД (4) мы получаем обобщенное ПД для системы (1). Пусть $\vec{\Theta}(\zeta_1 + \delta)$ – специальное векторное решение пары Лакса (2) при $\lambda = \zeta_1 + \delta$, где $\vec{\Theta}$ – векторная функция от x и t , а ζ_1 и δ – параметры, не зависящие от x и t [18]. Разлагая функцию $\vec{\Theta}$ в точке ζ_1 , имеем

$$\vec{\Theta}(\zeta_1 + \delta) = \vec{\Xi}_0 + \vec{\Xi}_1\delta + \vec{\Xi}_2\delta^2 + \dots, \quad (6)$$

где

$$\vec{\Xi}_\ell = \frac{1}{\ell!} \frac{\partial^\ell}{\partial \zeta^\ell} \vec{\Theta}(\zeta_1 + \delta) \Big|_{\delta=0}, \quad \ell = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

суть векторные функции от x и t . Тогда $\vec{\Xi}_0$ – решение пары Лакса (2) при $\lambda = \zeta_1$ [18].

С учетом ПД (4) матрица $\mathcal{M}^{[1]}$ первого шага обобщенного ПД для системы (1) записывается как

$$\mathcal{M}^{[1]} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12}^* \\ \varphi_{12} & -\varphi_{11}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12}^* \\ \varphi_{12} & -\varphi_{11}^* \end{bmatrix}^{-1}, \quad (8)$$

где $(\varphi_{11}, \varphi_{12})^T = \vec{\Xi}_0$, а φ_{11} и φ_{12} – функции от x и t . Таким образом, решения $\mathcal{A}^{[1]}$ и $\mathcal{B}^{[1]}$ для системы (1) на первом шаге имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{[1]} &= \mathcal{A} - \frac{4i}{\sqrt{\beta\gamma}} \frac{(\zeta_1 - \zeta_1^*)\varphi_{11}\varphi_{12}^*}{\varphi_{11}\varphi_{11}^* + \varphi_{12}\varphi_{12}^*}, \\ \mathcal{B}^{[1]} &= \mathcal{B} - \frac{4i}{\beta} \frac{(\zeta_1 - \zeta_1^*)[\varphi_{11}\varphi_{11}^*(\varphi_{12}\varphi_{12}^*)_t - \varphi_{12}\varphi_{12}^*(\varphi_{11}\varphi_{11}^*)_t]}{(\varphi_{11}\varphi_{11}^* + \varphi_{12}\varphi_{12}^*)^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

На втором шаге обобщенного ПД, используя ПД (8) для вектора (7) и переходя к пределу [18], получаем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{[\mathcal{M}^{[1]}|_{\lambda=\zeta_1+\delta}]\vec{\Theta}}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{[\delta + \mathcal{M}^{[1]}|_{\lambda=\zeta_1}]\vec{\Theta}}{\delta} = \vec{\Xi}_0 + \mathcal{M}^{[1]}|_{\lambda=\zeta_1} \vec{\Xi}_1 = (\varphi_{21}, \varphi_{22})^T, \quad (10)$$

где φ_{21} и φ_{22} – функции от x и t . Таким образом, мы нашли решение $(\varphi_{21}, \varphi_{22})^T$ пары Лакса (2) при $A = A^{[1]}$, $B = B^{[1]}$ и $\lambda = \zeta_1$ [18]. Далее получаем матрицу $\mathcal{M}^{[2]}$ второго шага обобщенного ПД,

$$\mathcal{M}^{[2]} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi_{21} & (\varphi_{22})^* \\ \varphi_{22} & -(\varphi_{21})^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{21} & (\varphi_{22})^* \\ \varphi_{22} & -(\varphi_{21})^* \end{bmatrix}^{-1}, \quad (11)$$

что позволяет найти решения $A^{[2]}$ и $B^{[2]}$ системы (1) на втором шаге:

$$\begin{aligned} A^{[2]} &= A^{[1]} - \frac{4i}{\sqrt{\beta\gamma}} \frac{(\zeta_1 - \zeta_1^*)\varphi_{21}\varphi_{22}^*}{\varphi_{21}\varphi_{21}^* + \varphi_{22}\varphi_{22}^*}, \\ B^{[2]} &= B^{[1]} - \frac{4i}{\beta} \frac{(\zeta_1 - \zeta_1^*)[\varphi_{21}\varphi_{21}^*(\varphi_{22}\varphi_{22}^*)_t - \varphi_{22}\varphi_{22}^*(\varphi_{21}\varphi_{21}^*)_t]}{(\varphi_{21}\varphi_{21}^* + \varphi_{22}\varphi_{22}^*)^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{M}^{[2]}|_{\lambda=\zeta_1+\delta})(\mathcal{M}^{[1]}|_{\lambda=\zeta_1+\delta})\vec{\Theta}}{\delta^2} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\delta + \mathcal{M}^{[2]}|_{\lambda=\zeta_1})(\delta + \mathcal{M}^{[1]}|_{\lambda=\zeta_1})\vec{\Theta}}{\delta^2} = \\ &= \vec{\Xi}_0 + (\mathcal{M}^{[2]}|_{\lambda=\zeta_1} + \mathcal{M}^{[1]}|_{\lambda=\zeta_1})\vec{\Xi}_1 + \mathcal{M}^{[2]}|_{\lambda=\zeta_1}\mathcal{M}^{[1]}|_{\lambda=\zeta_1}\vec{\Xi}_2 = (\varphi_{31}, \varphi_{32})^T, \end{aligned} \quad (13)$$

где φ_{31} и φ_{32} – функции от x и t . Таким образом, мы нашли решение $(\varphi_{31}, \varphi_{32})^T$ пары Лакса (2) при $A = A^{[2]}$, $B = B^{[2]}$ и $\lambda = \zeta_1$ [18], что позволяет найти решения $A^{[3]}$ и $B^{[3]}$ системы (1) на третьем шаге:

$$\begin{aligned} A^{[3]} &= A^{[2]} - \frac{4i}{\sqrt{\beta\gamma}} \frac{(\zeta_1 - \zeta_1^*)\varphi_{31}\varphi_{32}^*}{\varphi_{31}\varphi_{31}^* + \varphi_{32}\varphi_{32}^*}, \\ B^{[3]} &= B^{[2]} - \frac{4i}{\beta} \frac{(\zeta_1 - \zeta_1^*)[\varphi_{31}\varphi_{31}^*(\varphi_{32}\varphi_{32}^*)_t - \varphi_{32}\varphi_{32}^*(\varphi_{31}\varphi_{31}^*)_t]}{(\varphi_{31}\varphi_{31}^* + \varphi_{32}\varphi_{32}^*)^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Продолжая процесс, получим ПД и решения уравнения (1) на четвертом и пятом шагах.

3. РЕШЕНИЯ ТИПА ВОЛН-УБИЙЦ ДЛЯ СИСТЕМЫ (1)

Рассмотрим решения системы (1) типа волн-убийц. Примем как затравочные решения метода неопределенных коэффициентов плоские волны $A = i \cos t - \sin t$, $B = -\alpha/\beta$ [20]. Тогда решения пары Лакса (2) при $\lambda = -(h/2)i\sqrt{\gamma\beta}$ и данных затравочных решениях A и B имеют вид

$$\vec{\Theta}(x, t; h) = \begin{bmatrix} i(a_1 e^\eta - a_2 e^{-\eta}) e^{it/2} \\ (a_2 e^\eta - a_1 e^{-\eta}) e^{-it/2} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где h – параметр, не зависящий от x и t , а прочие параметры задаются как

$$a_1 = \sqrt{\frac{h + \sqrt{h^2 - 1}}{h^2 - 1}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{h - \sqrt{h^2 - 1}}{h^2 - 1}}, \quad \eta = -\frac{i\sqrt{h^2 - 1}}{2h}(-ih\sqrt{\beta\gamma}x + t).$$

Для разложения функции $\vec{\Theta}(x, t; h)$ в точке $h = 1$ положим $h = 1 + \epsilon^2$, где ϵ – параметр, не зависящий от x и t , и получим

$$\vec{\Theta}(x, t; \epsilon) = \vec{\Xi}_0 + \vec{\Xi}_1 \epsilon^2 + \vec{\Xi}_2 \epsilon^4 + \dots, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Xi_0 &= \begin{bmatrix} e^{it/2}(i+t-ix\sqrt{\beta\gamma}) \\ -ie^{-it/2}(-i+t-ix\sqrt{\beta\gamma}) \end{bmatrix}, \quad \Xi_1 = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_1 \end{bmatrix}, \quad \Xi_2 = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix}, \\
 \hat{\theta}_1 &= \frac{1}{12}ie^{it/2}(-3+9it-3t^2+it^3+3x^2\beta\gamma-3itx^2\beta\gamma- \\
 &\quad -3x\sqrt{\beta\gamma}+6itx\sqrt{\beta\gamma}+3t^2x\sqrt{\beta\gamma}-x^3\beta\gamma\sqrt{\beta\gamma}), \\
 \hat{\theta}_1 &= \frac{1}{12}e^{-it/2}(3+9it+3t^2+it^3-3x^2\beta\gamma-3itx^2\beta\gamma- \\
 &\quad -3x\sqrt{\beta\gamma}-6itx\sqrt{\beta\gamma}+3t^2x\sqrt{\beta\gamma}-x^3\beta\gamma\sqrt{\beta\gamma}), \\
 \hat{\theta}_2 &= \frac{1}{480}ie^{it/2}(45-345it+210t^2-90it^3+5t^4-it^5+ \\
 &\quad +30x^2\beta\gamma+30itx^2\beta\gamma-30t^2x^2\beta\gamma+10it^3x^2\beta\gamma+5x^4\beta^2\gamma^2-5itx^4\beta^2\gamma^2+ \\
 &\quad +15x\sqrt{\beta\gamma}-180itx\sqrt{\beta\gamma}-150t^2x\sqrt{\beta\gamma}-20it^3x\sqrt{\beta\gamma}-5t^4x\sqrt{\beta\gamma}- \\
 &\quad -30x^3\beta\gamma\sqrt{\beta\gamma}+20itx^3\beta\gamma\sqrt{\beta\gamma}+10t^2x^3\beta\gamma\sqrt{\beta\gamma}-x^5\beta^2\gamma^2\sqrt{\beta\gamma}), \\
 \hat{\theta}_2 &= \frac{1}{480}e^{-it/2}(-45-345it-210t^2-90it^3-5t^4-it^5- \\
 &\quad -30x^2\beta\gamma+30itx^2\beta\gamma+30t^2x^2\beta\gamma+10it^3x^2\beta\gamma-5x^4\beta^2\gamma^2-5itx^4\beta^2\gamma^2+ \\
 &\quad +15x\sqrt{\beta\gamma}+180itx\sqrt{\beta\gamma}-150t^2x\sqrt{\beta\gamma}+20it^3x\sqrt{\beta\gamma}-5t^4x\sqrt{\beta\gamma}- \\
 &\quad -30x^3\beta\gamma\sqrt{\beta\gamma}-20itx^3\beta\gamma\sqrt{\beta\gamma}+10t^2x^3\beta\gamma\sqrt{\beta\gamma}-x^5\beta^2\gamma^2\sqrt{\beta\gamma}).
 \end{aligned} \tag{17}$$

С помощью выражений (9) и формулы для Ξ_0 из соотношений (17) можно получить решения $A^{[1]}$ и $B^{[1]}$ типа волн-убийц на первом шаге:

$$A^{[1]} = -\frac{ie^{it}(-3+4it+t^2+x^2\beta\gamma)}{1+t^2+x^2\beta\gamma}, \quad B^{[1]} = \frac{8tx\beta\gamma-\alpha(1+t^2+x^2\beta\gamma)^2}{\beta(1+t^2+x^2\beta\gamma)^2}. \tag{18}$$

С помощью выражений (12) и формулы для Ξ_1 из соотношений (17) можно получить решения $A^{[2]}$ и $B^{[2]}$ типа волн-убийц на втором шаге:

$$A^{[2]} = \frac{\hat{\hat{A}}^{[2]}}{\hat{A}^{[2]}} e^{it}, \quad B^{[2]} = -\frac{\hat{\hat{B}}^{[2]}}{\hat{B}^{[2]}}, \tag{19}$$

где величины $\hat{\hat{A}}^{[2]}$, $\hat{A}^{[2]}$, $\hat{\hat{B}}^{[2]}$ и $\hat{B}^{[2]}$ представлены в приложении А.

С помощью выражений (14) и формулы для Ξ_2 из соотношений (17) можно получить решения $A^{[3]}$ и $B^{[3]}$ типа волн-убийц на третьем шаге:

$$A^{[3]} = \frac{\hat{\hat{A}}^{[3]}}{\hat{A}^{[3]}} e^{it}, \quad B^{[3]} = -\frac{\hat{\hat{B}}^{[3]}}{\hat{B}^{[3]}}, \tag{20}$$

где $\hat{\hat{A}}^{[3]}$, $\hat{A}^{[3]}$, $\hat{\hat{B}}^{[3]}$ и $\hat{B}^{[3]}$ представлены в приложении В.

Продолжая этот процесс, можно получить решения типа волн-убийц на четвертом и на пятом шагах.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН-УБИЙЦ

В данном разделе изучаются взаимодействие и распространение волн-убийц. Сначала рассмотрим решения на первом шаге.

Амплитуда $|A|$ бароклинного волнового пакета имеет один максимум (один гребень волны) $|A| = 3$ при $t = x = 0$ и два минимума (впадины) $|A| = 0$ при $t = 0$, $x = \pm\sqrt{3}/\sqrt{\beta\gamma}$. Поправка B к среднему течению при саморектификации бароклинной волны имеет два максимума (гребня волны)

$$B = -\frac{\alpha}{\beta} + \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \quad \text{при} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2\beta\gamma}}, \quad t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{или при} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2\beta\gamma}}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и два минимума (впадины)

$$B = -\frac{\alpha}{\beta} - \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \quad \text{при} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2\beta\gamma}}, \quad t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{или при} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2\beta\gamma}}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Параметр α , описывающий состояние основного течения, не влияет на расположение гребней и впадин волн величины $|A|$, но влияет на вертикальную координату величины B ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty, \\ t \rightarrow \infty}} B^{[1]} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Параметр β , отвечающий за взаимодействие волнового пакета и среднего течения, и групповая скорость γ влияют на расположение впадин амплитуды $|A|$, а также на расположение и высоту волновых пакетов и впадин величины B .

Что касается свойств волн-убийц на высших шагах, то нужно решить алгебраическое уравнение порядка m (где $m \geq 5$). Для этого мы использовали символьные вычисления и построили графики, описывающее взаимодействие волн-убийц, которые получены как решения на высших шагах ПД, и распространение характеристик A и B .

Рис. 1 и 2 показывают, что с точки зрения направления распространения волн-убийц, полученных как решения на первом шаге, параметр β взаимодействия волнового пакета и среднего течения и групповая скорость γ влияют на B , но не влияют на $|A|$: рис. 1а и 2а совпадают. Рис. 1б демонстрирует, что направление распространения волн-убийц первого шага соответствует положительному направлению оси x при $\beta = 1.5$, $\gamma = 1.3$ и $\alpha = 1$; при этом рис. 2б демонстрирует, что направление распространения соответствует отрицательному направлению оси x при $\beta = -1.5$, $\gamma = -1.3$ и $\alpha = 1$.

Рис. 4 и 5 показывают, что с точки зрения взаимодействия волн-убийц, полученных как решения на втором шаге, параметры β и γ влияют на B но не влияют на $|A|$: форма взаимодействия волн на рис. 4б (при $\beta = 1.2$, $\gamma = 1.3$, $\alpha = 1$) отличается от формы на рис. 5б (при $\beta = -1.2$, $\gamma = -1.3$ и $\alpha = 1$). Кроме того, рис. 4, 5 демонстрируют, что $|A|$ и B – светлые волны-убийцы.

Рис. 2 и 3 показывают, что параметр β и групповая скорость γ влияют на расстояние распространения волн-убийц, полученных как решения на первом шаге: расстояние на рис. 3 (при $\beta = 1.5$, $\gamma = 4$ и $\alpha = 1$) больше, чем на рис. 2 (при $\beta = -1.5$, $\gamma = -1.3$ и $\alpha = 1$). Кроме того, рис. 1–3 показывают, что $|A|$ и B представляют собой светлые волны-убийцы; $|A|$ имеет один гребень, а B – два.

Рис. 1. Графики функций $|A|$ (а) и B (б) для решений (18) типа волн-убийц на первом шаге при $\beta = 1.5$, $\gamma = 1.3$, $\alpha = 1$.

Рис. 2. То же, что на рис. 1, но при $\beta = -1.5$, $\gamma = -1.3$, $\alpha = 1$.

Рис. 3. То же, что на рис. 1 и 2, но при $\beta = 1.5$, $\gamma = 4$, $\alpha = 1$.

Рис. 4. Взаимодействие волн-убийц, полученных как решения (19) на втором шаге при $\beta = 1.2$, $\gamma = 1.3$, $\alpha = 1$: графики функций $|A|$ (а) и B (б).

Рис. 5. То же, что на рис. 4, но при $\beta = -1.2$, $\gamma = -1.3$, $\alpha = 1$.

Рис. 6. Взаимодействие волн-убийц, полученных как решения (20) на третьем шаге при $\beta = 1.2$, $\gamma = 1.3$, $\alpha = 1$: графики функций $|A|$ (а) и B (б).

Рис. 7. То же, что на рис. 6, но при $\beta = -1.2$, $\gamma = -1.3$, $\alpha = 1$.

Рис. 6 и 7 показывают, что при взаимодействии волн-убийц, полученных как решения на третьем шаге, их поведение похоже на поведение волн-убийц, полученных на втором шаге (см. рис. 4 и 5). Для решений на третьем шаге параметры β и γ влияют на характеристику B волн-убийц, но не влияют на $|A|$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы изучили систему (1), которая используется для описания маргинально неустойчивых бароклиновых волновых пакетов в геофизических жидкостях. Получены следующие результаты:

- 1) найдены решения (20) типа волн-убийц на высших шагах и обобщенное ПД (11) для системы (1);
- 2) для волн-убийц, полученных как решения на первом шаге, положения и величины гребней и впадин амплитуды волны $|A|$ бароклинового волнового пакета и величины B поправки к среднему потоку, возникающей из-за саморектификации бароклиновой волны, выражены через параметр α , описывающий состояние основного течения, параметр β , отвечающий за взаимодействие волнового пакета и среднего потока, и волновую скорость γ ;
- 3) изучены взаимодействие и распространение волн-убийц.

Рис. 1–3 демонстрируют, что параметр β и групповая скорость γ влияют на направление и расстояние распространения поправки B к среднему потоку, но не влияют на параметр $|A|$ бароклинового волнового пакета; $|A|$ и B – светлые волн-убийцы, $|A|$ имеет один гребень, а B – два. Рис. 4 и 5, отражающие взаимодействие волн-убийц, полученных как решения на втором шаге, показывают, что β и γ влияют на B но не влияют на $|A|$. Рис. 6 и 7 демонстрируют схожее поведение волн-убийц в случае решений на третьем шаге с волнами-убийцами, полученными как решения на втором шаге.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

$$\begin{aligned}\widehat{A}^{[2]} = & 45i + 36t + 99it^2 + 120t^3 - 57it^4 - 12t^5 + it^6 - 45ix^2\beta\gamma - 72tx^2\beta\gamma - \\ & - 18it^2x^2\beta\gamma - 24t^3x^2\beta\gamma + 3it^4x^2\beta\gamma - 9ix^4\beta^2\gamma^2 - \\ & - 12tx^4\beta^2\gamma^2 + 3it^2x^4\beta^2\gamma^2 + ix^6\beta^3\gamma^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{A}^{[2]} = & 9 + 27t^2 + 3t^4 + t^6 + 27x^2\beta\gamma + 54t^2x^2\beta\gamma + \\ & + 3t^4x^2\beta\gamma + 3x^4\beta^2\gamma^2 + 3t^2x^4\beta^2\gamma^2 + x^6\beta^3\gamma^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{B}^{[2]} = & 81\alpha + 486t^2\alpha + 783t^4\alpha + 180t^6\alpha + 63t^8\alpha + 6t^{10}\alpha + t^{12}\alpha - \\ & - 1944tx\beta\gamma - 864t^3x\beta\gamma - 1296t^5x\beta\gamma - 864t^7x\beta\gamma - 24t^9x\beta\gamma + 486x^2\alpha\beta\gamma + \\ & + 2430t^2x^2\alpha\beta\gamma + 3132t^4x^2\alpha\beta\gamma + 540t^6x^2\alpha\beta\gamma + 126t^8x^2\alpha\beta\gamma + 6t^{10}x^2\alpha\beta\gamma - \\ & - 864tx^3\beta^2\gamma^2 - 288t^3x^3\beta^2\gamma^2 - 288t^5x^3\beta^2\gamma^2 - 96t^7x^3\beta^2\gamma^2 + 783x^4\alpha\beta^2\gamma^2 + \\ & + 3132t^2x^4\alpha\beta^2\gamma^2 + 3258t^4x^4\alpha\beta^2\gamma^2 + 348t^6x^4\alpha\beta^2\gamma^2 + 15t^8x^4\alpha\beta^2\gamma^2 - \\ & - 1296tx^5\beta^3\gamma^3 - 288t^3x^5\beta^3\gamma^3 - 144t^5x^5\beta^3\gamma^3 + 180x^6\alpha\beta^3\gamma^3 + 540t^2x^6\alpha\beta^3\gamma^3 + \\ & + 348t^4x^6\alpha\beta^3\gamma^3 + 20t^6x^6\alpha\beta^3\gamma^3 - 864tx^7\beta^4\gamma^4 - 96t^3x^7\beta^4\gamma^4 + 63x^8\alpha\beta^4\gamma^4 + \\ & + 126t^2x^8\alpha\beta^4\gamma^4 + 15t^4x^8\alpha\beta^4\gamma^4 - 24tx^9\beta^5\gamma^5 + \\ & + 6x^{10}\alpha\beta^5\gamma^5 + 6t^2x^{10}\alpha\beta^5\gamma^5 + x^{12}\alpha\beta^6\gamma^6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{B}^{[2]} = & \beta(9 + 27t^2 + 3t^4 + t^6 + 27x^2\beta\gamma + 54t^2x^2\beta\gamma + \\ & + 3t^4x^2\beta\gamma + 3x^4\beta^2\gamma^2 + 3t^2x^4\beta^2\gamma^2 + x^6\beta^3\gamma^3)^2.\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

$$\begin{aligned}\widehat{A}^{[3]} = & 14175i + 16200t + 68850it^2 + 70200t^3 - 14175it^4 + 6480t^5 + 7020it^6 + 10800t^7 - \\ & - 5535it^8 - 1560t^9 + 258it^{10} + 24t^{11} - it^{12} - 28350ix^2\beta\gamma - 16200tx^2\beta\gamma - \\ & - 125550it^2x^2\beta\gamma - 151200t^3x^2\beta\gamma + 62100it^4x^2\beta\gamma - 2160t^5x^2\beta\gamma + \\ & + 3060it^6x^2\beta\gamma - 1440t^7x^2\beta\gamma + 810it^8x^2\beta\gamma + 120t^9x^2\beta\gamma - 6it^{10}x^2\beta\gamma - \\ & - 14175ix^4\beta^2\gamma^2 - 10800tx^4\beta^2\gamma^2 - 45900it^2x^4\beta^2\gamma^2 - 54000t^3x^4\beta^2\gamma^2 + \\ & + 22950it^4x^4\beta^2\gamma^2 + 2160t^5x^4\beta^2\gamma^2 + 900it^6x^4\beta^2\gamma^2 + 240t^7x^4\beta^2\gamma^2 - \\ & - 15it^8x^4\beta^2\gamma^2 + 2700ix^6\beta^3\gamma^3 + 5040tx^6\beta^3\gamma^3 + 3060it^2x^6\beta^3\gamma^3 + 2400t^3x^6\beta^3\gamma^3 + \\ & + 420it^4x^6\beta^3\gamma^3 + 240t^5x^6\beta^3\gamma^3 - 20it^6x^6\beta^3\gamma^3 + 225ix^8\beta^4\gamma^4 + 360tx^8\beta^4\gamma^4 + \\ & + 90it^2x^8\beta^4\gamma^4 + 120t^3x^8\beta^4\gamma^4 - 15it^4x^8\beta^4\gamma^4 + 18ix^{10}\beta^5\gamma^5 + \\ & + 24tx^{10}\beta^5\gamma^5 - 6it^2x^{10}\beta^5\gamma^5 - ix^{12}\beta^6\gamma^6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{A}^{[3]} = & 2025 + 12150t^2 + 3375t^4 + 2340t^6 + 135t^8 + 6t^{10} + t^{12} + 12150x^2\beta\gamma + \\ & + 60750t^2x^2\beta\gamma + 13500t^4x^2\beta\gamma + 7020t^6x^2\beta\gamma + 270t^8x^2\beta\gamma + 6t^{10}x^2\beta\gamma + \\ & + 3375x^4\beta^2\gamma^2 + 13500t^2x^4\beta^2\gamma^2 + 2250t^4x^4\beta^2\gamma^2 + 780t^6x^4\beta^2\gamma^2 + 15t^8x^4\beta^2\gamma^2 + \\ & + 2340x^6\beta^3\gamma^3 + 7020t^2x^6\beta^3\gamma^3 + 780t^4x^6\beta^3\gamma^3 + 20t^6x^6\beta^3\gamma^3 + 135x^8\beta^4\gamma^4 + \\ & + 270t^2x^8\beta^4\gamma^4 + 15t^4x^8\beta^4\gamma^4 + 6x^{10}\beta^5\gamma^5 + 6t^2x^{10}\beta^5\gamma^5 + x^{12}\beta^6\gamma^6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{B}}^{[3]} = & 4100625\alpha + 49207500t^2\alpha + 161291250t^4\alpha + 91489500t^6\alpha + 68799375t^8\alpha + \\
& + 19099800t^{10}\alpha + 6536700t^{12}\alpha + 696600t^{14}\alpha + 53055t^{16}\alpha + 6300t^{18}\alpha + \\
& + 306t^{20}\alpha + 12t^{22}\alpha + t^{24}\alpha - 196830000tx\beta\gamma - 218700000t^3x\beta\gamma - \\
& - 669222000t^5x\beta\gamma - 944784000t^7x\beta\gamma - 183708000t^9x\beta\gamma - 24494400t^{11}x\beta\gamma - \\
& - 6415200t^{13}x\beta\gamma - 881280t^{15}x\beta\gamma - 174960t^{17}x\beta\gamma - 4320t^{19}x\beta\gamma - 48t^{21}x\beta\gamma + \\
& + 49207500x^2\alpha\beta\gamma + 541282500t^2x^2\alpha\beta\gamma + 1612912500t^4x^2\alpha\beta\gamma + \\
& + 823405500t^6x^2\alpha\beta\gamma + 550395000t^8x^2\alpha\beta\gamma + 133698600t^{10}x^2\alpha\beta\gamma + \\
& + 39220200t^{12}x^2\alpha\beta\gamma + 3483000t^{14}x^2\alpha\beta\gamma + 212220t^{16}x^2\alpha\beta\gamma + 18900t^{18}x^2\alpha\beta\gamma + \\
& + 612t^{20}x^2\alpha\beta\gamma + 12t^{22}x^2\alpha\beta\gamma - 218700000tx^3\beta^2\gamma^2 - 218700000t^3x^3\beta^2\gamma^2 - \\
& - 594864000t^5x^3\beta^2\gamma^2 - 734832000t^7x^3\beta^2\gamma^2 - 122472000t^9x^3\beta^2\gamma^2 - \\
& - 13608000t^{11}x^3\beta^2\gamma^2 - 2851200t^{13}x^3\beta^2\gamma^2 - 293760t^{15}x^3\beta^2\gamma^2 - \\
& - 38880t^{17}x^3\beta^2\gamma^2 - 480t^{19}x^3\beta^2\gamma^2 + 161291250x^4\alpha\beta^2\gamma^2 + \\
& + 1612912500t^2x^4\alpha\beta^2\gamma^2 + 4378556250t^4x^4\alpha\beta^2\gamma^2 + 1975590000t^6x^4\alpha\beta^2\gamma^2 + \\
& + 61827300t^{12}x^4\alpha\beta^2\gamma^2 + 4287600t^{14}x^4\alpha\beta^2\gamma^2 + 175050t^{16}x^4\alpha\beta^2\gamma^2 + \\
& + 1140034500t^8x^4\alpha\beta^2\gamma^2 + 242335800t^{10}x^4\alpha\beta^2\gamma^2 + 4980t^{18}x^4\alpha\beta^2\gamma^2 + \\
& + 66t^{20}x^4\alpha\beta^2\gamma^2 - 669222000tx^5\beta^3\gamma^3 - 594864000t^3x^5\beta^3\gamma^3 - \\
& - 1438171200t^5x^5\beta^3\gamma^3 - 1588636800t^7x^5\beta^3\gamma^3 - 220644000t^9x^5\beta^3\gamma^3 - \\
& - 18506880t^{11}x^5\beta^3\gamma^3 - 2410560t^{13}x^5\beta^3\gamma^3 - 155520t^{15}x^5\beta^3\gamma^3 - 2160t^{17}x^5\beta^3\gamma^3 + \\
& + 91489500x^6\alpha\beta^3\gamma^3 + 823405500t^2x^6\alpha\beta^3\gamma^3 + 1975590000t^4x^6\alpha\beta^3\gamma^3 + \\
& + 781585200t^6x^6\alpha\beta^3\gamma^3 + 386483400t^8x^6\alpha\beta^3\gamma^3 + 67511880t^{10}x^6\alpha\beta^3\gamma^3 + \\
& + 13126320t^{12}x^6\alpha\beta^3\gamma^3 + 687600t^{14}x^6\alpha\beta^3\gamma^3 + 19260t^{16}x^6\alpha\beta^3\gamma^3 + \\
& + 220t^{18}x^6\alpha\beta^3\gamma^3 - 944784000tx^7\beta^4\gamma^4 - 734832000t^3x^7\beta^4\gamma^4 - \\
& - 1588636800t^5x^7\beta^4\gamma^4 - 1621296000t^7x^7\beta^4\gamma^4 - 180144000t^9x^7\beta^4\gamma^4 - \\
& - 9797760t^{11}x^7\beta^4\gamma^4 - 362880t^{13}x^7\beta^4\gamma^4 - 5760t^{15}x^7\beta^4\gamma^4 + 68799375x^8\alpha\beta^4\gamma^4 + \\
& + 550395000t^2x^8\alpha\beta^4\gamma^4 + 1140034500t^4x^8\alpha\beta^4\gamma^4 + 386483400t^6x^8\alpha\beta^4\gamma^4 + \\
& + 150939450t^8x^8\alpha\beta^4\gamma^4 + 19369800t^{10}x^8\alpha\beta^4\gamma^4 + 1469700t^{12}x^8\alpha\beta^4\gamma^4 + \\
& + 44280t^{14}x^8\alpha\beta^4\gamma^4 + 495t^{16}x^8\alpha\beta^4\gamma^4 - 183708000tx^9\beta^5\gamma^5 - \\
& - 122472000t^3x^9\beta^5\gamma^5 - 220644000t^5x^9\beta^5\gamma^5 - 180144000t^7x^9\beta^5\gamma^5 - \\
& - 15012000t^9x^9\beta^5\gamma^5 - 544320t^{11}x^9\beta^5\gamma^5 - 10080t^{13}x^9\beta^5\gamma^5 + \\
& + 19099800x^{10}\alpha\beta^5\gamma^5 + 133698600t^2x^{10}\alpha\beta^5\gamma^5 + 242335800t^4x^{10}\alpha\beta^5\gamma^5 + \\
& + 67511880t^6x^{10}\alpha\beta^5\gamma^5 + 19369800t^8x^{10}\alpha\beta^5\gamma^5 + 1877112t^{10}x^{10}\alpha\beta^5\gamma^5 + \\
& + 66024t^{12}x^{10}\alpha\beta^5\gamma^5 + 792t^{14}x^{10}\alpha\beta^5\gamma^5 - 24494400tx^{11}\beta^6\gamma^6 - \\
& - 13608000t^3x^{11}\beta^6\gamma^6 - 18506880t^5x^{11}\beta^6\gamma^6 - 9797760t^7x^{11}\beta^6\gamma^6 - \\
& - 544320t^9x^{11}\beta^6\gamma^6 - 12096t^{11}x^{11}\beta^6\gamma^6 + 6536700x^{12}\alpha\beta^6\gamma^6 + \\
& + 39220200t^2x^{12}\alpha\beta^6\gamma^6 + 61827300t^4x^{12}\alpha\beta^6\gamma^6 + 13126320t^6x^{12}\alpha\beta^6\gamma^6 + \\
& + 1469700t^8x^{12}\alpha\beta^6\gamma^6 + 66024t^{10}x^{12}\alpha\beta^6\gamma^6 + 924t^{12}x^{12}\alpha\beta^6\gamma^6 - \\
& - 6415200tx^{13}\beta^7\gamma^7 - 2851200t^3x^{13}\beta^7\gamma^7 - 2410560t^5x^{13}\beta^7\gamma^7 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -362880t^7x^{13}\beta^7\gamma^7 - 10080t^9x^{13}\beta^7\gamma^7 + 696600x^{14}\alpha\beta^7\gamma^7 + \\
& + 3483000t^2x^{14}\alpha\beta^7\gamma^7 + 4287600t^4x^{14}\alpha\beta^7\gamma^7 + 687600t^6x^{14}\alpha\beta^7\gamma^7 + \\
& + 44280t^8x^{14}\alpha\beta^7\gamma^7 + 792t^{10}x^{14}\alpha\beta^7\gamma^7 - 881280t^{15}\beta^8\gamma^8 - 293760t^3x^{15}\beta^8\gamma^8 - \\
& - 155520t^5x^{15}\beta^8\gamma^8 - 5760t^7x^{15}\beta^8\gamma^8 + 53055x^{16}\alpha\beta^8\gamma^8 + 212220t^2x^{16}\alpha\beta^8\gamma^8 + \\
& + 175050t^4x^{16}\alpha\beta^8\gamma^8 + 19260t^6x^{16}\alpha\beta^8\gamma^8 + 495t^8x^{16}\alpha\beta^8\gamma^8 - \\
& - 174960t^{17}\beta^9\gamma^9 - 38880t^3x^{17}\beta^9\gamma^9 - 2160t^5x^{17}\beta^9\gamma^9 + 6300x^{18}\alpha\beta^9\gamma^9 + \\
& + 18900t^2x^{18}\alpha\beta^9\gamma^9 + 4980t^4x^{18}\alpha\beta^9\gamma^9 + 220t^6x^{18}\alpha\beta^9\gamma^9 - 4320tx^{19}\beta^{10}\gamma^{10} - \\
& - 480t^3x^{19}\beta^{10}\gamma^{10} + 306x^{20}\alpha\beta^{10}\gamma^{10} + 612t^2x^{20}\alpha\beta^{10}\gamma^{10} + \\
& + 66t^4x^{20}\alpha\beta^{10}\gamma^{10} - 48tx^{21}\beta^{11}\gamma^{11} + 12x^{22}\alpha\beta^{11}\gamma^{11} + \\
& + 12t^2x^{22}\alpha\beta^{11}\gamma^{11} + x^{24}\alpha\beta^{12}\gamma^{12},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{B}^{[3]} = & \beta(2025 + 12150t^2 + 3375t^4 + 2340t^6 + 135t^8 + 6t^{10} + t^{12} + 12150x^2\beta\gamma + \\
& + 60750t^2x^2\beta\gamma + 13500t^4x^2\beta\gamma + 7020t^6x^2\beta\gamma + 270t^8x^2\beta\gamma + 6t^{10}x^2\beta\gamma + \\
& + 3375x^4\beta^2\gamma^2 + 13500t^2x^4\beta^2\gamma^2 + 2250t^4x^4\beta^2\gamma^2 + 780t^6x^4\beta^2\gamma^2 + 15t^8x^4\beta^2\gamma^2 + \\
& + 2340x^6\beta^3\gamma^3 + 7020t^2x^6\beta^3\gamma^3 + 780t^4x^6\beta^3\gamma^3 + 20t^6x^6\beta^3\gamma^3 + 135x^8\beta^4\gamma^4 + \\
& + 270t^2x^8\beta^4\gamma^4 + 15t^4x^8\beta^4\gamma^4 + 6x^{10}\beta^5\gamma^5 + 6t^2x^{10}\beta^5\gamma^5 + x^{12}\beta^6\gamma^6)^2.
\end{aligned}$$

Благодарности. Мы приносим искреннюю благодарность рецензенту и всем членам группы, в которой велись обсуждения, за их ценные комментарии.

Список литературы

- [1] I. M. Moroz, J. Brindley, “Evolution of baroclinic wave packets in a flow with continuous shear and stratification”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **377**:1771 (1981), 379–404.
- [2] Y. Li, M. Mu, “Baroclinic instability in the generalized Phillips’ model part I: two-layer model”, *Adv. Atmos. Sci.*, **13**:1 (1996), 33–42.
- [3] Y. Li, “Baroclinic instability in the generalized Phillips’ model part II: three-layer model”, *Adv. Atmos. Sci.*, **17**:3 (2000), 413–432.
- [4] J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer, New York, 1987.
- [5] Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, М., 1988.
- [6] R. Guo, H.-Q. Hao, L.-L. Zhang, “Dynamic behaviors of the breather solutions for the AB system in fluid mechanics”, *Nonlinear Dynam.*, **74**:3 (2013), 701–709.
- [7] A. M. Kamchatnov, M. V. Pavlov, “Periodic solutions and Whitham equations for the AB system”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28**:11 (1995), 3279–3288.
- [8] J. D. Gibbon, M. J. McGuinness, “Amplitude equations at the critical points of unstable dispersive physical systems”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **377**:1769 (1981), 185–219.
- [9] S. Lee, I. M. Held, “Baroclinic wave packets in models and observations”, *J. Atmos. Sci.*, **50**:10 (1993), 1413–1428.
- [10] C. Kharif, E. Pelinovsky, “Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon”, *Eur. J. Mech. B Fluids*, **22**:6 (2003), 603–634.
- [11] B. Guo, L. Ling, Q. P. Liu, “High-order solutions and generalized Darboux transformations of derivative nonlinear Schrödinger equations”, *Stud. Appl. Math.*, **130**:4 (2013), 317–344.
- [12] В. Б. Матвеев, “Позитоны: медленно убывающие аналоги солитонов”, *ТМФ*, **131**:1 (2002), 44–61.

- [13] Ph. Dubard, P. Gaillard, C. Klein, V. B. Matveev, “On multi-rogue wave solutions of the NLS equation and positon solutions of the KdV equation”, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **185**:1 (2010), 247–258.
- [14] H.-X. Jia, Y.-J. Liu, Y.-N. Wang, “Rogue-wave interaction of a nonlinear Schrödinger model for the alpha helical protein”, *Z. Naturforsch. A*, **71**:1 (2016), 27–32.
- [15] H. X. Jia, J. Y. Ma, Y. J. Liu, X. F. Liu, “Rogue-wave solutions of a higher-order nonlinear Schrödinger equation for inhomogeneous Heisenberg ferromagnetic system”, *Indian J. Phys.*, **89**:3 (2015), 281–287.
- [16] Н. Н. Ахмедиев, В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин, “Точные решения первого порядка нелинейного уравнения Шредингера”, *ТМФ*, **72**:2 (1987), 183–196.
- [17] A. Chabchoub, N. Hoffmann, N. Akhmediev, “Rogue wave observation in a water wave tank”, *Phys. Rev. Lett.*, **106**:20 (2011), 204502, 4 pp.
- [18] B. L. Guo, L. M. Ling, Q. P. Liu, “Nonlinear Schrödinger equation: generalized Darboux transformation and rogue wave solutions”, *Phys. Rev. E*, **85**:2 (2012), 026607, 9 pp.
- [19] D. Solli, C. Ropers, P. Koonath, B. Jalali, “Optical rogue waves”, *Nature*, **450**:7172 (2007), 1054–1057.
- [20] N. Akhmediev, A. Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, “Rogue waves and rational solutions of the nonlinear Schrödinger equation”, *Phys. Rev. E*, **80**:2 (2009), 026601, 9 pp.
- [21] A. Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, N. Akhmediev, “Rogue waves and rational solutions of the Hirota equation”, *Phys. Rev. E*, **81**:4 (2010), 046602, 8 pp.
- [22] A. Ankiewicz, N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo, “Discrete rogue waves of the Ablowitz–Ladik and Hirota equations”, *Phys. Rev. E*, **82**:2 (2010), 026602, 7 pp.
- [23] A. Ankiewicz, D. J. Kedziora, N. Akhmediev, “Rogue wave triplets”, *Phys. Lett. A*, **375**:28–29 (2011), 2782–2785.
- [24] P. Dubard, V. B. Matveev, “Multi-rogue waves solutions to the focusing NLS equation and the KP-I equation”, *Nat. Hazard. Earth Syst. Sci.*, **11** (2011), 667–672.
- [25] Y. Ohta, J. Yang, “General high-order rogue waves and their dynamics in the nonlinear Schrödinger equation”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **468**:2142 (2012), 1716–1740.
- [26] B. Tian, Y.-T. Gao, “Spherical Kadomtsev–Petviashvili equation and nebulons for dust ion-acoustic waves with symbolic computation”, *Phys. Lett. A*, **340**:1–4 (2005), 243–250.
- [27] T. Xu, B. Tian, L.-L. Li, X. Lü, C. Zhang, “Dynamics of Alfvén solitons in inhomogeneous plasmas”, *Phys. Plasmas*, **15**:10 (2008), 102307, 6 pp.
- [28] Y. Zhang, Y. Song, L. Cheng, J.-Y. Ge, W.-W. Wei, “Exact solutions and Painlevé analysis of a new $(2 + 1)$ -dimensional generalized KdV equation”, *Nonlinear Dynam.*, **68**:4 (2012), 445–458.
- [29] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, Berlin, 1991.
- [30] V. B. Matveev, “Darboux transformations, covariance theorems and integrable systems”, *L. D. Faddeev’s Seminar on Mathematical Physics*, American Mathematical Society Translations: Ser. 2, **201**, ed. M. A. Semenov-Tyan-Shanskij, AMS, Providence, RI, 2000, 179–209.

Поступила в редакцию 21.03.2016,
после доработки 9.05.2016