Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, Е. В. Юшков, Глобальная неразрешимость нелинейной модели проводника в квазистационарном приближении, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 1, 3–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:33:06

© 2017 г.

М. О. Корпусов*, Е. В. Юшков*

ГЛОБАЛЬНАЯ НЕРАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ПРОВОДНИКА В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Исследуются начально-краевые задачи для модельного дифференциального уравнения в ограниченных областях с квадратичной нелинейностью специального вида, характерной для теории проводников. Методом пробных функций показано, что нелинейность такого типа может приводить к глобальной во времени неразешимости, что с физической точки зрения означает электрический пробой проводника за конечное время. Для простейших пробных функций получены достаточные условия неразешимости модельных задач, оценки для скорости и времени разрушения. На конкретных примерах демонстрируется возможность использования метода для одно-, двух- и трехмерных задач при классических и неклассических граничных условиях. В ограниченных областях в $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) отдельно рассмотрены задачи Неймана и Навье.

Ключевые слова: теория проводников, некоэрцитивная нелинейность, начально-краевая задача, глобальная неразешимость, пробные функции, оценки времени разрушения.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9193>

1. ВВЕДЕНИЕ

Разрушение решений дифференциальных уравнений – существенно нелинейный эффект, пока плохо поддающийся как численному, так и теоретическому анализу. Среди разнообразных подходов к исследованию этого явления существуют три основных метода: метод автомодельных решений, использующий теоремы сравнения [1]; энергетический метод, позволяющий исследовать задачи с коэрцитивными нелинейностями [2], [3], и метод нелинейной емкости Похожаева и Митидиери, основанный на специальном выборе пробных функций и работающий для широкого класса нестепенных нелинейностей [4], [5].

Настоящая работа посвящена исследованию глобальной неразешимости классических начально-краевых задач для нелинейного модельного уравнения

$$\Delta u_t - \operatorname{div}(\nabla u \Delta u) = 0, \quad (1)$$

*Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: yushkov.msu@mail.ru

содержащего квадратичную нелинейность специального вида. Даже для одномерного случая изучение подобных уравнений сопряжено со значительными трудностями, поскольку необходимо угадать вид специальной пробной функции, чтобы рассмотреть задачу с классическими граничными условиями, так как неудачный выбор пробной функции приводит к анализу неклассических нелокальных граничных условий (подробнее см. в [6]–[8]).

В нашем исследовании, не уделяя отдельного внимания корректности рассматриваемых примеров, мы показываем, что как полные, так и неполные (не обеспечивающие единственность) классические и неклассические граничные условия могут оказаться достаточными для разрушения решения задачи (1) за конечное время. Подчеркнем, что, хотя задача с нелинейностью $\operatorname{div}(\nabla u \Delta u)$ рассматривается впервые, метод пробных функций работает по традиционной схеме, без принципиальных изменений (см., например, [9]–[11]).

Прежде чем переходить к вопросам глобальной неразрешимости, приведем краткий вывод уравнения (1) (подробнее см. в [12]). Для проводника, занимающего ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, в квазистационарном приближении вектор $\mathbf{E}$ напряженности электрического поля связан с плотностью электронов n уравнением

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -en. \quad (2)$$

В сделанном приближении электрическое поле $\mathbf{E}$ считается безвихревым, а следовательно, в случае поверхностной односвязности границы $\partial\Omega$ области Ω можно ввести потенциал электрического поля ϕ :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad \implies \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (3)$$

Для изменяющейся со временем концентрации электронов справедлива связь с вектором плотности тока $\mathbf{J}$ посредством уравнения неразрывности

$$en_t = \operatorname{div} \mathbf{J}, \quad \text{где} \quad \mathbf{J} = en\mathbf{E}. \quad (4)$$

Подставляя и ток $\mathbf{E}$, и поле $\mathbf{J}$, выраженные через потенциал ϕ , в уравнения (2)–(4), приходим к нелинейному скалярному уравнению

$$\Delta \phi_t + \operatorname{div}(\Delta \phi \nabla \phi) = 0. \quad (5)$$

Модельная задача (1) является прямым следствием уравнения (5) после замены u на $-\phi$.

2. ГЛОБАЛЬНАЯ НЕРАЗРЕШИМОСТЬ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Начнем с рассмотрения одномерного случая, считая зависимость от двух декартовых координат y, z “несущественной” (как, например, в области между двумя плоскопараллельными пластинами). Согласно традиционной схеме метода Похожаева умножим нелинейное уравнение (1)

$$u_{xxt} - (u_x u_{xx})_x = 0, \quad x \in [0, l], \quad (6)$$

на достаточно гладкую пробную функцию $\varphi(x)$, а затем проинтегрируем получившееся равенство несколько раз по частям на отрезке $[0, l]$. В результате получим следующее выражение:

$$\frac{d}{dt} \int_0^l u_x \varphi_x dx = -\frac{1}{2} \int_0^l u_x^2 \varphi_{xx} dx + \text{Gr}, \quad \text{где } \text{Gr} = \left[u_{xt} \varphi - u_{xx} u_x \varphi + \frac{1}{2} u_x^2 \varphi_x \right]_0^l. \quad (7)$$

В предположении, что $\varphi_{xx} \leq 0$, используя неравенство Гёльдера (см., например, [13])

$$\left(\int_0^l u_x \varphi_x dx \right)^2 \leq \left(\int_0^l u_x^2 |\varphi_{xx}| dx \right) \left(\int_0^l \frac{\varphi_x^2}{|\varphi_{xx}|} dx \right), \quad (8)$$

приходим к обыкновенному дифференциальному неравенству относительно функции $J(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &\geq a^2 J^2 - b^2, \quad \text{где } J(t) = \int_0^l u_x \varphi_x dx, \\ a^2 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^l \frac{\varphi_x^2}{|\varphi_{xx}|} dx \right)^{-1}, \quad b^2 = |\text{Gr}|. \end{aligned} \quad (9)$$

Если граничные условия задачи и пробная функция подобраны так, что все параметры неравенства (9) определены, а функция $J(t)$ удовлетворяет начальному условию $J(0) > b/a$, то глобальная неразрешимость и оценка времени разрушения являются следствием решения нелинейного дифференциального неравенства (9):

$$J(t) \geq \frac{b}{a} \frac{(aJ(0) + b) + (aJ(0) - b)e^{2abt}}{(aJ(0) + b) - (aJ(0) - b)e^{2abt}} \implies T \leq \frac{1}{2ab} \ln \frac{aJ(0) + b}{aJ(0) - b}.$$

Конечно, выбор наилучшей пробной функции, дающей наиболее точную оценку времени разрушения T , связан с изучением вариационной задачи (для каждого конкретного набора граничных условий). Однако во многих частных случаях глобальная неразрешимость может быть доказана с использованием простейшей пробной функции в виде полинома относительно переменной x .

ПРИМЕР 1. Рассмотрим граничные условия Неймана

$$u_x(x, t)|_{x=0} = f_1, \quad u_x(x, t)|_{x=l} = f_2.$$

Выберем пробную функцию $\varphi(x) = x(l - x)$, тогда соответствующая начально-краевая задача для уравнения (6) на отрезке неразрешима глобально во времени, если начальные данные удовлетворяют неравенству

$$J(0) = \int_0^l u_{0x}(x)(l - 2x) dx > \frac{b}{a}, \quad \text{где } a^2 = \frac{3}{l^3}, \quad b^2 = \frac{l(f_1^2 + f_2^2)}{2}.$$

ПРИМЕР 2. Для доказательства глобальной неразрешимости необязательно знать весь набор граничных условий, необходимый для единственности решения. Во многих случаях (см., например, работу [10]) разрушение можно доказать, если “перегрузить” границу – задать неполные граничные условия, но только с одной стороны:

рассмотрим $u_x(l, t) = f_1$, $u_{xx}(l, t) = f_2$. Тогда, выбирая пробную функцию степенного вида $\varphi(x) = -x^2$, получим из (2) достаточное условие разрушения в виде

$$J(0) = \int_0^l 2x u_{0x}(x) dx < -\frac{b}{a}, \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{3}{4l^3}, \quad b^2 = |f_1 f_2 l^2 - f_1^2 l|.$$

В рассмотренных примерах предполагалось, что граничные условия не зависят от времени, что, однако, не является обязательным условием применимости метода, так как зависимость граничных условий от времени все равно приводит к обыкновенному дифференциальному неравенству вида (9).

Заметим также, что в одномерном случае мы можем проинтегрировать уравнение (6) один раз по переменной x и ввести новую функцию $v = u_x$. В результате получим уравнение вида простой волны

$$v_t - vv_x = F(t), \quad (10)$$

которое можно решить явным образом, например, с помощью метода характеристик и получить классический результат о градиентной катастрофе [14], [15].

3. ГЛОБАЛЬНАЯ НЕРАЗРЕШИМОСТЬ В КВАЗИОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Теперь рассмотрим сферически- и цилиндрически-симметричные случаи, которые уже нельзя назвать одномерными, но которые все еще характеризуются зависимостью только от одной пространственной координаты. В цилиндрической области, однородной по азимутальному углу и по координате z , если $u(x, t)$ зависит только от осевого расстояния r , уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(ru_r)_r = ((ru_r)_r u_r)_r = (u_r^2 + ru_r u_{rr})_r. \quad (11)$$

Умножая это уравнение на пробную функцию $\varphi(r)$ и интегрируя по $r \in [0, R]$, получаем равенство

$$\frac{d}{dt} \int_0^R u_r r (\varphi r)_r dr = -\frac{1}{2} \int_0^R u_r^2 (r(\varphi r)_{rr} - (\varphi r)_r) dr + \text{Gr}, \quad (12)$$

где

$$\text{Gr} = \left[r^2 u_{rt} \varphi - (u_r^2 + ru_r u_{rr}) r \varphi + \frac{r}{2} u_r^2 (\varphi r)_r \right]_0^R.$$

Дальнейшее рассуждение строится по той же схеме, что и в предыдущем разделе: при условии $(r(\varphi r)_{rr} - (\varphi r)_r) \leq 0$ интеграл в правой части уравнения (11) является неотрицательным, и с помощью неравенства Гёльдера его можно оценить через квадрат интеграла, стоящего в левой части соотношения (12), что приводит к оценке решения снизу.

ПРИМЕР 3. Предположим, что на внешней границе заданы граничные условия $u_r(R, t) = f_1$, $u_{rr}(R, t) = f_2$. Тогда для простейшей пробной функции $\varphi(r) \equiv 1$ выражение (11) можно переписать как

$$\frac{d}{dt} \int_0^R u_r r dr = \frac{1}{2} \int_0^R u_r^2 dr - \left[R^2 f_1 f_2 + \frac{R}{2} f_1^2 \right]. \quad (13)$$

Оценивая с помощью неравенства Гёльдера интеграл в правой части, приходим к обыкновенному дифференциальному неравенству

$$\frac{dJ}{dt} \geq a^2 J^2 - b^2, \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{3}{2R^3}, \quad b^2 = \left| R^2 f_1 f_2 + \frac{R}{2} f_1^2 \right|, \quad (14)$$

решая которое, получим достаточное условие $J(0) > a/b$ разрушения решения задачи, а также оценки времени и скорости разрушения.

ПРИМЕР 4. Варьируя пробную функцию, можно попытаться понять причины, вызывающие разрушение. В частности, в цилиндрически-симметричном случае достаточным условием глобальной неразрешимости может быть только одно граничное условие: $u_r(R, t) = f$. Для этого достаточно подобрать функцию $\varphi(r)$, принимающую нулевое значение на границе, например $\varphi(r) = R^2 - r^2$, тогда уравнение (12) будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \int_0^R u_r(rR^2 - 3r^3) dr = \frac{1}{2} \int_0^R u_r^2(R^2 + 3r^2) dr - R^3 f^2, \quad (15)$$

откуда в силу неравенства Гёльдера

$$\left(\int_0^R u_r(rR^2 - 3r^3) dr \right)^2 \leq \left(\int_0^R u_r^2(R^2 + 3r^2) dr \right) \left(\int_0^R \frac{(rR^2 - 3r^3)^2}{R^2 + 3r^2} dr \right)$$

несложно прийти к неравенству (14) и получить достаточные условия разрушения. Таким образом, основной причиной, приводящей к разрушению, является “закрепление” градиента решения на границе (см. задачу Неймана, в общем виде разобрannую ниже).

ПРИМЕР 5. В некоторых областях глобальная неразрешимость задачи может возникать при произвольных граничных условиях. Например, для сферически-симметричного случая (зависимость решения только от r и t) после умножения уравнения (1) на пробную функцию $\phi = \phi(r)$ и интегрирования по шару радиуса $R > 0$ мы приходим к равенству

$$\frac{d}{dt} \int_0^R (r^2 u_r)_r \varphi dr = \int_0^R (r^2 \Delta u u_r)_r \varphi dr, \quad \text{где} \quad \Delta u = r^{-2}(r^2 u_r)_r, \quad (16)$$

из которого интегрированием по частям получаем выражение

$$\frac{d}{dt} \int_0^R u_r r^2 \varphi_r dr = \int_0^R u_r^2 \left(r \varphi_r - \frac{1}{2} r^2 \varphi_{rr} \right) dr + \left[r^2 u_{rt} \varphi - (r^2 u_r)_r u_r \varphi + \frac{1}{2} r^2 u_r^2 \varphi_r \right]_0^R. \quad (17)$$

Выбирая пробную функцию вида $\varphi = r - R$, перепишем (17) следующим образом:

$$\frac{dJ}{dt} = \int_0^R u_r^2 r dr + \left[\frac{1}{2} r^2 u_r^2 \right]_0^R \geq \int_0^R u_r^2 r dr, \quad \text{где} \quad J(t) = \int_0^R u_r r^2 dr. \quad (18)$$

В силу неравенства Гёльдера имеет место оценка

$$J^2 = \left(\int_0^R u_r r^2 dr \right)^2 \leq \int_0^R u_r^2 r dr \int_0^R r^3 dr = \frac{R^4}{4} \int_0^R u_r^2 r dr, \quad (19)$$

с учетом которой мы получаем обыкновенное дифференциальное неравенство

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{4}{R^4} J^2 \implies J(t) \geq \frac{J(0)}{1 - 4R^{-4}J(0)t}. \quad (20)$$

Отсюда следует глобальная во времени неразрешимость задачи и оценка времени разрушения для произвольных граничных условий и ненулевой начальной функции $J(0) > 0$.

4. НЕРАЗРЕШИМОСТЬ В ДВУХ- И ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЯХ

Рассмотрим двумерный азимутально-симметричный случай, когда неизвестная функция и дополнительные условия зависят только от (r, z) . В этом случае уравнение (1) примет вид

$$\frac{d}{dt}(\Delta u) = r^{-1}(r\Delta u u_r)_r + (\Delta u u_z)_z, \quad \text{где} \quad \Delta u = r^{-1}(ru_r)_r + u_{zz}. \quad (21)$$

Умножим это уравнение на пробную функцию $\varphi(r, z)$ и проинтегрируем по частям в области $[0, R] \times [0, h]$. В результате получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^R \int_0^h (u_r r \varphi_r + u_z r \varphi_z) dz dr = \\ & = \int_0^R \int_0^h \left(\frac{u_r^2}{2} (\varphi_r - r\varphi_{rr} + r\varphi_{zz}) + \frac{u_z^2}{2} (\varphi_r + r\varphi_{rr} - r\varphi_{zz}) - 2u_z u_r r \varphi_{rz} \right) dz dr + \text{Gr}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \text{Gr} = & \int_0^R \left[u_{zt} r \varphi - \Delta u u_z r \varphi + u_z u_r r \varphi_r + \frac{1}{2} u_z^2 r \varphi_z - \frac{1}{2} u_r^2 r \varphi_z \right]_0^h dr + \\ & + \int_0^h \left[u_{rt} r \varphi - \Delta u u_r r \varphi + u_r u_z r \varphi_z + \frac{1}{2} u_r^2 r \varphi_r - \frac{1}{2} u_z^2 r \varphi_r \right]_0^R dz. \end{aligned}$$

Под знаком интеграла в правой части (22) стоит квадратичная форма относительно производных u_r , u_z , которую можно сделать положительно определенной правильным выбором пробной функции, а далее, воспользовавшись неравенством Гёльдера, можно прийти к неравенству вида (9).

ПРИМЕР 6. Рассмотрим пример граничных условий вида

$$u(r, z)|_{r=R} = f(z), \quad u_z(r, z)|_{z=0} = u_z(r, z)|_{z=h} = 0, \quad (23)$$

для которых выберем пробную функцию $\varphi = r - R$. В этом случае из выражения (22) (с учетом неравенства Гёльдера) можно получить цепочку оценок

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^R \int_0^h (u_r r) dz dr = \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^h (u_r^2 + u_z^2) dz dr + \int_0^h \left[\frac{1}{2} u_r^2 r - \frac{1}{2} u_z^2 r \right]_0^R dz \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^h u_r^2 dz dr - \frac{1}{2} \int_0^h f_z^2 R dz \geq \\ & \geq \frac{3}{2hR^3} \left(\int_0^R \int_0^h (u_r r) dz dr \right)^2 - \frac{1}{2} \int_0^h f_z^2 R dz. \end{aligned} \quad (24)$$

Обозначим двойной интеграл в правой части цепочки как $J(t)$ и в результате придем к неравенству (9), из которого следует глобальная неразрешимость задачи, если начальная функция удовлетворяет условию

$$\int_0^R \int_0^h (u_{0r} r) dz dr \geq \sqrt{\frac{hR^4}{3}} \int_0^h f_z^2 dz. \quad (25)$$

ПРИМЕР 7. Теперь рассмотрим краевую задачу в кубе $\Omega := [0, l] \times [0, l] \times [0, l]$. Для сокращения выкладок будем обозначать многомерный интеграл символом определенного интеграла, а через $\mathbf{r}$ будем обозначать комбинацию переменных (x, y, z) . Кроме того, если в выражении присутствуют одинаковые индексы α (или β), то по ним будет подразумеваться суммирование Эйнштейна с перебором всех переменных:

$$u_\alpha v_\alpha = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

Итак, после интегрирования уравнение в частных производных (1) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega (u_{\alpha\alpha}) \varphi d\mathbf{r} = \int_\Omega (u_{\alpha\alpha} u_\beta)_\beta \varphi d\mathbf{r}. \quad (26)$$

Интегрируя по частям, преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_\Omega u_\alpha \varphi_\alpha d\mathbf{r} &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2} u_\alpha^2 \varphi_{\beta\beta} - u_\alpha u_\beta \varphi_{\alpha\beta} \right) d\mathbf{r} + \\ &+ \int_{\Omega_\alpha} \left[u_{\alpha t} \varphi - u_{\beta\beta} u_\alpha \varphi + u_\alpha u_\beta \varphi_\beta - \frac{1}{2} u_\beta^2 \varphi_\alpha \right]_0^l d\mathbf{r}_\alpha. \end{aligned} \quad (27)$$

Последний интеграл, включающий граничные условия, естественно, является не тройным, а двойным по всем переменным, кроме той, которая соответствует индексу α . Под интегралом в правой части, как и в предыдущем случае, стоит квадратичная форма по первым производным, которая (для некоторых граничных условий) выбором пробной функции может быть приведена к каноническому виду.

Распишем указанную квадратичную форму в параллелепипеде подробнее: подынтегральное выражение можно переписать как

$$\begin{aligned} &\frac{u_x^2}{2} (-\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) + \frac{u_y^2}{2} (\varphi_{xx} - \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) + \\ &+ \frac{u_z^2}{2} (\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - \varphi_{zz}) - 2(u_x u_y \varphi_{xy} + u_x u_z \varphi_{xz} + u_y u_z \varphi_{yz}). \end{aligned}$$

Рассмотрим, например, следующие граничные условия:

$$u(\mathbf{r}, t)|_{\partial\Omega} = \text{const}, \quad \frac{\partial u}{\partial n_\alpha}(\mathbf{r}, t) \Big|_{\Omega_\alpha} = 0.$$

Выберем пробную функцию $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Тогда из уравнения (27) после применения неравенства Гёльдера получим

$$2 \frac{dJ}{dt} = \int_\Omega (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\mathbf{r} \geq \frac{1}{l^5} J^2, \quad \text{где} \quad J(t) = \int_\Omega (u_x x + u_y y + u_z z) d\mathbf{r}. \quad (28)$$

Следовательно, при условии $J(0) > 0$ на начальную функцию задача в прямоугольнике будет неразрешима глобально во времени в силу оценки

$$J(t) \geq \frac{J(0)}{1 - (J(0)/2l^5)t}. \quad (29)$$

Заметим, что, как и в предыдущих примерах, к аналогичному результату можно прийти при других граничных условиях и при другом выборе пробной функции (например, можно задать ненулевые граничные условия Неймана и Навье). Однако доказанная неразрешимость при нулевом потоке через границу имеет более глобальную природу и справедлива для любой области с гладкой границей.

5. ЗАДАЧИ НЕЙМАНА И НАВЬЕ

В этом разделе мы исследуем задачу Неймана в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, где $N \geq 2$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. При этом будем рассматривать решения $u(x)(t)$ из класса $\mathbb{C}_t^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_x^{(2)}(\bar{\Omega})) \cap \mathbb{C}_t([0, T]; \mathbb{C}_x^{(3)}(\bar{\Omega}))$. Задача имеет следующий вид:

$$\Delta u_t = \operatorname{div}(\Delta u \nabla u) \quad \text{в } \Omega, \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n_x} \right|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (31)$$

Заметим, что граничное условие Неймана в (31) можно заменить граничным условием Навье $\Delta u = 0$ на $\partial\Omega$. Умножим обе части уравнения (30) на $|\Delta u|^p$ при $p > -1$, $p \neq 0$ и проинтегрируем в рассматриваемом классе обе части полученного равенства по области Ω . Проведем вспомогательные выкладки:

$$\int_{\Omega} \Delta u_t |\Delta u|^p dx = \frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Delta u |\Delta u|^p dx, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Delta u|^p \operatorname{div}(\Delta u \nabla u) dx &= \int_{\Omega} |\Delta u|^{p+2} dx + \int_{\Omega} |\Delta u|^p (\nabla \Delta u, \nabla u) dx = \\ &= \int_{\Omega} |\Delta u|^{p+2} dx + \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} (\nabla(|\Delta u|^p \Delta u), \nabla u) dx = \\ &= \int_{\Omega} |\Delta u|^{p+2} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |\Delta u|^{p+2} dx = \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |\Delta u|^{p+2} dx; \end{aligned} \quad (33)$$

здесь мы воспользовались граничным условием при интегрировании по частям. Таким образом, мы приходим к равенству

$$\frac{d}{dt} I_p(t) = p \int_{\Omega} |\Delta u|^{p+2} dx, \quad p > -1, \quad p \neq 0, \quad (34)$$

где

$$I_p(t) = \int_{\Omega} \Delta u |\Delta u|^p dx. \quad (35)$$

Рассмотрим сначала случай $p > 0$. Используя неравенство Гёльдера, получим оценку

$$\int_{\Omega} |\Delta u|^{p+2} dx \geq \frac{1}{|\Omega|^{1/(p+1)}} |I_p|^{(p+2)/(p+1)}. \quad (36)$$

Подставляя (36) в (34), мы получаем дифференциальное неравенство

$$\frac{dI_p}{dt} \geq \frac{p}{|\Omega|^{1/(p+1)}} |I_p|^{(p+2)/(p+1)}. \quad (37)$$

При дополнительном условии

$$I_p(0) = \int_{\Omega} \Delta u_0 |\Delta u_0|^p dx > 0 \quad \text{при } p > 0 \quad (38)$$

мы приходим к неравенству $I(t) \geq I_p(0) > 0$, и поэтому

$$\frac{dI_p}{dt} \geq \frac{p}{|\Omega|^{1/(p+1)}} I_p^{(p+2)/(p+1)}, \quad I_p(0) = I_{p0} > 0, \quad p > 0. \quad (39)$$

Рассмотрим теперь случай $p \in (-1, 0)$. Тогда из (34) вытекает, что для

$$I_p(0) = \int_{\Omega} \Delta u_0 |\Delta u_0|^p dx < 0 \quad \text{при } p \in (-1, 0) \quad (40)$$

имеет место неравенство $I_p(t) < 0$. Поэтому, введя функцию

$$J_p(t) := -I_p(t) > 0, \quad t \in [0, T], \quad (41)$$

из (34) и (36) получим цепочку выражений

$$\frac{dJ_p}{dt} = |p| \int_{\Omega} |\Delta u|^{p+2} dx \geq \frac{|p|}{|\Omega|^{1/(p+1)}} J_p^{(p+2)/(p+1)}, \quad p \in (-1, 0). \quad (42)$$

Таким образом:

1) если $p > 0$ и выполнено условие (38), то имеет место неравенство

$$I_p(t) = \int_{\Omega} \Delta u |\Delta u|^p dx \geq I_p(0)[1 - At]^{-p-1} > 0, \quad (43)$$

где

$$A := \frac{p}{p+1} |\Omega|^{-1/(p+1)} I_p^{1/(p+1)}(0) > 0; \quad (44)$$

2) если $p \in (-1, 0)$ и выполнено условие (40), то имеет место следующая оценка:

$$I_p(t) \leq I_p(0)[1 - Bt]^{-p-1} < 0, \quad (45)$$

где

$$B := \frac{|p|}{p+1} |\Omega|^{-1/(p+1)} |I_p(0)|^{1/(p+1)} > 0. \quad (46)$$

В обоих случаях решение $u(x)(t) \in \mathbb{C}_t^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_x^{(2)}(\bar{\Omega})) \cap \mathbb{C}_t([0, T]; \mathbb{C}_x^{(3)}(\bar{\Omega}))$ не существует глобально во времени и для времени разрушения T имеет место оценка сверху

$$T < \frac{p+1}{|p|} |\Omega|^{1/(p+1)} |I_p(0)|^{-1/(p+1)} < +\infty \quad \text{при } p \in (-1, 0) \cup (0, +\infty). \quad (47)$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована глобальная неразрешимость начально-краевых задач для соболевского уравнения с некоэрцитивной квадратичной нелинейностью. В квазистационарном приближении теории проводников приведен вывод модельного уравнения, в котором неизвестная функция является потенциалом электрического поля, а глобальная во времени неразрешимость задач соответствует явлению электрического пробоя.

С помощью метода пробных функций, предложенного Похожаевым, получены достаточные условия разрушения в одно-, двух- и трехмерном случаях для цилиндра, сферы и параллелепипеда. С помощью пробной функции полиномиального вида, удобной с практической точки зрения, выведены оценки времени и скорости разрушения как для классических, так и для неклассических граничных условий. Приведены такие примеры задач, в которых глобальная неразрешимость может иметь место не только при неполных граничных условиях (не обеспечивающих единственность), но и при произвольных граничных условиях (в случае сферической симметрии).

Отдельно проанализирована задача Неймана в произвольной ограниченной области с гладкой границей, для которой также получены достаточные условия глобальной во времени неразрешимости и оценки времени и скорости разрушения.

Список литературы

- [1] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987.
- [2] H. A. Levine, "Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$ ", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51**:5 (1973), 371–386.
- [3] А. Г. Свешников, А. Б. Алышин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.
- [4] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, "Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных", *Тр. МИАН*, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.
- [5] S. I. Pohozaev, "Blow-up of smooth solutions of the Korteweg–de Vries equation", *Nonlinear Anal.*, **75**:12 (2012), 4688–4698.
- [6] Е. В. Юшков, "О разрушении решения уравнения, родственного уравнению Кортевега–де Фриза", *ТМФ*, **172**:1 (2012), 64–72.
- [7] Е. В. Юшков, М. О. Корпусов, "Глобальная неразрешимость одномерных задач для уравнений типа Бюргерса", *Матем. заметки*, **98**:3 (2015), 448–462.
- [8] М. О. Корпусов, Е. В. Юшков, "Разрушение решений систем уравнений мелкой воды", *ТМФ*, **177**:2 (2013), 264–275.
- [9] С. И. Похожаев, "Об одном классе начально-краевых задач для уравнений типа Кортевега–де Фриза", *Дифференц. уравнения*, **48**:3 (2012), 368–374.

- [10] М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, Е. В. Юшков, “Разрушение решений нелинейных уравнений типа Кадомцева–Петвиашвили и Захарова–Кузнецова”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:3 (2014), 79–110.
- [11] М. О. Корпусов, А. А. Панин, “Локальная разрешимость и разрушение решения для уравнения Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса с нелокальным граничным условием”, *ТМФ*, **175**:2 (2013), 159–172.
- [12] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. VIII: *Электродинамика сплошных сред*, Физматлит, М., 2005.
- [13] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988.
- [14] С. А. Габов, *Введение в теорию нелинейных волн*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988.
- [15] Н. М. Рыскин, Д. И. Трубецков, *Нелинейные волны*, Физматлит, М., 2000.

Поступила в редакцию 22.03.2016,
после доработки 24.05.2016