Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Каценко, Бифуркации в уравнении Курамото–Сивашинского, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 1, 23–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9195>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:50:15

© 2017 г.

С. А. Кащенко^{*†}

БИФУРКАЦИИ В УРАВНЕНИИ КУРАМОТО–СИВАШИНСКОГО

Рассматривается локальная динамика классического уравнения Курамото–Сивашинского и его обобщений. Исследуется вопрос о существовании и асимптотике периодических решений и торов. Наиболее интересные результаты получены для так называемых бесконечномерных критических случаев. При рассмотрении этих случаев удалось построить специальные нелинейные уравнения с частными производными, которые играют роль нормальных форм, и, тем самым, их нелокальная динамика определяет поведение решений исходной краевой задачи.

Ключевые слова: бифуркации, устойчивость, нормальные формы, сингулярные возмущения, динамика.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9195>

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнением Курамото–Сивашинского называют (см., например, книгу [1]) уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \delta_1 u \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (1)$$

а обобщенным уравнением Курамото–Сивашинского – уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \delta_1 u \frac{\partial u}{\partial x} + \\ + \delta_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \varkappa_1 u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \varkappa_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = au, \end{aligned} \quad (2)$$

в котором γ – положительный параметр. Рассмотрим вопрос о поведении решений уравнения (2) с начальными (при $t = 0$ и $-\infty < x < +\infty$) условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Отметим, что уравнение Курамото–Сивашинского (1) впервые было представлено в работе [2]. В ней рассматривался процесс стекания тонкого слоя жидкости по

^{*}Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия.
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

[†]Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

наклонной плоскости. Эти и близкие вопросы изучались, например, в работах [1], [3]–[5]. Подробная библиография и ряд интересных результатов приведены в обзорной работе [1]. Диффузионный хаос в уравнении (1) изучался в статьях [6]–[9]. Важную роль в исследовании уравнения Курамото–Сивашинского сыграли работы [10], [11], в которых исследовались устойчивые волны концентрации при учете реакции диффузии, а также поведение фронта пламени. Цикл задач, связанных с обсуждением вопросов интегрируемости и построения точных решений, приведен в статьях [1], [12]–[16]. Из результатов численного исследования выделим в качестве примеров работы [1], [17], [18]. Отметим еще интересные работы по изучению уравнения (1) и его обобщений, а именно статьи [19]–[23].

Зафиксируем произвольно значение $T > 0$ и рассмотрим для (2) T -периодическую краевую задачу

$$u(t, x + T) \equiv u(t, x). \quad (3)$$

В качестве еще одного “краевого” условия примем равенство нулю среднего значения $u(t, x)$ по x :

$$M(u) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t, x) dx = 0. \quad (4)$$

Отметим, что без этого условия уравнение (2) имеет неограниченные решения вида $\text{const } e^{at}$.

Линеаризуем (2) в окрестности нулевого состояния равновесия. Тогда для корней $\lambda = \lambda(k)$ характеристического уравнения имеют место равенства

$$\lambda = -k^2(\gamma k^2 - \alpha) + a + i\sigma k^3, \quad (5)$$

где $k = 2\pi n/T$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Условие $n \neq 0$ следует из (4). Основное предположение состоит в том, что для некоторого $k = k_0 \neq 0$ выполнено равенство

$$\text{Re } \lambda(k_0) = 0. \quad (6)$$

Оно означает, что соответствующее линеаризованное уравнение имеет периодические решения с периодом $2\pi(\sigma k_0^3)^{-1}$.

В качестве основной методики исследования мы используем построения из теории бифуркаций. Формализм соответствующих конструкций изложен в разделе 2. В разделе 3 приведены результаты о существовании и асимптотике устойчивых периодических решений краевой задачи (2)–(4). Кроме того, рассматривается поведение решений с близкими к k_0 модами. В частности, показано, что при определенных условиях рассматриваемое уравнение (2) имеет семейство периодических решений. Отметим, что результаты разделов 3 и 4 имеют место и при $a = 0$. В разделах 5 и 6 существенно используется условие $a \neq 0$. При $a < 0$ результаты мало отличаются от предыдущих. Наиболее интересные результаты имеют место при $0 < a \leq \alpha^2/4\gamma$. В разделе 4 показано, что при $0 < a < \alpha^2/4\gamma$ в уравнении (2) имеются два семейства периодических решений и семейство двумерных торов. Случай, когда параметр a близок к $\alpha^2/4\gamma$, рассмотрен в разделе 5. Установлено, что локальная динамика уравнения (2) в этом случае определяется поведением решений специально построенного уравнения Гинзбурга–Ландау. Наконец, в разделе 6 исследован весьма важный и интересный случай, когда параметр σ является достаточно большим. Здесь выявлена связь с решениями известного уравнения Кортевега–де Фриза.

2. ПРОСТЕЙШИЕ БИФУРКАЦИИ. АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ

Коротко напомним здесь хорошо известные результаты для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Особенно важна для дальнейшего алгоритмическая часть.

Рассмотрим вопрос о поведении решений из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия системы уравнений

$$\dot{v} = (A + \varepsilon B)v + F_2(v, v) + F_3(v, v, v) + \dots \quad (7)$$

Здесь $v \in \mathbb{R}^n$, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, нелинейные вектор-функции $F_j(\cdot, \dots, \cdot)$, $j = 2, 3, \dots$, линейны по каждому аргументу. Предполагается, что матрица A имеет ровно m собственных значений, лежащих на мнимой оси, а все остальные ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Тогда при достаточно малом ε в окрестности нулевого состояния равновесия существует устойчивое локальное m -мерное инвариантное интегральное многообразие [24], [25]. На нем систему (7) можно представить в виде специальной нелинейной m -мерной системы (нормальной формы) нелинейных ОДУ. Поведение решений этой системы определяет структуру решений в окрестности $v \equiv 0$ для системы (7).

Рассмотрим для примера бифуркацию Андронова–Хопфа. Пусть матрица A имеет пару ($m = 2$) чисто мнимых собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, $\omega > 0$, и $Az = i\omega z$. Через w обозначим собственный вектор матрицы A^* , отвечающий собственному значению $-i\omega$. Векторы z и w удобно определить так, чтобы $(z, w) = 1$ и $(z, \bar{w}) = 0$.

Система (7) в этом случае сводится к системе двух ОДУ (на двумерном инвариантном интегральном многообразии). Для построения асимптотического приближения этой системы введем в рассмотрение формальное тождество

$$v = \varepsilon^{1/2}[\xi(\tau)ze^{i\omega t} + \bar{\xi}(\tau)\bar{z}e^{-i\omega t}] + \varepsilon u_2(t, \tau) + \varepsilon^{3/2}u_3(t, \tau) + \dots, \quad (8)$$

где $\xi(\tau)$ – неизвестная скалярная комплексная “амплитуда”, зависящая от $\tau = \varepsilon t$. Вектор-функции $u_j(t, \tau)$ являются $(2\pi/\omega)$ -периодичными по первому аргументу. Подставим (8) в (7) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . На первом шаге, собирая коэффициенты при первой степени ε , получаем уравнение относительно

$$u_2(t, \tau) = u_{20}(\tau)|\xi|^2 + u_{21}(\tau)\xi^2 e^{2i\omega t} + \bar{u}_{21}(\tau)\bar{\xi}^2 e^{-2i\omega t}.$$

Решая его, находим, что

$$u_{20} = -A^{-1}(F_2(z, \bar{z}) + F_2(\bar{z}, z)), \quad u_{21} = (2i\omega I - A)^{-1}F_2(z, z).$$

На следующем шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получаем систему уравнений относительно

$$u_3(t, \tau) = u_{31}(\tau)e^{i\omega t} + \bar{u}_{31}(\tau)e^{-i\omega t} + u_{32}(\tau)e^{3i\omega t} + \bar{u}_{32}(\tau)e^{-3i\omega t}.$$

Величина $u_{32}(\tau)$ определяется явно, а для нахождения u_{31} записываем систему уравнений

$$(i\omega I - A)u_{31} = -\xi_\tau z + \xi Bz + |\xi|^2 \xi C, \quad (9)$$

где $C = F_3(z, z, \bar{z}) + F_3(z, \bar{z}, z) + F_3(\bar{z}, z, z) + F_2(z, u_{20}) + F_2(u_{20}, z) + F_2(\bar{z}, u_{21}) + F_2(u_{21}, \bar{z})$. Условием разрешимости этой системы является равенство нулю скалярного произведения вектора правой части (9) на вектор w . Отсюда следует, что

$$\frac{d\xi}{d\tau} = b\xi + \xi d|\xi|^2, \quad (10)$$

где $b = (Bz, w)$, $d = (C, w)$. Комплексное уравнение (10) является главным асимптотическим приближением системы (7) на двумерном инвариантном многообразии. В невырожденном случае, когда $\operatorname{Re} b \neq 0$ и $\operatorname{Re} d \neq 0$, уравнение (10) полностью описывает локальную динамику (7). Например, при $\operatorname{Re} b > 0$ и $\operatorname{Re} d < 0$ имеем устойчивое периодическое решение $\xi_0(\tau) = \rho e^{i\varphi\tau}$, где $\rho = (-\operatorname{Re} b)(\operatorname{Re} d)^{-1/2}$, $\varphi = \operatorname{Im} b + \rho^2 \operatorname{Im} d$. Связь между решениями (10) и (7) определяется формулой (8).

Рассмотрим еще одну ситуацию, когда матрица A имеет две пары чисто мнимых собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$, $\omega_j > 0$, и выполнены условия отсутствия главных резонансов: $\omega_1/\omega_2 \neq 1, 2, 3, 1/2, 1/3$. Пусть $Az_j = \omega_j z_j$. Для построения системы ОДУ (нормальной формы) на инвариантном четырехмерном интегральном многообразии используем формальный ряд

$$v = \varepsilon^{1/2} \left[\sum_{j=1}^2 (\xi_j(\tau) z_j e^{it_j} + \bar{\xi}_j(\tau) \bar{z}_j e^{-it_j}) \right] + \varepsilon v_2(t_1, t_2, \tau) + \varepsilon^{3/2} v_3(t_1, t_2, \tau) + \dots, \quad t_j = \omega_j t. \quad (11)$$

Соответствующую четырехмерную систему ОДУ можно записать в виде системы двух комплексных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\xi_j}{d\tau} = b_j \xi_j + \xi_j [\beta_j |\xi_1|^2 + \gamma_j |\xi_2|^2], \quad j = 1, 2. \quad (12)$$

При некоторых условиях невырожденности состоянию равновесия (12) с одной нулевой компонентой согласно (11) отвечает периодическое решение системы (7). Состоянию равновесия в (12) с двумя ненулевыми компонентами отвечает двумерный инвариантный тор системы (7) той же устойчивости.

Далее остановимся на случае, когда для частот ω_1 и ω_2 выполнено резонансное условие $\omega_1/\omega_2 = 1/3$. Повторим приведенные выше построения. Используя ряд (11), получим четырехмерную систему ОДУ, записанную в виде двух комплексных уравнений специального вида:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = b_1 \xi_1 + \xi_1 [\beta_1 |\xi_1|^2 + \gamma_1 |\xi_2|^2] + \sigma_1 \bar{\xi}_1^2 \xi_2, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = b_2 \xi_2 + \xi_2 [\beta_2 |\xi_1|^2 + \gamma_2 |\xi_2|^2] + \sigma_2 \bar{\xi}_1^3. \quad (13)$$

Эта система отличается от системы (12) только присутствием дополнительных слагаемых в правых частях каждого из уравнений.

В случае резонансного соотношения $\omega_1/\omega_2 = 1/2$ ситуация сложнее. Дело в том, что в безрезонансном случае и в случае резонанса $1/3$ соответствующие ОДУ (13) и (12) не содержат малого параметра ε . Он включен в нормирующий множитель $\varepsilon^{1/2}$ перед первыми слагаемыми в (11). В рассматриваемом случае нормировку произвести, вообще говоря, нельзя. Поэтому аналогом выражения (11) служит формальный ряд

$$v = \sum_{j=1}^2 (\xi_j z_j e^{i\omega_j t} + \bar{\xi}_j \bar{z}_j e^{-i\omega_j t}) + v_2(\xi, \eta, t, \varepsilon) + v_3(\xi, \eta, t, \varepsilon) + \dots \quad (14)$$

Здесь функции $\xi_j = \xi_j(t, \varepsilon)$ являются достаточно малыми вместе со своими производными по t при $\varepsilon \rightarrow 0$. Вектор-функции $v_j(\xi_1, \xi_2, t, \varepsilon)$, периодичные по третьему аргументу, раскладываются в асимптотические ряды по ε и являются формами j -го порядка по $\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi_2, \bar{\xi}_2$. Для ξ_1 и ξ_2 при выполнении некоторых условий невырожденности имеем систему

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \varepsilon\alpha_1\xi_1 + \beta_1\bar{\xi}_1\xi_2 + \gamma_1\xi_1|\xi_1|^2, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \varepsilon\alpha_2\xi_2 + \beta_2\bar{\xi}_1^2 + \gamma_2\xi_2|\xi_2|^2. \quad (15)$$

Все коэффициенты этой системы определяются с использованием ряда (14) в (7). Динамика системы (15) определяет локальное поведение (7) при достаточно малых ε . Полный анализ систем вида (15) приведен в книге [26].

3. БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА–ХОПФА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО–СИВАШИНСКОГО

Пусть для параметра a в (2) выполнено неравенство

$$a = a_0 \geq 0. \quad (16)$$

Тогда из условия $\operatorname{Re} \lambda(k_0) = -k_0^2(\gamma k_0^2 - \alpha) + a_0 = 0$ находим значения $\pm k_0$, где $k_0 = (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma a_0})^{1/2}(2\gamma)^{-1/2}$.

Введем затем в уравнение (2) малый параметр $\varepsilon > 0$. Для этого положим $a = a_0 + \varepsilon a_1$ и произведем замену пространственной переменной вида $x \rightarrow (1 + \Delta\varepsilon)^{-1}x$, где a_1 и Δ произвольно фиксированы. В результате получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(1 + \Delta\varepsilon)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \sigma(1 + \Delta\varepsilon)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha(1 + \Delta\varepsilon)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ + \delta_1(1 + \Delta\varepsilon)u \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_2(1 + \Delta\varepsilon)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ + \varkappa_1(1 + \Delta\varepsilon)u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \varkappa_2(1 + \Delta\varepsilon)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = (a + \varepsilon a_1)u. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим для этого уравнения T_0 -периодическую краевую задачу

$$u(t, x + T_0) \equiv u(t, x), \quad (18)$$

в которой $T_0 = 2\pi k_0^{-1}$. Обратим внимание, что при $\Delta = 0$ мы имеем семейство уравнений (17), зависящее от малого параметра εa_1 . Если же $a_1 = 0$, то при всех ε мы рассматриваем одно и то же уравнение (17). В том случае, когда исследуется краевая задача (17), (18), малый параметр ε задает семейство уравнений.

Для корней λ_n характеристического для (17), (18) уравнения при $\varepsilon = 0$ верна формула

$$\lambda_n = \lambda(nk_0), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (19)$$

Отсюда следует, что ровно два корня $\lambda_{\pm 1}$ являются чисто мнимыми: $\lambda_{\pm 1} = \pm i\sigma k_0^3$, а все остальные корни имеют отрицательные вещественные части.

Линейная краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \sigma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_0 u, \quad (20)$$

$$u(t, x + T_0) \equiv u(t, x), \quad \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t, x) dx = 0, \quad (21)$$

имеет периодические решения $\text{const } e^{\pm i(k_0 x + \sigma k_0^3 t)}$. Применим алгоритм из предыдущего раздела.

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u = \varepsilon^{1/2} [\xi(\tau) e^{i(k_0 x + \sigma k_0^3 t)} + \bar{\xi}(\tau) e^{-i(k_0 x + \sigma k_0^3 t)}] + \varepsilon u_2(t, \tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau, x) + \dots \quad (22)$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$ – “медленное” время, зависимость функций $u_j(t, \tau, x)$ от первого аргумента является $(2\pi/T_0)$ -периодической. Подставим (22) в (17) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . Так, собирая коэффициенты при первой степени ε , получаем уравнение для u_2 :

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + \sigma \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + \alpha \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - a_0 u = g \xi^2 e^{2i\Omega} + \bar{g} \bar{\xi}^2 e^{-2i\Omega}, \quad (23)$$

где $g = -i\delta_1 k_0 + 2\delta_2 k_0^2$, $\Omega = k_0 x + \sigma k_0^3 t$.

Отсюда сразу находим, что

$$u_2 = u_{21} \xi^2 e^{2i\Omega} + \bar{u}_{21} \bar{\xi}^2 e^{-2i\Omega}$$

и

$$u_{21} = g[16\gamma k_0^4 - 6i\sigma k_0^3 - 4\alpha k_0^2 - a_0]^{-1}.$$

На следующем шаге записываем уравнение для определения u_3 . Из условия его разрешимости в указанном классе функций получаем равенство

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \alpha_0 \xi + d|\xi|^2 \xi, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (a_1 - 4\gamma k_0^4 - 3i\sigma k_0^3 - 2\alpha k_0^2) \Delta = a_1 - \lambda'(k_0) \Delta, \\ d &= -i\kappa_1 k_0 - i\delta_1 u_{21} k_0 + \delta_2 u_{21} k_0^2 + \kappa_2 k_0^2. \end{aligned}$$

Это уравнение интегрируется. Его динамика определяется значениями $\text{Re } \alpha_0$ и $\text{Re } d$. Отметим, что знак выражения $\text{Re } \alpha$ и $\text{Re } d$ зависит от значений параметров $\gamma, \sigma, \alpha, \Delta, a_1, \delta_{1,2}, \kappa_{1,2}$. Сформулируем итоговый результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\text{Re } \alpha > 0$ и $\text{Re } d < 0$. Тогда при всех достаточно малых ε краевая задача (17), (21) имеет устойчивое периодическое решение $u_0(t, x, \varepsilon)$, для которого выполнено асимптотическое равенство

$$u_0(t, x, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2} \varrho \cos[k_0 x + \sigma k_0^3 (1 + O(\varepsilon))t] + O(\varepsilon), \quad (25)$$

где $\varrho = (\text{Re } \alpha (\text{Re } d)^{-1})^{1/2}$, $\varphi = \text{Im } \alpha + \varrho^2 \text{Im } d$. Если же $\text{Re } \alpha < 0$ и $\text{Re } d > 0$, то при всех достаточно малых ε краевая задача (17), (21) имеет неустойчивое периодическое решение $u_0(t, x, \varepsilon)$ с асимптотикой (25).

Обоснование теоремы 1 следует из общей теории бифуркаций Андронова–Хопфа и результатов книги [25] о существовании интегрального инвариантного многообразия в уравнении с частными производными.

Рис. 1

Обратим внимание, что из существования при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, периодического решения $u_0(t, x, \varepsilon)$ краевой задачи (17), (21) вытекает существование однопараметрического семейства периодических решений $u_0(t, (1 + \Delta\varepsilon)x, \varepsilon)$ уравнения (2). В этой связи заметим, что можно было получить асимптотику периодических решений с модами, близкими к k_0 , и с частотами, близкими к σk_0^3 , непосредственно из уравнения (2) без учета краевых условий. Действительно, положим $a = a_0 + \varepsilon a_1$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, и рассмотрим асимптотический ряд по малому параметру ε

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} [\xi(\tau, y) e^{i(k_0 x + \sigma k_0^3 t)} + \bar{\xi}(\tau, y) e^{-i(k_0 x + \sigma k_0^3 t)}] + \varepsilon u_2(t, \tau, x, y) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau, x, y) + \dots \quad (26)$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$, $y = \varepsilon x$. Подставим (26) в (2). В результате стандартных действий для неизвестной комплексной амплитуды $\xi(\tau, y)$ приходим к уравнению

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = i \lambda'(k_0) \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_1 \xi + d |\xi|^2 \xi. \quad (27)$$

Можно определить решения этого уравнения как $\xi(\tau, y) = \rho e^{i(p y + \varphi \tau)}$. Зафиксируем произвольное вещественное p . Подставляя выражение для $\xi(\tau, y)$ в (27), получаем, что при условии $[(a_1 - p \operatorname{Re} \lambda'(k_0))(\operatorname{Re} d)^{-1}]^{1/2} > 0$ справедливы равенства

$$\rho = [(a_1 - p \operatorname{Re} \lambda'(k_0))(\operatorname{Re} d)^{-1}]^{1/2}, \quad \varphi = -p \operatorname{Im} \lambda'(k_0) + \rho^2 \operatorname{Im} d.$$

ПРИМЕР 1. Пусть $a_0 = 0$ и $\gamma = \alpha = 1$. Тогда $k_0 = 1$ и

$$\operatorname{Re} \alpha = a_1 - 2\Delta, \quad \operatorname{Re} d = \delta_1(\delta_1 + \sigma \delta_2)(3(4 + \sigma^2))^{-1} + \varkappa_2.$$

4. АСИМПТОТИКА ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ

Рассмотрим характеристическое уравнение (5) в предположении, что для параметра $a = a_0$ выполнено условие

$$-\frac{\alpha^2}{4\gamma} < a_0 < 0. \quad (28)$$

В этом случае уравнение $\operatorname{Re} \lambda(k) = 0$ имеет две пары корней $\pm k_j$, $j = 1, 2$, $0 < k_1 < k_2$ (см. рис. 1).

У линейного уравнения (20) есть двухпараметрическое семейство двоякопериодических решений

$$u = \sum_{j=1}^2 (\xi_j e^{i\Omega_j} + \bar{\xi}_j e^{-i\Omega_j}), \quad (29)$$

где $\Omega_j = k_j x + \sigma k_j^3 t$. Исследуем вопросы о решениях (2), “главная” часть которых близка к (29).

4.1. Асимптотика торков в уравнении (2). Применим для уравнения (2) изложенный в разделе 2 формализм построения асимптотики инвариантных торков. Пусть $\varepsilon > 0$ – малый положительный параметр: $0 < \varepsilon \ll 1$. Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u = \varepsilon^{1/2} \left[\sum_{j=1}^2 (\xi_j(\tau, y) e^{i\Omega_j} + \bar{\xi}_j(\tau, y) e^{-i\Omega_j}) \right] + \\ + \varepsilon u_2(\sigma k_1^3 t, \sigma k_2^3 t, x, \varepsilon, y) + \varepsilon^{3/2} u_3(\sigma k_1^3 t, \sigma k_2^3 t, x, \varepsilon, y) + \dots, \quad (30)$$

в котором $\tau = \varepsilon t$, $y = \varepsilon x$, а функции $u_j(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ являются 2π -периодическими по первым трем аргументам. Подставим (30) в (2) и в получившемся формальном тождестве будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . Тогда на втором шаге определяем функцию

$$u_2 = u_{21} \xi_1^2 e^{2i\Omega_1} + u_{22} \xi_2^2 e^{2i\Omega_2} + u_{23} \xi_1 \xi_2 e^{i(\Omega_1 + \Omega_2)} + u_{24} \xi_1 \bar{\xi}_2 e^{i(\Omega_1 - \Omega_2)} + \text{к.с.}$$

Здесь через к.с. обозначено выражение, комплексно сопряженное к сумме предыдущих четырех слагаемых. Для u_{2j} получаем равенства

$$u_{2j} = (-\sigma + 2i\gamma k_j) [6k_j^2 (4\gamma^2 k_j^2 + \sigma^2)]^{-1} (\delta_1 + 2ik_j \delta_2), \quad j = 1, 2, \\ u_{23} = i(k_+ k_2) [\gamma(k_1 + k_2)^4 - i\sigma(k_1 + k_2)^3 - \alpha(k_1 + k_2)^2 + a_0 + i\sigma(k_1^3 + k_2^3)]^{-1} \times \\ \times (\delta_1 + i(k_1 + k_2) \delta_2) = i(k_1 + k_2) [\lambda(k_1 + k_2) + i\sigma(k_1^3 + k_2^3)]^{-1} (\delta_1 + i(k_1 + k_2) \delta_2), \\ u_{24} = i(k_1 - k_2) [\lambda(k_1 - k_2) + i\sigma(k_1^3 - k_2^3)]^{-1} (\delta_1 + i(k_1 - k_2) \delta_2).$$

После этого, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получаем уравнение для u_3 . Из условия его разрешимости в указанном классе функций приходим к системе уравнений для определения амплитуд ξ_1 и ξ_2 :

$$\frac{d\xi_1}{dt} = g_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial y} + a_1 \xi_1 + \xi_1 [A_1 |\xi_1|^2 + B_1 |\xi_2|^2], \\ \frac{d\xi_2}{dt} = g_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial y} + a_1 \xi_2 + \xi_2 [B_2 |\xi_1|^2 + A_2 |\xi_2|^2]. \quad (31)$$

Для коэффициентов этой системы верны формулы

$$g_j = i\lambda'(k_j), \quad j = 1, 2, \\ A_j = k_j (i\delta_1 - k_j \delta_2) u_{2j} + ik_j (\varkappa_1 + ik_j \varkappa_2), \quad j = 1, 2, \\ B_1 = ik_1 (\delta_1 + ik_1 \delta_2) [u_{23} + u_{24}] + 2ik_1 (\varkappa_1 + ik_1 \varkappa_2), \\ B_2 = ik_2 (\delta_1 + ik_2 \delta_2) [u_{23} + \bar{u}_{24}] + 2ik_2 (\varkappa_1 + ik_2 \varkappa_2).$$

Следующее утверждение вытекает из самой процедуры построения системы уравнений (31).

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции $\xi_j = \xi_{j0}(\tau, y)$, $j = 1, 2$, являются ограниченными при $\varepsilon \in [\tau_0, \infty]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ решениями системы (31). Тогда при всех достаточно малых ε уравнение (2) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{3/2})$ решение $u_0(t, x, \varepsilon)$, для которого

$$u_0(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \left[\sum_{j=1}^2 \xi_{j0}(\varepsilon t, \varepsilon x) e^{ik_j x + i\sigma k_j^3 t} + \text{к.с.} \right] + \varepsilon u_{20}(\sigma k_1^3 t, \sigma k_2^3 t, x, \varepsilon t, \varepsilon x),$$

$$\text{где } u_{20} = u_2|_{\xi_j = \xi_{j0}(\varepsilon t, \varepsilon x)}.$$

Рассмотрим вопрос о существовании решений системы (31) вида $\xi_j = \rho_j e^{iP_j y + i\varphi_j \tau}$, $j = 1, 2$, $\rho_j \geq 0$, где ρ_j , P_j и φ_j – вещественные. Фиксируем произвольно значения P_1 и P_2 . Для определения параметров ρ_j и φ_j приходим к простым уравнениям

$$\begin{aligned} a_1 + P_1 \operatorname{Re} \lambda''(k_1) + \rho_1^2 \operatorname{Re} A_1 + \rho_2^2 \operatorname{Re} B_1 &= 0, \\ a_1 + P_2 \operatorname{Re} \lambda''(k_2) + \rho_1^2 \operatorname{Re} B_2 + \rho_2^2 \operatorname{Re} A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

В тех случаях, когда по заданным P_1 и P_2 удастся определить ρ_1^2 и ρ_2^2 , значения φ_1 и φ_2 находим из равенств

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= P_1 \operatorname{Im} g_1 + \rho_1^2 \operatorname{Im} A_1 + \rho_2^2 \operatorname{Im} B_1, \\ \varphi_2 &= P_2 \operatorname{Im} g_2 + \rho_1^2 \operatorname{Im} B_2 + \rho_2^2 \operatorname{Im} A_2. \end{aligned}$$

Отметим, что решению системы (32) с одной нулевой координатой отвечает периодическое по t решение уравнения (2). Решению (32) с ненулевыми координатами отвечает тор в (2) с асимптотикой (30). В обоих случаях можно последовательно определять следующие члены асимптотического разложения (30).

ПРИМЕР 2. Пусть $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Тогда

$$\operatorname{Re} A_j = -\kappa_2 k_j^2, \quad \operatorname{Re} B_j = -2\kappa_2 k_j^2.$$

Предположим еще, что $k_2 = 2k_1$, т.е. $a_0 = -4\alpha^2(25\gamma)^{-2}$ и $\kappa_2 > 0$. Удобно ввести следующие обозначения. Пусть $\tilde{a}_1 = a_1(\kappa_2 k_1^2)^{-2}$, $\tilde{P}_j = P_j(\operatorname{Re} \lambda''(k_j))(\kappa_2 k_j^2)^{-1}$. Определим множество Γ всех таких $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$, для которых система уравнений (32) разрешима. Получаем, что это множество Γ расположено между двумя лучами, образованными прямыми $\tilde{P}_2 = \tilde{P}_1/2 + \tilde{a}_1/4$ и $\tilde{P}_2 = 2\tilde{P}_1 + 7\tilde{a}_1/4$, как показано на рис. 2а.

4.2. Инвариантные торы в краевой задаче (17), (18). Рассмотрение краевой задачи позволяет ответить на вопрос о существовании, асимптотике и устойчивости инвариантных торов. Пусть для значения T_0 в краевом условии (18) выполнено равенство

$$T_0 = 2\pi k_1^{-1}. \quad (33)$$

Тогда линейное уравнение (20) имеет T_0 -периодическое по x и $(2\pi/\sigma k_1^3)$ -периодическое по t решение $\xi_1 e^{i\Omega_1} + \bar{\xi}_1 e^{-i\Omega_1}$.

Рис. 2

Для того чтобы и второе периодическое решение $\xi_2 e^{i\Omega_2} + \bar{\xi}_2 e^{-i\Omega_2}$ тоже было решением краевой задачи (18), необходимо, чтобы выполнялось условие $k_2 = mk_1$, где $m > 1$ – целое. При $m > 2$ характеристическое уравнение (уравнение (5) при $k = nk_1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеет корни с положительными вещественными частями. И в этом случае, конечно, можно обосновать существование и найти асимптотику инвариантных торов, но они будут заведомо неустойчивы. Поэтому в настоящем пункте мы предполагаем, что

$$k_2 = 2k_1. \quad (34)$$

Отметим, что это равенство справедливо при

$$a_0 = -4\alpha^2(25\gamma)^{-1}.$$

Итак, при условиях (33), (34) характеристическое уравнение имеет две пары чисто мнимых корней, а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части.

Тогда в краевой задаче (17), (18) при всех достаточно малых ε существует четырехмерное локальное инвариантное интегральное многообразие, на котором главная часть решений определяется из системы двух комплексных ОДУ вида (12) (см. книгу [24]). Для нахождения всех коэффициентов этого уравнения используем формальный ряд

$$u = \varepsilon^{1/2} \left[\sum_{j=1}^2 \xi_j(\tau) e^{i\Omega_j} + \text{к.с.} \right] + \varepsilon u_2(t_1, t_2, x, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_3(t_1, t_2, x, \tau) + \dots \quad (35)$$

Здесь функции $u_j(t_1, t_2, x, \tau)$ являются периодическими по первым трем аргументам и $dt_j/dt = \sigma k_j^3 + 0(\varepsilon)$. Подставляя (35) в (18) и производя стандартные действия, получаем для $\xi_j(\tau)$ систему (12), в которой

$$b_j = a_1 + \lambda''(k_j) \delta k_j, \quad j = 1, 2, \quad \beta_1 = A_1, \quad \gamma_1 = B_1, \quad \beta_2 = B_2, \quad \gamma_2 = A_2.$$

Для определения решений системы (12) вида $\xi_j = \rho_j e^{i\phi_j \tau}$, $\rho_j \geq 0$, $j = 1, 2$, записываем систему уравнений для ρ_1 и ρ_2

$$\begin{aligned} a_1 + \delta k_1 \operatorname{Re} \lambda''(k_1) + \rho_1^2 \operatorname{Re} A_1 + \rho_2^2 \operatorname{Re} B_1 &= 0, \\ a_1 + \delta k_2 \operatorname{Re} \lambda''(k_2) + \rho_1^2 \operatorname{Re} B_2 + \rho_2^2 \operatorname{Re} A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Эта система отличается от системы (32) внешне только вторыми слагаемыми в левых частях каждого из уравнений (36). Тем не менее отличие носит принципиальный характер. Если (31) содержит два независимых параметра P_1 и P_2 , то в (36) вместо P_j стоят соответственно множители $k_j \Delta$. Таким образом, произвольным является только один параметр. Учитывая условие (34), приходим к заключению, что система (36) совпадает с (31) при $P_2 = 2P_1$ и при соответствующем выборе параметра Δ : $\Delta = P_1 k_1^{-1}$.

Например, при тех же ограничениях, что и в примере 2, множество всех Δ , при которых система (36) разрешима, находится при $\tilde{a}_1 > 0$ на отрезке между сторонами лучей, задающими Γ (см. рис. 2а). Если же $\tilde{a}_1 < 0$, то соответствующее множество пусто (см. рис. 2б).

Итоговое утверждение, сформулированное выше, является стандартным для бифуркации в критическом случае пары чисто мнимых корней характеристического уравнения без главных резонансов. Отметим, что если в условиях примера 2 двумерный тор существует, то он неустойчив.

5. О СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ В ОБОБЩЕННОМ УРАВНЕНИИ КУРАМОТО–СИВАШИНСКОГО

В данном разделе мы предполагаем, что

$$a_0 = -4\alpha^2(25\gamma)^{-1}.$$

Тогда уравнение $\operatorname{Re} \lambda(k) = 0$ имеет решение $k = \pm k_0$, $k_0 = \alpha(2\gamma)^{-1}$ (см. рис. 3), причем выполнены соотношения

$$\operatorname{Re} \lambda'(k_0) = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda''(k_0) < 0. \quad (37)$$

Сначала рассмотрим простейшую ситуацию, базирующуюся на бифуркации Андронова–Хопфа.

5.1. Бифуркация Андронова–Хопфа. Положим

$$T_0 = 2\pi k_0^{-1} = 4\pi\gamma(\alpha)^{-1}. \quad (38)$$

Рассмотрим для уравнения (17) периодическую краевую задачу (18), где для T_0 верна формула (38). Тогда у характеристического уравнения (5), где $k = nk_0$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, существует пара чисто мнимых корней $\pm i\sigma k_0^3$ (при $n = \pm 1$), а все остальные корни (15) имеют отрицательные вещественные части. Пусть параметр a в (17) задан равенством $a = a_0 + \varepsilon^2 a_{10}$ (в терминах коэффициентов (17) можно говорить о том, что $a_1 = \varepsilon a_{10}$). Основное отличие от ситуации, рассмотренной в разделе 3, состоит лишь в том, что здесь коэффициент a_0 в уравнении (23) (на двумерном локальном инвариантном многообразии) имеет порядок ε . Изменения

Рис. 3

в алгоритмическом плане не существенны: в аналоге формального ряда (22) разложение идет по целым степеням ε (а не по $\varepsilon^{1/2}$) и в показателе экспоненты первых двух слагаемых появляется периодическая зависимость от εt .

Итак, введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon[\xi(\tau)e^{(ik_0x + i\sigma k_0^3t)(1+3\Delta\varepsilon)} + \text{к.с.}] + \\ + \varepsilon^2 u_2(t_0, x, \tau) + \varepsilon^3 u_3(t_0, x, \tau) + \dots, \quad t_0 = 1 + 3\Delta\varepsilon, \quad (39)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, а зависимость функций $u_j(t, x, \tau)$ от первых двух аргументов является периодической. Подставляя (39) в (17) и производя стандартные действия, сначала находим, что для $u_2(t, x, \varepsilon)$ имеет место формула

$$u_2 = v\xi^2 e^{2i\Omega} + \text{к.с.}, \quad \Omega = k_0 x + \sigma k_0^3 t,$$

в которой

$$v = k_0(2\delta_2 k_0 - i\delta_1)[16\gamma k_0^4 - 6i\sigma k_0^3 - 4\alpha k_0^2 - a_0]^{-1}.$$

На следующем шаге из условия разрешимости получающегося уравнения относительно u_3 приходим к уравнению для определения амплитуды $\xi(\tau)$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = a_{01}\xi + d|\xi|^2\xi, \quad (40)$$

в котором коэффициент d – тот же, что и в (24), и

$$a_{01} = a_{10} + \frac{1}{2}\Delta^2 k_0^2[-12\gamma k_0^2 + 2a + 6i\sigma k_0].$$

Отметим, что

$$\text{Re } a_{01} = a_{10} + \frac{1}{2}\Delta^2 k_0^2 \text{Re } \lambda''(k_0). \quad (41)$$

Итоговое утверждение стандартно: грубым периодическим решениям (40) отвечает цикл той же устойчивости с асимптотикой (39).

5.2. Локальная динамика уравнения (2) без граничных условий. В данном пункте мы рассматриваем вопрос о построении асимптотики решений, формирующихся на модах, близких к $\pm k_0$. Применим формализм (30). Рассмотрим формальный ряд

$$u = \varepsilon[\xi(\tau, y)e^{i\Omega_0} + \text{к.с.}] + \varepsilon^2 u_2(t, x, \tau, y) + \varepsilon^3 u_3(t, x, \tau, y) + \dots, \quad \Omega_0 = k_0 x + \sigma k_0^3 t, \quad (42)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $y = \varepsilon(x - 3\sigma k_0^2 t)$, а функции u_j периодичны по первым двум аргументам. Подставим (42) в (2). Производя стандартные действия, для определения амплитуды $\xi(\tau, y)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \lambda''(k_0) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + a_{10} \xi + d|\xi|^2 \xi. \quad (43)$$

Значение коэффициента d в (43) то же, что и в (40) и (24). В силу условий (37) уравнение (43) принадлежит классу уравнений Гинзбурга–Ландау.

ТЕОРЕМА 3. Пусть уравнение (43) имеет ограниченное решение $\xi(\tau, y)$ при $\tau \in [\tau_0, \infty]$, $y \in (-\infty, \infty)$. Тогда у уравнения (2) при всех достаточно малых ε существует асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^2)$ решение $u(t, x, \varepsilon)$, для которого

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon[\xi(\varepsilon^2 t, \varepsilon(x - 3\sigma k_0^2 t)) e^{ik_0 x + i\sigma k_0^3 t} + \kappa.c.].$$

Отметим (см. книгу [27]), что уравнение (43) может иметь решения сложной структуры.

5.3. Уравнение (2) на конечном, но достаточно большом отрезке изменения пространственной переменной. Рассмотрим вопрос о связи между поведением решений уравнения (2) без граничных условий, т. е. на всей оси $x \in (-\infty, \infty)$, и уравнением (2) с граничными условиями, заданными на асимптотически большом отрезке изменения пространственной переменной.

Основное предположение состоит в том, что в периодическом краевом условии (18) параметр T является достаточно большим:

$$T \gg 1. \quad (44)$$

Удобно произвести замены $x \rightarrow Tx$, $u(t, Tx) \rightarrow u(t, x)$ и $\varepsilon = T^{-1} \ll 1$. В результате получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^4 \gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \varepsilon^3 \sigma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \varepsilon^2 \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \delta_1 u \frac{\partial u}{\partial x} + \\ + \delta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \varepsilon \kappa_1 u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \kappa_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = (a_0 + \varepsilon a_{10}) u, \end{aligned} \quad (45)$$

$$u(t, x + 1) \equiv u(t, x). \quad (46)$$

Характеристическое уравнение для линеаризованной в нуле краевой задачи (45), (46) имеет вид

$$\lambda = -\varepsilon^4 n^4 \gamma \pi^4 + i \varepsilon^3 n^3 \sigma \pi^3 + \varepsilon^2 n^2 \alpha \pi^2 + a_0 + \varepsilon^2 a_{10}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (47)$$

Введем обозначения. Через $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ обозначим такую величину, которая дополняет выражение $k_0(\pi\varepsilon)^{-1}$ до целого. Рассмотрим такие асимптотически большие номера $n = n_\varepsilon$, для которых верны равенства

$$n_\varepsilon = k_0(\pi\varepsilon)^{-1} + \theta + m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (48)$$

Корни λ_n с номерами n_ε имеют асимптотику

$$\lambda_{n_\varepsilon} = i\sigma k_0^3 + 3i\sigma k_0^2\pi(\theta + m)\varepsilon + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2}\lambda''(k_0)\pi^2 m^2 + \lambda''(k_0)\pi^2\theta m + \frac{1}{2}\lambda''(k_0)\pi^2\theta^2 + a_{10} \right] + O(\varepsilon^3). \quad (49)$$

Линеаризованное уравнение имеет решения $\xi_m e^{in_\varepsilon x + \lambda_{n_\varepsilon} t} + \text{к.с.}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Согласно (49) приходим к выводу, что бесконечно много корней характеристического уравнения стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это означает, что в задаче об устойчивости нулевого решения реализуется критический случай бесконечной размерности. Здесь уже нельзя воспользоваться результатами о существовании инвариантных интегральных многообразий и методом нормальных форм. Методика исследования локальной динамики в таких системах разработана в статьях [28]–[32]. Применим ее для рассматриваемой краевой задачи. Сначала введем в рассмотрение формальный ряд

$$\tilde{u} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \xi_m(\tau) e^{in_\varepsilon x + i\sigma(k_0^3 + 3\varepsilon\pi(\theta+m)t)} + \text{к.с.},$$

состоящий из амплитуд $\xi_m(\tau)$, умноженных на собственную функцию

$$e^{in_\varepsilon x} = e^{i(k_0(\pi\varepsilon)^{-1} + \theta + m)x}$$

и на периодическую функцию времени с показателем, отличающимся от λ_{n_ε} на величину порядка ε^2 . Этот ряд запишем в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= e^{i(k_0(\pi\varepsilon)^{-1} + \theta\pi)x + i\sigma k_0^3(1+3\pi k_0\theta\varepsilon)t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \xi_m(\tau) e^{i\pi m(x+3\sigma k_0^2\varepsilon t)} + \text{к.с.} = \\ &= \xi(\tau, y) e^{i(k_0(\pi\varepsilon)^{-1} + \theta\pi)x + i\sigma k_0^3(1+3\pi k_0^{-1}\theta\varepsilon)t} + \text{к.с.} \end{aligned}$$

Здесь $y = x + 3\sigma k_0^2\varepsilon t$ и использовано обозначение $\xi(\tau, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \xi_m(\tau) e^{i\pi m y}$. Отметим также, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i\pi m \xi_m(\tau) e^{i\pi m y}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \pi^2 m^2 \xi_m(\tau) e^{i\pi m y}.$$

Основная конструкция базируется на использовании в (45), (46) представления

$$u = \varepsilon \tilde{u} + \varepsilon^2 u_2(t_1, x, \tau, y) + \varepsilon^3 u_3(t_1, x, \tau, y) + \dots, \quad (50)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $t_1 = (1 + 3\pi k_0^{-1}\theta\varepsilon)t$, а функции u_j периодичны по первым двум аргументам. Подставим (50) в (45). Для u_2 сразу приходим к равенству

$$u_2 = (2\sigma_2 k_0^2 - i\sigma_1 k_0)[16\gamma k_0^4 - 6i\sigma k_0^3 - 4\alpha k_0^2 - a_0]^{-1} \xi^2(\tau, y) + \text{к.с.}$$

Из условия разрешимости уравнения относительно u_3 получаем следующую краевую задачу для нахождения $\xi(\tau, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = & -\frac{1}{2}\lambda''(k_0)\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + i\lambda''(k_0)\pi\theta\frac{\partial \xi}{\partial y} + \\ & + \left(a_{10} + \frac{1}{2}\lambda''(k_0)\pi^2\theta^2\right)\xi + d|\xi|^2\xi, \quad \xi(\sigma, y+1) \equiv \xi(\tau, y). \end{aligned} \quad (51)$$

Значение d здесь то же самое, что и в (43). Условие (37) на $\lambda''(k_0)$ означает, что краевая задача (51) является краевой задачей Гинзбурга–Ландау. Отметим ряд интересных результатов об устойчивости специальных решений (51) – непрерывных волн (см. статью [33]).

6. УРАВНЕНИЕ КУРАМОТО–СИВАШИНСКОГО С БОЛЬШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРИ ТРЕТЬЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим краевую задачу (2), (3) в предположении, что параметр σ является достаточно большим:

$$\sigma \gg 1.$$

Положим $\varepsilon = \sigma^{-1}$, тогда $0 < \varepsilon \ll 1$. После нормировки времени $t \rightarrow \sigma^{-1}t$ получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \varepsilon \left[\gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_0 u + \varkappa_1 u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ \left. + \varkappa_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad u(t, x+1) \equiv u(t, x), \quad M(u) = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Отметим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ бесконечно много корней характеристического уравнения (5) (при $k = 2\pi n/T$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$) стремятся к мнимой оси. Тем самым и здесь реализуется критический случай бесконечной размерности в задаче об устойчивости. Основываясь на изложенной выше методике, введем в рассмотрение формальный ряд

$$u = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\xi_k(\tau) e^{ikx+ik^3t} + \text{к.с.}) + \varepsilon u_1(t, x, \tau) + \dots, \quad (53)$$

где $\varepsilon = \varepsilon t$, а $u_j(t, x, \tau)$ периодичны по первым двум аргументам. Подставим (53) в (52). Из условия разрешимости в указанном классе функций получающегося уравнения относительно u_1 приходим к бесконечной системе уравнений для определения $\xi_k(\tau)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, вида

$$\dot{\xi}_k(\tau) = \Phi_k(\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots). \quad (54)$$

Для того чтобы можно было компактно записать эту систему уравнений, введем несколько обозначений. Пусть $\xi(x)$ – некоторая (гладкая) T -периодическая функция и ξ_k , $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, – ее коэффициенты Фурье при гармониках $e^{ik2\pi(T)^{-1}t}$, т. е.

$$\xi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k e^{ik2\pi T^{-1}x}.$$

Тогда

$$\frac{1}{T} \int_0^T \xi(x) \bar{\xi}(x) dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\xi_k|^2.$$

Далее через $V(\xi(x))$ обозначим оператор, который ставит в соответствие функции $\xi(x)$ бесконечномерный вектор $(\dots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots)$. Условимся считать, что произведение векторов $V(\xi_1(x)) \cdot V(\xi_2(x))$ – покоординатное, а для скалярного произведения $V(\xi)$ и $\bar{V}(\xi)$ имеем $(V(\xi), \bar{V}(\xi)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\xi_k|^2$.

Легко проверить, что уравнение для амплитуд ξ_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, можно записать в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \gamma \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a_0 \xi + R(\xi), \quad \xi(\tau, x + T) \equiv \xi(\tau, x), \quad (55)$$

где

$$R(\xi) = \varkappa_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} M(|\xi|^2) \right) - \frac{\partial}{\partial x} (V^2(\xi), \bar{V}(\xi)) + \varkappa_2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} M(|\xi|^2) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (V^2(\xi), \bar{V}(\xi)) \right).$$

Обратим внимание, что уравнение (55) отличается от уравнения (2) не только отсутствием слагаемого $\sigma \partial^3 \xi / \partial x^3$, но, главное, специализированной нелинейной комплексной функцией.

Пусть найдется некоторое решение $\xi(\tau, x)$ краевой задачи (55). Это означает, что определены все его коэффициенты Фурье $\xi_k(\tau, x)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. По этим коэффициентам в (52) формируется главная часть решения $u(t, x)$:

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k(\varepsilon t) e^{ikx + ik^3 t} + O(1).$$

Конечно, легко записать простейшие решения краевой задачи (55) вида $\xi = \rho e^{i\psi x + i\phi \tau}$, где $\psi = 2\pi T^{-1} k_0$. Получаем тогда для определения величин ρ и ϕ уравнение

$$i\phi + \gamma\psi^4 - \alpha\phi^2 + a_0 + 3\delta_1 i\psi\rho^2 - 3\delta_2 \psi^2\rho^2 = 0.$$

Тем самым

$$\rho^2 = [\gamma\psi^4 - \alpha\phi^2 + a_0](3\delta_2\psi^2)^{-1}, \quad \phi = 3\delta_1\psi\rho^2.$$

7. ВЫВОДЫ

1. Получены условия существования одного и двух (семейств) циклов в обобщенном уравнении Курамото–Сивашинского. Найдена их асимптотика.
2. Получены условия существования и асимптотика двухмерного тора.
3. В задачах с периодическими краевыми условиями исследован вопрос об устойчивости найденных циклов и торов.
4. Показано, что при определенных условиях в уравнении Курамото–Сивашинского могут существовать сложные динамические режимы. Разработан алгоритм построения асимптотики решений. Отметим, что численные исследования соответствующих решений без использования асимптотических методов затруднительны.

Дело в том, что при формировании решений может быть задействовано большое число мод, причем значения этих мод достаточно велики.

5. Важно отметить, что получены явные формулы асимптотических приближений решений. Это позволяет проследить зависимость решений от всех параметров уравнения. Особо подчеркнем, что введены и так называемые “внутренние” параметры. Они не меняют само уравнение, а учитываются лишь в нормировке пространственной переменной. Тем не менее их роль в исследовании динамики краевых задач велика.

6. “Внутренний” параметр $\theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ играет особую роль в вопросе о структуре решений в п. 5.3. При уменьшении ε ($\varepsilon \rightarrow 0$) параметр $\theta(\varepsilon)$ бесконечное количество раз меняется от 0 до 1. Динамика решений может зависеть от $\theta(\varepsilon)$. Поэтому при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу изменений $\theta(\varepsilon)$ могут бесконечно происходить прямые и обратные бифуркации. Это, в частности, говорит о высокой чувствительности динамических свойств к изменению параметров уравнения в условиях п. 5.3.

7. В случае, когда большим является параметр σ , получено новое специальное уравнение для описания главных частей решения исходного уравнения.

Список литературы

- [1] Н. А. Кудряшов, *Методы нелинейной математической физики*, Издательский дом “Интеллект”, Долгопрудный, 2010.
- [2] D. J. Benney, “Long waves on liquid films”, *J. Math. Phys.*, **45**:1–4 (1966), 150–155.
- [3] А. А. Непомнящий, “Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости”, *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1974, № 3, 28–34.
- [4] В. Я. Шкадов, “Уединенные волны в слое вязкой жидкости”, *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1977, № 1, 63–66.
- [5] M. V. Krishna, S. P. Lin, “Nonlinear stability of a viscous film with respect to three-dimensional side-band disturbances”, *Phys. Fluids*, **20** (1977), 1039–1044.
- [6] Y. Kuramoto, “Diffusion-induced chaos in reaction systems”, *Progr. Theor. Phys. Supp.*, **64** (1978), 346–367.
- [7] G. I. Sivashinsky, D. M. Michelson, “On irregular wavy flow of a liquid down a vertical plane”, *Prog. Theor. Phys.*, **63**:6 (1980), 2112–2114.
- [8] Y. Kuramoto, T. Tsuzuki, “Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium”, *Prog. Theor. Phys.*, **55**:2 (1976), 356–369.
- [9] G. I. Sivashinsky, “Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames”, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **15** (1983), 179–199.
- [10] B. Nicolaenko, B. Scheurer, R. Temam, “Some global dynamical properties of the Kuramoto–Sivashinsky equations: nonlinear stability and attractors”, *Phys. D*, **16**:2 (1985), 155–183.
- [11] А. М. Архипов, “Анализ фазового портрета обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского”, *Дифференц. уравнения*, **29**:6 (1993), 990–998.
- [12] А. М. Архипов, Yu. S. Il'yashenko, “Jump of energy from low harmonics to high ones in the multidimensional Kuramoto–Sivashinsky equation”, *Sel. Math.*, **13**:3 (1994), 183–196.
- [13] Н. А. Кудряшов, “Метод разложений Пенлеве для неинтегрируемых нелинейных уравнений”, *Матем. моделирование*, **2**:12 (1990), 102–115.
- [14] Н. А. Кудряшов, “Точные решения нелинейных волновых уравнений, встречающихся в механике”, *ПММ*, **54**:3 (1990), 372–375.
- [15] N. A. Kudryashov, “Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations”, *Chaos Solitons Fractals*, **24**:5 (2005), 1217–1231.

- [16] N. A. Kudryashov, “Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics”, *J. Appl. Math. Mech.*, **52**:3 (1988), 361–365.
- [17] T. Kawahara, “Formation of saturated solitons in a nonlinear dispersive system with instability and dissipation”, *Phys. Rev. Lett.*, **51**:5 (1983), 381–383.
- [18] J. Topper, T. Kawahara, “Approximate equations for long nonlinear waves on a viscous fluid”, *J. Phys. Soc. Japan*, **44**:2 (1978), 663–666.
- [19] H. Zhao, Sh. Tang, “Nonlinear stability and optimal decay rate for a multidimensional generalized Kuramoto–Sivashinsky system”, *J. Math. Anal. Appl.*, **246**:2 (2001), 423–445.
- [20] F. C. Pinto, “Nonlinear stability and dynamical properties for a Kuramoto–Sivashinsky equation in space dimension two”, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **5**:1 (1999), 117–136.
- [21] K.-S. Chou, “On a modified Kuramoto–Sivashinsky equation”, *Differ. Integral Equ.*, **15**:7 (2002), 863–874.
- [22] V. Varlamov, “On the Kuramoto–Sivashinsky equation in a disk”, *Ann. Polon. Math.*, **73**:3 (2000), 227–256.
- [23] L. Molinet, “Local dissipativity in L^2 for the Kuramoto–Sivashinsky equation in spatial dimension 2”, *J. Dynam. Differ. Equ.*, **12**:3 (2000), 533–556.
- [24] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970.
- [25] Дж. Марсден, М. Мак-Кракен, *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*, Мир, М., 1980.
- [26] Дж. Гугенхеймер, Ф. Холмс, *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей*, ИКИ, М.–Ижевск, 2002.
- [27] Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский, *Нестационарные структуры и диффузионный хаос*, Наука, М., 1992.
- [28] И. С. Кащенко, С. А. Кащенко, “Локальная динамика систем разностных и дифференциально-разностных уравнений”, *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, **22**:1 (2014), 71–92.
- [29] С. А. Кащенко, “О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией”, *Докл. АН СССР*, **299**:5 (1988), 1049–1052.
- [30] S. A. Kaschenko, “Normalization in the systems with small diffusion”, *Internat. J. Bifurcations Chaos*, **6**:6 (1996), 1093–1109.
- [31] И. С. Кащенко, С. А. Кащенко, “Квазинормальные формы двухкомпонентных сингулярно возмущенных систем”, *Докл. РАН*, **447**:4 (2012), 3760–381.
- [32] И. С. Кащенко, “Мультистабильность в нелинейных параболических системах с малой диффузией”, *Докл. РАН*, **435**:2 (2010), 164–167.
- [33] А. А. Кащенко, “Устойчивость бегущих волн в уравнении Гинзбурга–Ландау с малой диффузией”, *Модел. и анализ информ. систем*, **18**:3 (2011), 58–62.

Поступила в редакцию 24.03.2016