Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Юн-Шуай Чжан, Дэ-Цинь Цю, И Чэн, Хэ Цзин-Сун, Преобразование Дарбу для системы Вадати–Коно–Итикавы, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 2, 275–290

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 08:53:04

© 2017 г.

Юн-Шуай Чжан*, Дэ-Цинь Цю†,
И Чэн*, Цзин-Сун Хэ†

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВАДАТИ–КОНО–ИТИКАВЫ

На основе закона сохранения построено преобразование годографа для уравнения Вадати–Коно–Итикавы, устанавливающее эквивалентность этого уравнения модифицированному уравнению Вадати–Коно–Итикавы. Для модифицированного уравнения с помощью преобразования Дарбу получено, что как в фокусирующем, так и в нефокусирующем (рассеивающем) случае из вакуумного решения можно аналитически получить решение типа светлый солитон, а асимптотический анализ показывает, что столкновения n солитонов являются упругими. Также обнаружено, что модифицированное уравнение Вадати–Коно–Итикавы допускает решения типа волн-убийц и бризеров, даже несмотря на то, что отсутствует модуляционная неустойчивость.

Ключевые слова: преобразование Дарбу, система Вадати–Коно–Итикавы, преобразование годографа, солитон, волна-убийца, модуляционная неустойчивость.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9197>

1. ВВЕДЕНИЕ

Солитонные решения, или локализованные волны, возникающие из сочетания дисперсии и нелинейности, представляют собой известное явление в интегрируемых системах. Впервые систематический способ построения аналитических солитонных решений уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) был найден Гарднером, Гринном, Крускалом и Миурой [1]. Этот метод сейчас известен как метод обратной задачи рассеяния (МОЗР). Вскоре после открытия этот метод был применен к нелинейному уравнению Шредингера (НУШ) [2], [3], уравнению $\sin$ -Гордон [4], модифицированному уравнению КдФ (мКдФ) [5], интегро-дифференциальным уравнениям [6]–[8],

Работа была поддержана National Natural Science Foundation of China (грант № 11271210) и К. С. Wong Magna Fund (Ningbo University).

*School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, China

†Mathematics Department, Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo, China.
E-mail: hejingsong@nbu.edu.cn, jshe@ustc.edu.cn

уравнению Кадомцева–Петвиашвили (КП) [9], [10] и многим другим. Далее Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сегур (АКНС) показали [11], [12], что для достаточно большого класса нелинейных эволюционных уравнений решения можно получить, рассматривая одну задачу рассеяния, и доказали полную интегрируемость нелинейных эволюционных уравнений.

Помимо перечисленных уравнений имеются два существенно нелинейных уравнения, полученных Вадати, Коно и Итикавой (ВКИ) [13]. Первое уравнение (уравнение ВКИ–I) записывается как

$$q_t - i \left[\frac{q}{\sqrt{1-rq}} \right]_{xx} = 0, \quad r_t + i \left[\frac{r}{\sqrt{1-rq}} \right]_{xx} = 0, \quad (1)$$

что дает

$$\begin{aligned} q_t - i \left[\frac{q}{\sqrt{1-|q|^2}} \right]_{xx} &= 0 \quad \text{при} \quad r = q^*, \\ q_t - i \left[\frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}} \right]_{xx} &= 0 \quad \text{при} \quad r = -q^*, \end{aligned} \quad (2)$$

где звездочкой обозначено комплексное сопряжение. Второе уравнение (уравнение ВКИ–II) имеет вид

$$q_t + \left[\frac{q_x}{(1-rq)^{3/2}} \right]_{xx} = 0, \quad r_t + \left[\frac{r_x}{(1-rq)^{3/2}} \right]_{xx} = 0. \quad (3)$$

В специальном случае $r = -q$ уравнение (3) дает так называемый петлевой солитон [14]

$$q_t + \left[\frac{q_x}{(1+q^2)^{3/2}} \right]_{xx} = 0.$$

Также, полагая в (3) $r = -1$ и $q = u - 1$, получаем уравнение Гарри Дима [15]

$$u_t = 2(u^{-1/2})_{xxx}. \quad (4)$$

Оригинальным свойством уравнений (1) и (3) является существование эффектов насыщения нелинейных компонент [13]. Солитонное решение уравнения ВКИ–I при $r = -q^*$ было найдено в работе [16], однако оно имеет неявную форму, так как включает в себя множитель $\epsilon_+(x)$ (см. формулы (2.22) и (4.19) в [16]), который определяется членом минус первого порядка в разложении ВКБ собственной функции по собственным значениям, связанным с интегралом от $1 - \sqrt{1+|q|^2}$. Это усложняет нахождение солитонного решения n -го порядка.

Кроме того, в работах [17] и [18] показано, что уравнения ВКИ–I (1) и ВКИ–II (3) могут быть связаны с системой АКНС последовательностью калибровочных преобразований. Так, например, в работе [18] решение уравнения ВКИ–I (1) выведено из решения уравнения мКдФ с помощью преобразований зависимых и независимых переменных (см. уравнения (2.13) и (4.5) в [18]). Однако из-за преобразований зависимых переменных решение высшего порядка для уравнения ВКИ–I нельзя получить в явном виде. Таким образом, нет сомнений, что вывод явного выражения и асимптотики для n -го порядка солитонного решения уравнения ВКИ–I остается

открытой проблемой. Также в свете интенсивных дискуссий о решениях нелинейных эволюционных уравнений типа волн-убийц и отсутствия волн-убийц среди решений мКдФ естественно возникает новый вопрос – существование волн-убийц для уравнения ВКИ–I.

Волна-убийца была впервые получена как решение НУШ [19], а через короткое время выведена и для других уравнений, таких как уравнение КП [20], [21], НУШ с производной [22]–[25], уравнение Чена–Ли–Лю [26], уравнений Дэви–Стюартсона [27], [28], уравнения Сасы–Сацумы [29], [30], векторного НУШ [31]–[34] и других [35]–[39]. Недавно волны-убийцы были обнаружены экспериментально в опытах с цистернами с водой [40]–[44], в оптике [45], [46], физике плазмы [47] и других [48]. Существует множество физических и математических работ о причинах, вызывающих волны-убийцы. Фактически известно, что волны-убийцы могут быть следствием модуляционной неустойчивости (МН), однако не любой вид МН ведет к волнам-убийцам [49]–[51]. Недавно было высказано мнение, что МН является необходимым, но не достаточным условием возникновения волны-убийцы как решения векторного НУШ [31]. В настоящей статье мы показываем, что волна-убийца может существовать и в отсутствие МН, откуда следует, что МН не является необходимым условием возникновения волны-убийцы для модифицированного уравнения ВКИ (мВКИ).

По аналогии с уравнением Гарри Дима, связанным с уравнениями КдФ и мКдФ преобразованием годографа [52]–[54], мы связываем ВКИ–I с уравнением мВКИ, применяя преобразование годографа, содержащего только преобразование независимых переменных. С помощью мощного метода преобразования Дарбу (ПД) [55]–[57] мы находим солитонные решения первого и n -го порядков для уравнения ВКИ–I. Формула для солитонного решения первого порядка совпадает выражением, полученным с помощью МОЗР [16], однако она более явная, так как мы смогли вычислить интеграл.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы выводим преобразованием годографа для уравнения мВКИ из уравнения ВКИ–I и строим для него ПД. Формула для решения n -го порядка уравнения мВКИ имеет детерминантный вид и может быть непосредственно перенесена на уравнение ВКИ–I. В разделе 3 получено явное выражение для солитонных решений уравнения мВКИ в двух случаях, фокусирующем (при $r = -q^*$) и рассеивающем (при $r = q^*$), и рассмотрено асимптотическое поведение этих двух типов солитонных решений. Дополнительно для уравнения мВКИ мы рассматриваем решения типа волн-убийц и бризеров и обсуждаем их МН. В разделе 4 содержатся выводы и обсуждение полученных результатов.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГОДОГРАФА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ

2.1. Преобразование годографа. Уравнения (1) допускают запись в виде пары Лакса [13]

$$\begin{aligned}\Phi_x &= M\Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda & q\lambda \\ r\lambda & i\lambda \end{pmatrix} \Phi, \\ \Phi_t &= N\Phi = \left[\frac{2\lambda^2}{\sqrt{1-rq}} \begin{pmatrix} -i & q \\ r & i \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & i\left(\frac{q}{\sqrt{1-rq}}\right)_x \\ -i\left(\frac{r}{\sqrt{1-rq}}\right)_x & 0 \end{pmatrix} \right] \Phi.\end{aligned}\quad (5)$$

Более того, если положить в уравнении (5)

$$N = \frac{4\lambda^3}{\sqrt{1-rq}} \begin{pmatrix} -i & q \\ r & i \end{pmatrix} + \frac{\lambda^2}{(1-rq)^{3/2}} \begin{pmatrix} rq_x - qr_x & 2iq_x \\ -2ir_x & qr_x - rq_x \end{pmatrix} - \\ - \lambda \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{q_x}{(1-rq)^{3/2}}\right)_x \\ \left(\frac{r_x}{(1-rq)^{3/2}}\right)_x & 0 \end{pmatrix},$$

то равенство $M_t - N_x + [M, N] = 0$ дает уравнение (3). Заметим, что законы сохранения [13] для уравнений (1), (3) имеют соответственно вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{\sqrt{1-rq}} f_1 + \frac{i}{q} \left(\frac{q}{\sqrt{1-rq}} \right)_x f_0 \right], \quad (6)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{4}{\sqrt{1-rq}} f_2 + \frac{2iq_x}{q(1-rq)^{3/2}} f_1 - \frac{1}{q} \left(\frac{q_x}{(1-rq)^{3/2}} \right)_x f_0 \right], \quad (7)$$

где

$$f_0 = i(1 - \sqrt{1-rq}),$$

$$f_1 = -\frac{q_x}{2q} \left(\frac{1}{\sqrt{1-rq}} - 1 \right) - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \ln(1-rq),$$

$$f_2 = -\frac{r_x q_x}{8i(1-rq)^{3/2}} - \frac{(rq_x + r_x q)^2}{32i(1-rq)^{5/2}} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q}{4i(1-rq)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 - \sqrt{1-rq}}{q} \right) \right].$$

Положим $1/\zeta = \sqrt{1-rq}$ и рассмотрим преобразование годографа

$$dX = \frac{1}{\zeta} dx + \frac{i}{2} \frac{r_x q - r q_x}{1-rq} dt, \quad dT = dt. \quad (8)$$

Оно дает

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial X}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} + \frac{i\zeta}{2} (r_x q - r q_x) \frac{\partial}{\partial X}. \quad (9)$$

Подставляя выражения (9) для производных в уравнения (8), получаем

$$dX = \frac{1}{\zeta} dx + \frac{i\zeta}{2} (r_x q - r q_x) dt, \quad dT = dt. \quad (10)$$

Под действием преобразования годографа (10) пара Лакса (5) переходит в

$$\Phi_X = P\Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda\zeta & \lambda\zeta q \\ \lambda\zeta r & i\lambda\zeta \end{pmatrix} \Phi, \quad (11) \\ \Phi_T = Q\Phi = \begin{pmatrix} -2i\lambda^2\zeta - \lambda\zeta^2(r_x q - r q_x)/2 & 2\lambda^2 q\zeta + i\lambda\zeta^2 q_x \\ 2\lambda^2 \zeta r - i\lambda\zeta^2 r_x & 2i\lambda^2 \zeta + \lambda\zeta^2(qr_x - r q_x)/2 \end{pmatrix} \Phi.$$

Условие совместности $P_T - Q_X + [P, Q] = 0$ дает следующую интегрируемую систему:

$$q_T = -\frac{i}{2}\zeta(r_x q - r q_x)q_x + \frac{i}{\zeta} \left(\frac{1}{\zeta} \right)_X (q\zeta)_X + \frac{i}{\zeta^2} (q\zeta)_{XX}, \\ r_T = -\frac{i}{2}\zeta(r_x q - r q_x)r_x - \frac{i}{\zeta} \left(\frac{1}{\zeta} \right)_X (r\zeta)_X - \frac{i}{\zeta^2} (r\zeta)_{XX}, \quad (12)$$

где $\zeta = 1/\sqrt{1 - qr}$, что эквивалентно одной из форм уравнения ВКИ–I на плоскости (X, T) . В дальнейшем мы будем рассматривать $q(X, T)$ и $r(X, T)$ в уравнениях (12), соответствующие паре Лакса из (11).

2.2. Вывод ПД. Общая идея ПД такова. Пусть $\Phi[1] = D\Phi$ и $\Phi[1]$ удовлетворяют уравнениям $\Phi[1]_X = P[1]\Phi[1]$ и $\Phi[1]_T = Q[1]\Phi[1]$, где $P[1]$ и $Q[1]$ имеют тот же вид, что P и Q , только q , r и ζ заменены на $q[1]$, $r[1]$ и $\zeta[1]$. Несложное вычисление дает

$$D_X + DP = P[1]D, \quad D_T + DQ = Q[1]D. \quad (13)$$

Положим

$$D = \lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где a_i , b_i , c_i и d_i – функции от X и T ($i = 1, 2$). Подстановка в уравнение (13) дает

$$\begin{aligned} a_{0X} = 0, \quad b_{0X} = 0, \quad c_{0X} = 0, \quad d_{0X} = 0, \quad a_{0T} = 0, \quad b_{0T} = 0, \quad c_{0T} = 0, \quad d_{0T} = 0, \\ \zeta[1] = \zeta + ia_{1X}, \quad q[1] = \frac{1}{\zeta[1]}(\zeta q + b_{1X}), \quad r[1] = \frac{1}{\zeta[1]}(\zeta r + c_{1X}). \end{aligned} \quad (15)$$

Возьмем $a_0 = d_0 = 1$ и $b_0 = c_0 = 0$, тогда

$$D = \lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + I,$$

где I – единичная матрица. Далее, обозначим через $\Phi_i = \begin{pmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \end{pmatrix}$ собственные функции уравнений Лакса (11), отвечающие собственным значениям $\lambda = \lambda_i$. Эти функции дают решение алгебраической системы уравнений $D\Phi_i|_{\lambda=\lambda_i} = 0$ ($i = 1, 2$), и элементы матрицы D имеют вид

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\begin{vmatrix} -f_{11} & \lambda_1 f_{12} \\ -f_{21} & \lambda_2 f_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 f_{11} & \lambda_1 f_{12} \\ \lambda_2 f_{21} & \lambda_2 f_{22} \end{vmatrix}}, & b_1 &= \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 f_{11} & -f_{11} \\ \lambda_2 f_{21} & -f_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 f_{11} & \lambda_1 f_{12} \\ \lambda_2 f_{21} & \lambda_2 f_{22} \end{vmatrix}}, \\ c_1 &= \frac{\begin{vmatrix} -f_{12} & \lambda_1 f_{12} \\ -f_{22} & \lambda_2 f_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 f_{11} & \lambda_1 f_{12} \\ \lambda_2 f_{21} & \lambda_2 f_{22} \end{vmatrix}}, & d_1 &= \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 f_{11} & -f_{12} \\ \lambda_2 f_{21} & -f_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 f_{11} & \lambda_1 f_{12} \\ \lambda_2 f_{21} & \lambda_2 f_{22} \end{vmatrix}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. ПД первого порядка для уравнения (12) имеет вид

$$D[1] = \frac{1}{|W_2|} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ f_{11} & \lambda_1 f_{11} & \lambda_1 f_{12} \\ f_{21} & \lambda_2 f_{21} & \lambda_2 f_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ f_{11} & \lambda_1 f_{11} & \lambda_1 f_{12} \\ f_{21} & \lambda_2 f_{21} & \lambda_2 f_{22} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ f_{12} & \lambda_1 f_{11} & \lambda_1 f_{12} \\ f_{22} & \lambda_2 f_{21} & \lambda_2 f_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ f_{12} & \lambda_1 f_{11} & \lambda_1 f_{12} \\ f_{22} & \lambda_2 f_{21} & \lambda_2 f_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где

$$W_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 f_{11} & \lambda_1 f_{12} \\ \lambda_2 f_{21} & \lambda_2 f_{22} \end{pmatrix}.$$

С учетом соотношений (15) новые решения уравнения (12) порождаются ПД первого порядка:

$$q[1] = \frac{1}{\zeta[1]} \left[\zeta q + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial D[1]_{12}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \right) \right], \quad r[1] = \frac{1}{\zeta[1]} \left[\zeta r + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial D[1]_{21}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \right) \right]. \quad (18)$$

Здесь

$$\zeta[1] = \zeta + i \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial D[1]_{11}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \right), \quad (19)$$

а через $D[1]_{ij}$ обозначен элемент i -й строки j -го столбца матрицы $D[1]$.

Итерациями ПД первого порядка можно получить детерминантное представление для ПД n -го порядка.

ТЕОРЕМА 2.2. *ПД n -го порядка для уравнения (12) имеет вид*

$$D[n] = \frac{1}{|W_{2n}|} \begin{pmatrix} \left| \begin{smallmatrix} 1 & \xi_n \\ \eta_n & W_{2n} \end{smallmatrix} \right| & \left| \begin{smallmatrix} 0 & \hat{\xi}_n \\ \eta_n & W_{2n} \end{smallmatrix} \right| \\ \left| \begin{smallmatrix} 0 & \xi_n \\ \hat{\eta}_n & W_{2n} \end{smallmatrix} \right| & \left| \begin{smallmatrix} 1 & \hat{\xi}_n \\ \hat{\eta}_n & W_{2n} \end{smallmatrix} \right| \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_n &= (\lambda^n, 0, \lambda^{n-1}, 0, \dots, \lambda, 0), & \hat{\xi}_n &= (0, \lambda^n, 0, \lambda^{n-1}, \dots, 0, \lambda), \\ \eta_n &= (f_{11}, f_{21}, \dots, f_{2n,1})^T, & \hat{\eta}_n &= (f_{12}, f_{22}, \dots, f_{2n,2})^T, \end{aligned}$$

и W_{2n} – это матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n f_{11} & \lambda_1^n f_{12} & \lambda_1^{n-1} f_{11} & \lambda_1^{n-1} f_{12} & \dots & \lambda_1 f_{11} & \lambda_1 f_{12} \\ \lambda_2^n f_{21} & \lambda_2^n f_{22} & \lambda_2^{n-1} f_{21} & \lambda_2^{n-1} f_{22} & \dots & \lambda_2 f_{21} & \lambda_2 f_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{2n-1}^n f_{2n-1,1} & \lambda_{2n-1}^n f_{2n-1,2} & \lambda_{2n-1}^{n-1} f_{2n-1,1} & \lambda_{2n-1}^{n-1} f_{2n-1,2} & \dots & \lambda_{2n-1} f_{2n-1,1} & \lambda_{2n-1} f_{2n-1,2} \\ \lambda_{2n}^n f_{2n,1} & \lambda_{2n}^n f_{2n,2} & \lambda_{2n}^{n-1} f_{2n,1} & \lambda_{2n}^{n-1} f_{2n,2} & \dots & \lambda_{2n} f_{2n,1} & \lambda_{2n} f_{2n,2} \end{pmatrix}.$$

Решениями n -го порядка уравнения (12), порожденными ПД n -го порядка, являются

$$\begin{aligned} q[n] &= \frac{1}{\zeta[n]} \left[\zeta q + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial D[n]_{12}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \right) \right], \\ r[n] &= \frac{1}{\zeta[n]} \left[\zeta r + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial D[n]_{21}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \right) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\zeta[n] = \zeta + i \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial D[n]_{11}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \right) \quad (22)$$

и $D[n]_{ij}$ обозначает элемент i -й строки j -го столбца матрицы $D[n]$.

С помощью теоремы 2.2 и преобразования годографа (10) мы можем получить решение уравнения ВКИ-I на плоскости (x, t) .

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Образное преобразование к преобразованию годографа (8) имеет вид*

$$x = 2 \int \zeta dX + 2i \frac{\partial D[n]_{11}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}, \quad t = T \quad (23)$$

(константой интегрирования мы пренебрегаем).

Заметим, что в следующем разделе при поиске решений в виде солитона и волны-убийцы мы вычислим интеграл (23). Уравнения ВКИ-I и мВКИ эквивалентны, так как переводятся друг в друга преобразованиями (8) и (23). Следовательно, достаточно изучать решения мВКИ на плоскости (X, T) .

3. РЕШЕНИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПД

В этом разделе мы рассматриваем решения уравнения мВКИ (12) являющегося одной из эквивалентных форм уравнения ВКИ-I. С одной стороны, если мы начинаем с вакуумного исходного решения, то приходим к очень интересному результату, что уравнение (12) имеет решение типа светлый солитон как в фокусирующем (при $r = -q^*$), так и в рассеивающем (при $r = q^*$) случаях. Это очень нетипично для интегрируемых уравнений, так как, насколько нам известно, не существует таких прецедентов, чтобы светлый солитон можно было аналитически получить из вакуумного решения для фокусирующей и рассеивающей систем одновременно.

С другой стороны, если начинать с неисчезающего исходного решения, то фокусирующая система имеет решения типа бризер и волна-убийца несмотря на отсутствие МН, и это дает, по-видимому, первое для скалярной системы подтверждение того, что МН является лишь достаточным условием возникновения волны-убийцы, как это исходно было сформулировано для векторной системы [31].

Прежде чем искать решение уравнений мВКИ (12), перечислим некоторые свойства собственных функций, обеспечивающие сохранение редукционных соотношений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Редукционное соотношение $r = \sigma q^*$ (где $\sigma = \pm 1$) сохраняется, если и только если*

$$\begin{pmatrix} f_{k1} \\ f_{k2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{j2}^* \\ \sigma f_{j1}^* \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \lambda_k = \lambda_j^*.$$

Доказательство утверждения 3.1 тривиально, мы его опускаем. В дальнейшем мы полагаем, что собственные значения и собственные функции уравнения (11) удовлетворяют условиям

$$\lambda_{2k-1} = \gamma_k, \quad \lambda_{2k} = \lambda_{2k-1}^*, \quad \begin{pmatrix} f_{2k,1} \\ f_{2k,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{2k-1,2}^* \\ \sigma f_{2k-1,1}^* \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

если не указано иное.

3.1. Два типа светлых солитонных решений. При $r = q = 0$ имеем $\zeta = 1$ и

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\theta_1} \\ e^{\theta_1} \end{pmatrix}, \quad \theta_1 = i\gamma_1 X + 2i\gamma_1^2 T. \quad (24)$$

Рис. 1. Солитон $q[1]$ на плоскости (X, T) : дефокусирующий случай (27) с $\gamma_{1,R} = 1/2$, $\gamma_{1,I} = 1/10$ (а) и фокусирующий случай (28) с $\gamma_{1,R} = 1/2$, $\gamma_{1,I} = 1/3$ (б).

В этом случае, пренебрегая константой интегрирования в следствии 2.1, получаем

$$x = 2X + 2i \frac{\partial D[n]_{11}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}, \quad t = T. \quad (25)$$

Решения уравнения мВКИ на плоскости (X, T) переходят в решения уравнения ВКИ–I на плоскости (x, t) .

- Согласно теореме 2.1 и предложению 3.1 при $r = q^*$

$$q[1] = \frac{2\gamma_{1,I}[\gamma_{1,R} \operatorname{sh}(2\theta_{1,R}) + i\gamma_{1,I} \operatorname{ch}(2\theta_{1,R})]}{|\gamma_1|^2 \operatorname{sh}^2(2\theta_{1,R}) + 2\gamma_{1,I}^2} e^{-2i\theta_{1,I}}, \quad (26)$$

где через $\gamma_{1,R}$ и $\gamma_{1,I}$ обозначены вещественная и мнимая части; аналогичный вид имеют $\theta_{1,R}$ и $\theta_{1,I}$. Скорость солитона (26) равна $4|\gamma_{1,R}|$, амплитуда постоянна и равна единице, что достигается при $\theta_{1,R} = 0$, т. е. амплитуда не зависит от собственного значения.

- Согласно теореме 2.1 и предложению 3.1 при $r = -q^*$

$$q[1] = \frac{2\gamma_{1,I}[\gamma_{1,R} \operatorname{ch}(2\theta_{1,R}) + i\gamma_{1,I} \operatorname{sh}(2\theta_{1,R})]}{|\gamma_1|^2 \operatorname{ch}^2(2\theta_{1,R}) - 2\gamma_{1,I}^2} e^{-2i\theta_{1,I}}. \quad (27)$$

При $\theta_{1,R} = 0$ функция $q[1]$ достигает амплитуды $2|\gamma_{1,I}\gamma_{1,R}|/|\gamma_{1,R}^2 - \gamma_{1,I}^2|$, причем $q[1]$ аналитична при $\gamma_{1,R} \neq \gamma_{1,I}$. Также с учетом выражения (25) мы получаем, что этот солитон совпадает с найденным в работах [58], [18], но содержит явное выражение для интеграла. Солитон (27) изображен на рис. 1а.

Заметим, что в случае $r = q^*$ функция $\zeta[1]$ обязательно имеет нули, что влечет существование сингулярных точек у решений уравнения (1) в силу преобразования годографа.

Применяя формулу (21) в теореме 2.2, мы можем аналитически получить солитонное решение n -го порядка для уравнения (12), как и в случае солитонов первого

порядка (26) и (27). Также можно описать асимптотическое поведение солитона n -го порядка.

ТЕОРЕМА 3.1. При $r = q^*$ будем считать, что $\gamma_{k,I} < 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и

$$0 < \gamma_{1,R} < \gamma_{2,R} < \gamma_{3,R} < \dots < \gamma_{n,R},$$

тогда солитонное решение n -го порядка $q[n]$ имеет следующее асимптотическое поведение при $T \rightarrow \pm\infty$:

$$q[n] \sim \sum_{k=1}^n \frac{2\gamma_{k,I}[\gamma_{k,R} \operatorname{sh}(2\theta_{k,R} \pm 2\varphi_{k,R}) + i\gamma_{k,I} \operatorname{ch}(2\theta_{k,R} \pm 2\varphi_{k,R})]}{2\gamma_{k,I}^2 + |\gamma_k|^2 \operatorname{sh}^2(2\theta_{k,R} \pm 2\varphi_{k,R})} e^{-2i\theta_{k,I} \mp 2i\varphi_{k,I} \pm 2i\phi_k},$$

где

$$e^{2\varphi_k} = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\gamma_i^* - \gamma_k}{\gamma_i - \gamma_k} \prod_{i=k+1}^n \frac{\gamma_k - \gamma_i}{\gamma_k - \gamma_i^*}, \quad e^{2i\phi_k} = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\gamma_i^*}{\gamma_i} \prod_{i=k+1}^n \frac{\gamma_i}{\gamma_i^*}$$

для $\varphi_k \in \mathbb{C}$, $\phi_k \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $v_k = X + 4\gamma_{k,R}T$. Если величина v_k постоянна, то e^{θ_j} (где $j = 1, 2, \dots, k-1$) и $e^{-\theta_j}$ (где $j = k+1, k+2, \dots, n$) стремятся к нулю при $T \rightarrow +\infty$. Следовательно, формула (21) дает

$$\zeta[n] \sim 1 + i \frac{\partial}{\partial X} \frac{\Delta_1}{\Delta_3}, \quad q[n] \sim \frac{1}{\zeta[n]} \frac{\partial}{\partial X} \frac{\Delta_2}{\Delta_3}, \quad (28)$$

где Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 приведены в приложении. Солитон (28) изображен на рис. 16. Прямым вычислением получаем после упрощения

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_3} = \frac{B_1 C_1 e^{-2\theta_k^*} - B_2 C_2 e^{2\theta_k}}{B_2 e^{2\theta_k} - B_1 e^{-2\theta_k^*}}, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_3} = \frac{A}{B_2 e^{2\theta_k} - B_1 e^{-2\theta_k^*}}, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\gamma_k^*} - \frac{1}{\gamma_k} \right) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\gamma_i^*}{\gamma_i} (\gamma_i - \gamma_k^*)(\gamma_i - \gamma_k) \prod_{i=k+1}^n \frac{\gamma_i}{\gamma_i^*} (\gamma_k - \gamma_i^*)(\gamma_k^* - \gamma_i^*), \\ B_1 &= \prod_{i=1}^{k-1} |\gamma_i - \gamma_k|^2 \prod_{i=k+1}^n |\gamma_k - \gamma_i^*|^2, \quad B_2 = \prod_{i=1}^{k-1} |\gamma_i - \gamma_k^*|^2 \prod_{i=k+1}^n |\gamma_k - \gamma_i|^2, \\ C_1 &= \sum_{l=1}^k \frac{1}{\gamma_l} + \sum_{l=k+1}^n \frac{1}{\gamma_l^*}, \quad C_2 = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{\gamma_l} + \sum_{l=k}^n \frac{1}{\gamma_l^*}, \end{aligned}$$

Подставляя (29) в соотношения (28), получаем

$$\zeta[n] \sim 1 + \frac{\gamma_{k,R}}{\operatorname{sh}^2(2\theta_{k,R} + 2\varphi_{k,R})} \left(\frac{1}{\gamma_k} - \frac{1}{\gamma_k^*} \right) \quad (30)$$

и

$$q[n] \sim \frac{2\gamma_{k,I}[\gamma_{k,R} \operatorname{sh}(2\theta_{k,R} + 2\varphi_{k,R}) + i\gamma_{k,I} \operatorname{ch}(2\theta_{k,R} + 2\varphi_{k,R})]}{2\gamma_{k,I}^2 + |\gamma_k|^2 \operatorname{sh}^2(2\theta_{k,R} + 2\varphi_{k,R})} e^{-2i\theta_{k,I} - 2i\varphi_{k,I} + 2i\phi_k}.$$

С другой стороны, аналогично получаем, что асимптотическое поведение функции $q[n]$ при $T \rightarrow -\infty$ описывается формулой

$$q[n] \sim \frac{2\gamma_{k,I}[\gamma_{k,R} \operatorname{sh}(2\theta_{k,R} - 2\varphi_{k,R}) + i\gamma_{k,I} \operatorname{ch}(2\theta_{k,R} - 2\varphi_{k,R})]}{2\gamma_{k,I}^2 + |\gamma_k|^2 \operatorname{sh}^2(2\theta_{k,R} - 2\varphi_{k,R})} e^{-2i\theta_{k,I} + 2i\varphi_{k,I} - 2i\phi_k}.$$

В итоге мы имеем при $T \rightarrow \pm\infty$

$$q[n] \sim \sum_{k=1}^n \frac{2\gamma_{k,I}[\gamma_{k,R} \operatorname{sh}(2\theta_{k,R} \pm 2\varphi_{k,R}) + i\gamma_{k,I} \operatorname{ch}(2\theta_{k,R} \pm 2\varphi_{k,R})]}{2\gamma_{k,I}^2 + |\gamma_k|^2 \operatorname{sh}^2(2\theta_{k,R} \pm 2\varphi_{k,R})} e^{-2i\theta_{k,I} \mp 2i\varphi_{k,I} \pm 2i\phi_k}.$$

Доказательство завершено.

Аналогичным образом в фокусирующем случае $q[n]$ имеет следующее поведение на больших временах.

ТЕОРЕМА 3.2. *При $r = -q^*$ будем считать, что $\gamma_{k,I} < 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и*

$$0 < \gamma_{1,R} < \gamma_{2,R} < \dots < \gamma_{n,R},$$

тогда при $T \rightarrow \pm\infty$

$$q[n] \sim \sum_{k=1}^n \frac{2\gamma_{k,I}[\gamma_{k,R} \operatorname{ch}(2\theta_{k,R} \pm 2\varphi_{k,R}) + i\gamma_{k,I} \operatorname{sh}(2\theta_{k,R} \pm 2\varphi_{k,R})]}{|\gamma_k|^2 \operatorname{ch}^2(2\theta_{k,R} \pm 2\varphi_{k,R}) - 2\gamma_{k,I}^2} e^{-2i\theta_{k,I} \mp 2i\varphi_{k,I} \pm 2i\phi_k}.$$

Из теорем 3.1 и 3.2 следует упругое столкновение солитонов.

3.2. Бризеры и волны-убийцы. В данном пункте мы рассматриваем решения уравнения (12) при $r = -q^*$. Возьмем затравочное решение $q = -r^* = ce^{i\rho}$, в котором $\rho = aX + bT$ и $b = -a^2/\sqrt{1+c^2}$, тогда из уравнения (11) получаем

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \begin{pmatrix} f_{k1} \\ f_{k2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{ia\sqrt{1+c^2}+2i\lambda_k+i\mu_k}{2\lambda_k c} \exp\left[\frac{i\mu_k}{2\sqrt{1+c^2}}(X + \nu_k T)\right] + \exp\left[-\frac{i\mu_k}{2\sqrt{1+c^2}}(X + \nu_k T)\right] \\ \exp\left[\frac{i\mu_k}{2\sqrt{1+c^2}}(X + \nu_k T)\right] + \frac{ia\sqrt{1+c^2}+2i\lambda_k+i\mu_k}{2\lambda_k c} \exp\left[-\frac{i\mu_k}{2\sqrt{1+c^2}}(X + \nu_k T)\right] \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_k &= \sqrt{\sqrt{1+c^2}(a^2\sqrt{1+c^2} + 4\lambda_k^2\sqrt{1+c^2} + 4a\lambda_k)}, \\ \nu_k &= \frac{2\lambda_k + 2c^2\lambda_k - a\sqrt{1+c^2}}{1+c^2}. \end{aligned}$$

Для сохранения условия редукции $r = -q^*$ применяется метод суперпозиции.

Согласно формуле (21) при $n = 2$ можно получить бризер в качестве решения уравнения (12) с помощью собственных функций (31). Так как выражение весьма громоздко, мы приведем лишь его график (см. рис. 2). Хорошо известно, что в случае НУШ волну-убийцу можно получить из бризера путем взятия предела по длине

Рис. 2. Бризер, отвечающий решениям (18), с собственными функциями (31) при $\lambda_1 = \sqrt{5}/5 - i\sqrt{5}/10$, $c = 1/2$ и $a = 1$.

Рис. 3. Волна-убийца (32) с $c = 1/2$ и $a = 1$.

периода, стремящейся к бесконечности [59]. Мы применим этот метод для получения решения уравнения мВКИ в виде волны-убийцы. Для этого возьмем $a = 1$ и $c = 1/2$ и перейдем к пределу, получим

$$q[1] = \frac{F_1^2 - F_2^2}{F_3} \exp \left[\frac{\sqrt{5}i}{5} (\sqrt{5}X - 2T) \right], \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= -5X^2 + 8\sqrt{5}TX - 10iX + 12i\sqrt{5}T - 17T^2 + 25, \\ F_2 &= 10iT + 20\sqrt{5}, \\ F_3 &= -50X^4 + 160\sqrt{5}TX^3 - 980T^2X^2 - 700X^2 + 544\sqrt{5}T^3X + \\ &\quad + 1080\sqrt{5}TX - 578T^4 - 2140T^2 - 250. \end{aligned} \quad (33)$$

Это решение изображено на рис. 3. Знаменатель в решении (32) содержит четвертую степень по обеим переменным, что отличает его от решения НУШ, где степень равна двум.

Обратим внимание, что значения a и c в затравочном решении критические. В случае НУШ эти два параметра влияют лишь на высоту фона и скорость распада волны-убийцы, но не влияют на ее аналитичность. Однако в уравнении мВКИ неподходящий выбор a и c может привести к неаналитичности решения, например при $a = 1$ и $c = 1$.

3.3. МН в уравнении ВКИ–I. МН – это часто встречающееся явление, впервые изученное в работах [60], [61] в контексте волн на воде. МН характеризуется неустойчивостью непрерывных волн, выражающейся в экспоненциальном возрастании возмущения амплитуды определенной частоты. Подтверждено, что МН тесно связана с формированием солитонов и волн-убийц. Мы рассматриваем МН в уравнении мМКИ и покажем, что наличие волны-убийцы и солитонов как решений уравнения мВКИ не связано с МН.

Возмущенная непрерывная волна в уравнении мВКИ может быть записана как

$$q = [1 + \epsilon(X, T)]c e^{i\rho}, \quad r = -[1 + \epsilon^*(X, T)]c e^{-i\rho}, \quad (34)$$

где $\epsilon(X, T)$ – малое по фазе и амплитуде возмущение, удовлетворяющее линейному уравнению

$$-2c^2 k \frac{\partial}{\partial X}(\epsilon + \epsilon^*) + ic^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2}(\epsilon - \epsilon^*) - 4k \frac{\partial \epsilon}{\partial X} + 2i \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial X^2} - 2\sqrt{1 + c^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} = 0. \quad (35)$$

Положим

$$\epsilon = \alpha e^{i(\Theta T + \Omega X)} + \beta e^{-i(\Theta T + \Omega X)}, \quad (36)$$

где α и β – постоянные. Подстановка (36) в (35) дает два линейных уравнения

$$\begin{aligned} (-\Omega^2 c^2 - 2\Omega c^2 k - 2\sqrt{c^2 + 1} \Theta - 2\Omega^2 - 4\Omega k)\alpha + (\Omega^2 c^2 - 2\Omega c^2 k)\beta &= 0, \\ (-\Omega^2 c^2 - 2\Omega c^2 k)\alpha + (\Omega^2 c^2 - 2\Omega c^2 k - 2\sqrt{c^2 + 1} \Theta + 2\Omega^2 - 4\Omega k)\beta &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Для получения нетривиального решения (37) требуется, чтобы выполнялось равенство

$$\Theta = \pm \frac{-\sqrt{c^2 + 1}c^2 k - 2\sqrt{c^2 + 1}k + \sqrt{c^6 k^2 + \Omega^2 c^4 + c^4 k^2 + 2\Omega^2 c^2 + \Omega^2}}{c^2 + 1} \Omega. \quad (38)$$

Очевидно, что Θ – вещественная величина и ϵ не может расти экспоненциально. Следовательно, МН отсутствует. Таким образом, мы можем заключить, что МН в случае уравнения мВКИ не является ни необходимым, ни достаточным условием для солитонных решений и волн-убийц.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью преобразования годографа (8) мы получили из уравнения ВКИ–I его эквивалентную форму – уравнение мВКИ – и применили к нему ПД n -го порядка. По сравнению с решением уравнения ВКИ–I, полученным в работе [16] с использованием МОЗР, в нашем решении неизвестная функция $\epsilon_+(x)$ (см. уравнение (2.22)) является интегралом от сохраняющейся плотности в законе сохранения (6), т. е. введенной нами переменной $1/\zeta$. Далее мы вывели явное выражение (22) для $\zeta[n]$ и как следствие смогли получить явный вид солитонного решения n -го порядка. По сравнению с методом замен зависимых и независимых переменных [18] метод ПД дает

более прямой путь к солитонному решению n -го порядка, так как не содержит замен зависимой переменной; обратное преобразование годографа выписано в следствии 2.1.

Отметим приложения формулы (18). При вакуумном исходном решении уравнение мВКИ допускает аналитическое решение в виде светлого солитона в фокусирующем и рассеивающем случаях одновременно, что необычно для интегрируемых систем. При постоянном исходном решении найден бризер первого порядка и волна-убийца для уравнения мВКИ; так как МН в случае уравнения мВКИ не имеет места, она не является необходимым или достаточным условием существования волн-убийц.

Решения типа волн-убийц высших порядков для уравнения ВКИ (или уравнения мВКИ) можно построить с помощью детерминантного представления вырожденного ПД [59]. Опираясь на указанные выше специальные свойства уравнений ВКИ или ВКИ-I, можно заключить, что уравнение ВКИ-II, как и ВКИ-I, обладает этими свойствами, поскольку выводится из той же спектральной задачи (5). Мы планируем изучить этот вопрос в будущем.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражения для определителей в формулах (28) и (29)

Зададим следующие матрицы Γ_j^m , где $m = 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned}\Gamma_j^m &= \begin{pmatrix} \gamma_j^m e^{-\theta_j} & 0 \\ 0 & \gamma_j^{m,*} e^{-\theta_j^*} \end{pmatrix} \quad \text{при } j = 1, \dots, k-1, \\ \Gamma_j^m &= \begin{pmatrix} \gamma_j^m e^{-\theta_j} & \gamma_j^m e^{\theta_j} \\ \gamma_j^{m,*} e^{-\theta_j^*} & \gamma_j^{m,*} e^{-\theta_j^*} \end{pmatrix} \quad \text{при } j = k, \\ \Gamma_j^m &= \begin{pmatrix} 0 & \gamma_j^m e^{\theta_j} \\ \gamma_j^{m,*} e^{-\theta_j^*} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{при } j = k+1, \dots, n.\end{aligned}$$

Зададим также матрицы Y_j^l ($l = 1, 2, 3$) следующим образом: при $j = 1, \dots, k-1$

$$Y_j^1 = \begin{pmatrix} -e^{-\theta_j} & 0 \\ 0 & \gamma_j^* e^{-\theta_j^*} \end{pmatrix}, \quad Y_j^2 = \begin{pmatrix} \gamma_j e^{-\theta_j} & e^{-\theta_j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_j^3 = \begin{pmatrix} \gamma_j e^{-\theta_j} & 0 \\ 0 & \gamma_j^* e^{-\theta_j^*} \end{pmatrix};$$

при $j = k$

$$Y_j^1 = \begin{pmatrix} -e^{-\theta_j} & \gamma_j e^{\theta_j} \\ -e^{-\theta_j^*} & \gamma_j^* e^{-\theta_j^*} \end{pmatrix}, \quad Y_j^2 = \begin{pmatrix} \gamma_j e^{-\theta_j} & e^{-\theta_j} \\ \gamma_j^* e^{\theta_j^*} & e^{\theta_j^*} \end{pmatrix}, \quad Y_j^3 = \begin{pmatrix} \gamma_j e^{-\theta_j} & e^{\theta_j} \\ \gamma_j^* e^{\theta_j^*} & \gamma_j^* e^{\theta_j^*} e^{-\theta_j^*} \end{pmatrix};$$

при $j = k+1, \dots, n$

$$Y_j^1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_j e^{\theta_j} \\ -e^{-\theta_j^*} & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_j^* e^{\theta_j^*} & *e^{\theta_j^*} \end{pmatrix}, \quad Y_j^3 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_j e^{\theta_j} \\ \gamma_j^* e^{\theta_j^*} & 0 \end{pmatrix}.$$

В терминах этих матриц

$$\Delta_l = \begin{vmatrix} \Gamma_1^n & \Gamma_1^{n-1} & \dots & \Gamma_1^2 & Y_1^l \\ \Gamma_2^n & \Gamma_2^{n-1} & \dots & \Gamma_2^2 & Y_2^l \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_n^n & \dots & \Gamma_n^3 & \Gamma_n^2 & Y_n^l \end{vmatrix}, \quad l = 1, 2, 3.$$

Список литературы

- [1] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, "Method for solving the Korteweg–de Vries equation", *Phys. Rev. Lett.*, **19**:19 (1967), 1095–1097.
- [2] V. E. Zakharov, "Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid", *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **9**:2 (1968), 190–194.
- [3] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, "Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах", *ЖЭТФ*, **61**:1 (1971), 118–134.
- [4] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. Newell, H. Segur, "Method for solving the sine-Gordon equation", *Phys. Rev. Lett.*, **30**:25 (1973), 1262–1264.
- [5] M. Wadati, "The modified Korteweg–de Vries equation", *J. Phys. Soc. Japan*, **34**:5 (1973), 1289–1296.
- [6] A. Fokas, M. Ablowitz, "Inverse scattering transform for the Benjamin–Ono equation – a pivot to multidimensional problems", *Stud. Appl. Math.*, **68**:1 (1983), 1–10.
- [7] D. Kaup, Y. Matsuno, "The inverse scattering transform for the Benjamin–Ono equation", *Stud. Appl. Math.*, **101**:1 (1998), 73–98.
- [8] Y. Kodama, M. J. Ablowitz, J. Satsuma, "Direct and inverse scattering problems of the nonlinear intermediate long wave equation", *J. Math. Phys.*, **23**:4 (1982), 564–576.
- [9] A. S. Fokas, M. J. Ablowitz, "On the inverse scattering on the time-dependent Schrödinger equation and the associated Kadomtsev–Petviashvili equation", *Stud. Appl. Math.*, **69**:3 (1983), 211–228.
- [10] S. V. Manakov, "The inverse scattering transform for the time-dependent Schrödinger equation and Kadomtsev–Petviashvili equation", *Phys. D*, **3**:1–2 (1981), 420–427.
- [11] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, "Nonlinear-evolution equations of physical significance", *Phys. Rev. Lett.*, **31**:2 (1973), 125–127.
- [12] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, "The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems", *Stud. Appl. Math.*, **53**:4 (1974), 249–315.
- [13] M. Wadati, K. Konno, Y. H. Ichikawa, "New integrable nonlinear evolution equations", *J. Phys. Soc. Japan*, **47**:5 (1979), 1698–1700.
- [14] K. Konno, A. Jeffrey, "The loop soliton", *Advances in nonlinear waves*, v. 1, ed. L. Debnath, Pitman, London, 1984, 162–183.
- [15] M. Kruskal, "Nonlinear wave equations", *Dynamical Systems, Theory and Applications*, Lecture Notes in Physics, **38**, 1975, 310–354.
- [16] T. Shimizu, M. Wadati, "A new integrable nonlinear evolution equation", *Progr. Theoret. Phys.*, **63**:3 (1980), 808–820.
- [17] M. Wadati, K. Sogo, "Gauge transformations in soliton theory", *J. Phys. Soc. Japan*, **52**:2 (1983), 394–398.
- [18] Y. Ishimori, "A relationship between the Ablowitz–Kaup–Newell–Segur and Wadati–Konno–Ichikawa schemes of the inverse scattering method", *J. Phys. Soc. Japan*, **51**:9 (1982), 3036–3041.
- [19] D. H. Peregrine, "Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions", *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, **25**:1 (1983), 16–43.
- [20] P. Dubard, V. B. Matveev, "Multi-rogue waves solutions to the focusing NLS equation and the KP-I equation", *Nat. Hazards Earth Sys. Sci.*, **11**:3 (2011), 667–672.
- [21] P. Dubard, V. Matveev, "Multi-rogue waves solutions: from the NLS to the KP-I equation", *Nonlinearity*, **26**:12 (2013), R93–R125.
- [22] B. Guo, L. Ling, Q. P. Liu, "High-order solutions and generalized Darboux transformations of derivative nonlinear Schrödinger equations", *Stud. Appl. Math.*, **130**:4 (2013), 317–344.
- [23] L. Guo, Y. Zhang, S. Xu, Z. Wu, J. He, "The higher order rogue wave solutions of the Gerdjikov–Ivanov equation", *Phys. Scripta*, **89**:3 (2014), 035501.

- [24] S. Xu, J. He, L. Wang, “The Darboux transformation of the derivative nonlinear Schrödinger equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:30 (2011), 305203, 22 pp.
- [25] Y. Zhang, L. Guo, J. He, Z. Zhou, “Darboux transformation of the second-type derivative nonlinear Schrödinger equation”, *Lett. Math. Phys.*, **105**:6 (2015), 853–891.
- [26] Y. Zhang, L. Guo, S. Xu, Z. Wu, J. He, “The hierarchy of higher order solutions of the derivative nonlinear Schrödinger equation”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **19**:6 (2014), 1706–1722.
- [27] Y. Ohta, J. Yang, “Rogue waves in the Davey–Stewartson I equation”, *Phys. Rev. E*, **86**:3 (2012), 036604, 8 pp.
- [28] Y. Ohta, J. Yang, “Dynamics of rogue waves in the Davey–Stewartson II equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:10 (2013), 105202, 19 pp.
- [29] N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo, N. Devine, N. P. Hoffmann, “Rogue wave spectra of the Sasa–Satsuma equation”, *Phys. D*, **294** (2015), 37–42.
- [30] S. Chen, “Twisted rogue-wave pairs in the Sasa–Satsuma equation”, *Phys. Rev. E*, **88**:2 (2013), 023202, 5 pp.
- [31] F. Baronio, M. Conforti, A. Degasperis, S. Lombardo, M. Onorato, S. Wabnitz, “Vector rogue waves and baseband modulation instability in the defocusing regime”, *Phys. Rev. Lett.*, **113**:3 (2014), 034101, 5 pp.
- [32] F. Baronio, A. Degasperis, M. Conforti, S. Wabnitz, “Solutions of the vector nonlinear Schrödinger equations: evidence for deterministic rogue waves”, *Phys. Rev. Lett.*, **109**:4 (2012), 044102, 4 pp.
- [33] B.-L. Guo, L.-M. Ling, “Rogue wave, breathers and bright-dark-rogue solutions for the coupled Schrödinger equations”, *Chin. Phys. Lett.*, **28**:11 (2011), 110202, 4 pp.
- [34] G. Mu, Z. Qin, R. Grimshaw, “Dynamics of rogue waves on a multisoliton background in a vector nonlinear Schrödinger equation”, *SIAM J. Appl. Math.*, **75**:1 (2015), 1–20.
- [35] A. Ankiewicz, N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo, “Discrete rogue waves of the Ablowitz–Ladik and Hirota equations”, *Phys. Rev. E*, **82**:2 (2010), 026602, 7 pp.
- [36] A. Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, N. Akhmediev, “Rogue waves and rational solutions of the Hirota equation”, *Phys. Rev. E*, **81**:4 (2010), 046602, 8 pp.
- [37] A. Ankiewicz, Y. Wang, S. Wabnitz, N. Akhmediev, “Extended nonlinear Schrödinger equation with higher-order odd and even terms and its rogue wave solutions”, *Phys. Rev. E*, **89**:1 (2014), 012907, 9 pp.
- [38] D. Qiu, J. He, Y. Zhang, K. Porsezian, “The Darboux transformation of the Kundu–Eckhaus equation”, *Proc. Roy. Soc. A*, **471**:2180 (2015), 20150236.
- [39] D. Qiu, Y. Zhang, J. He, “The rogue wave solutions of a new $(2+1)$ -dimensional equation”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **30**:1–3 (2016), 307–315.
- [40] A. Chabchoub, N. Akhmediev, “Observation of rogue wave triplets in water waves”, *Phys. Lett. A*, **377**:38 (2013), 2590–2593.
- [41] A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, N. Akhmediev, “Rogue wave observation in a water wave tank”, *Phys. Rev. Lett.*, **106**:20 (2011), 204502, 4 pp.
- [42] A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, N. Akhmediev, “Observation of rogue wave holes in a water wave tank”, *J. Geophys. Res. Oceans*, **117**:C11 (2012), C00J02.
- [43] A. Chabchoub, N. Hoffmann, M. Onorato, N. Akhmediev, “Super rogue waves: observation of a higher-order breather in water waves”, *Phys. Rev. X*, **2**:1 (2012), 011015, 6 pp.
- [44] A. Chabchoub, N. Hoffmann, M. Onorato, A. Slunyaev, A. Sergeeva, E. Pelinovsky, N. Akhmediev, “Observation of a hierarchy of up to fifth-order rogue waves in a water tank”, *Phys. Rev. E*, **86**:5 (2012), 056601, 6 pp.
- [45] B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, F. Dias, G. Genty, N. Akhmediev, J. M. Dudley, “The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics”, *Nature Phys.*, **6**:10 (2010), 790–795.
- [46] D. Solli, C. Ropers, P. Koonath, B. Jalali, “Optical rogue waves”, *Nature*, **450**:7172 (2007), 1054–1057.

- [47] H. Bailung, S. Sharma, Y. Nakamura, “Observation of Peregrine solitons in a multicomponent plasma with negative ions”, *Phys. Rev. Lett.*, **107**:25 (2011), 255005, 4 pp.
- [48] M. Shats, H. Punzmann, H. Xia, “Capillary rogue waves”, *Phys. Rev. Lett.*, **104**:10 (2010), 104503, 4 pp.
- [49] C. Kharif, J. Touboul, “Under which conditions the Benjamin–Feir instability may spawn an extreme wave event: a fully nonlinear approach”, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **185** (2010), 159–168.
- [50] A. Slunyaev, “Freak wave events and the wave phase coherence”, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **185**:1 (2010), 67–80.
- [51] V. Zakharov, A. Gelash, “Nonlinear stage of modulation instability”, *Phys. Rev. Lett.*, **111**:5 (2013), 054101, 5 pp.
- [52] P. A. Clarkson, A. S. Fokas, M. J. Ablowitz, “Hodograph transformations of linearizable partial differential equations”, *SIAM J. Appl. Math.*, **49**:4 (1989), 1188–1209.
- [53] S. Kawamoto, “An exact transformation from the Harry Dym equation to the modified KdV equation”, *J. Phys. Soc. Japan*, **54**:5 (1985), 2055–2056.
- [54] D. Levi, O. Ragnisco, A. Sym, “The Bäcklund transformations for nonlinear evolution equations which exhibit exotic solitons”, *Phys. Lett. A*, **100**:1 (1984), 7–10.
- [55] C. Gu, H. Hu, Z. Zhou, *Darboux Transformations in Integrable Systems: Theory and Their Applications to Geometry*, Mathematical Physics Studies, **26**, Springer, Dordrecht, 2005.
- [56] J. He, L. Zhang, Y. Cheng, Y. Li, “Determinant representation of Darboux transformation for the AKNS system”, *Sci. China Ser. A*, **49**:12 (2006), 1867–1878.
- [57] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer, Berlin, 1991.
- [58] M. Wadati, Y. H. Ichikawa, T. Shimizu, “Cusp soliton of a new integrable nonlinear evolution equation”, *Prog. Theor. Phys.*, **64**:6 (1980), 1959–1967.
- [59] J. S. He, H. R. Zhang, L. H. Wang, K. Porsezian, A. S. Fokas, “Generating mechanism for higher-order rogue waves”, *Phys. Rev. E*, **87**:5 (2013), 052914, 10 pp.
- [60] T. B. Benjamin, J. E. Feir, “The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory”, *J. Fluid Mech.*, **27**:3 (1967), 417–430.
- [61] G. Whitham, “Non-linear dispersion of water waves”, *J. Fluid Mech.*, **27**:2 (1967), 399–412.

Поступила в редакцию 25.03.2016,
после доработки 21.04.2016