Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Минеев, Физика самосопряженных расширений: одномерная задача рассеяния для кулоновского потенциала, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 2, 310–328

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf92>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 10:26:51

ФИЗИКА САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЙ: ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

В работе рассматривается одномерная одноцентровая задача рассеяния на всей прямой с исходным потенциалом $\alpha|x|^{-1}$, которая сводится к поиску допустимых самосопряженных расширений. Использование в качестве необходимых условий законов сохранения в точке сингулярности наряду с учетом аналитической структуры фундаментальных решений позволяет получить точные выражения для волновых функций (т.е. для граничных условий), коэффициентов рассеяния и сингулярных поправок к потенциалу, а также соответствующий спектр связанных состояний. При этом оказывается, что точечные δ -образные поправки к потенциалу должны присутствовать в обязательном порядке при любом выборе допустимого самосопряженного расширения, причем вид этих поправок соответствует виду перенормировочных членов, получаемых в квантовой электродинамике. Таким образом, предложенный метод показывает однозначную связь граничных условий, коэффициентов рассеяния и δ -образных добавок к потенциалу и в целом демонстрирует возможности, которые возникают при анализе самосопряженных расширений соответствующего оператора Гамильтона. При этом в части, касающейся теории перенормировок, он может рассматриваться как обобщение метода перенормировок Боголюбова, Парасюка и Хеша.

Ключевые слова: кулоновское взаимодействие, точечное взаимодействие, задача рассеяния, самосопряженные расширения, перенормировки.

Исследование сингулярных взаимодействий в квантовой теории имеет уже достаточно длительную историю. Одной из первых работ, посвященных сингулярным потенциалам, является работа [1], а исследование уравнения Шредингера с δ -образными особенностями восходит к работе [2]. В последующие годы это направление исследования породило обширную литературу (см. [3]), причем серьезный математический анализ возникающих при этом проблем был выполнен сравнительно недавно [4]. Относительно недавно было проведено, в частности, и исследование трехмерного уравнения Шредингера, в котором присутствуют одновременно кулоновское и точечное взаимодействия, причем кулоновское взаимодействие рассматривается как возмущение трехмерной одноцентровой задачи [5] (основы подхода, развитого в работах [5], были заложены еще в работе [6]).

* Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского государственного университета, Москва, Россия. E-mail: mineev@theory.sinp.msu.ru

В абсолютно подавляющем большинстве работ (как и в работах [5]) рассматривался именно трехмерный случай и проводилось парциальное разложение волновых функций (или соответствующего пространства $L^2(\mathbb{R}^3)$) по отношению к угловому моменту. В свою очередь, приведенная радиальная волновая функция однозначно определялась граничным условием $\psi(0) = 0$, что соответствует существованию однопараметрического семейства самосопряженных операторов. При этом наиболее подробно изучалась угловая компонента волновой функции.

Следует отметить, что впервые определение гамильтониана как самосопряженного оператора в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ было дано в работе [7].

Одномерный случай исследован гораздо меньше трехмерного. В одномерном случае, в отличие от двух- и трехмерных, необходимо рассматривать оба линейно независимых решения, что при наличии сингулярности приводит к существованию четырехпараметрического семейства самосопряженных расширений в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. А это, в свою очередь, может приводить к возможности существования дополнительных точечных взаимодействий.

В настоящей работе рассматривается одномерная одноцентровая задача рассеяния на всей прямой с исходным потенциалом $\alpha|x|^{-1}$. Общее решение стационарного уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом известно, и задача сводится к поиску самосопряженных расширений или, в более узком толковании, к поиску граничных условий в точке сингулярности, удовлетворяющих общим принципам квантовой теории.

Отметим здесь, кстати, что различным аспектам кулоновского взаимодействия посвящено необозримое количество работ. Однако количество работ, посвященных математическим проблемам, связанным с наличием неинтегрируемой сингулярности в точке взаимодействия, не слишком велико. В данной статье мы ограничимся обзором только общих работ, относящихся к рассматриваемым проблемам. Более полный обзор позднейших публикаций, посвященных данной тематике, будет приведен в следующей статье. Добавим здесь только, что в подавляющем большинстве работ, посвященных одномерной кулоновской задаче, рассматривались лишь проблемы связанных состояний и их волновых функций. Чуть ли не единственным исключением (причем посвященным несколько другому – кулонообразному – сингулярному взаимодействию) является работа [8], вызвавшая возражения, высказанные в статье [9] (ответ на эти возражения см. в работе [10]).

Для решения указанной выше проблемы выбора граничных условий (т.е. для конкретизации значений параметров, определяющих соответствующее самосопряженное расширение) в качестве необходимых условий в точке сингулярности $x = 0$ будем использовать условия сохранения плотности вероятности и потока вероятности. Такой подход в сочетании с использованием метода вариации постоянных, аналитической структуры волновых функций и теории обобщенных функций позволяет полностью решить одномерную задачу рассеяния для кулоновского потенциала. При этом оказывается, что указанные условия *в обязательном порядке* приводят к необходимости включения в потенциал сингулярных δ -образных добавок.

Следует отметить, что, вообще говоря, допустима возможность существования целого ряда наборов указанных параметров, т.е. существует неоднозначность в выборе допустимых решений и гамильтонианов. Такая неоднозначность на языке теории опера-

торов соответствует тому, что рассматриваемый неограниченный симметрический (т.е. эрмитов) оператор не является самосопряженным на всей оси и допускает различные самосопряженные расширения (см. [11], [12]). На факт допустимости нескольких типов решений, вероятно, впервые было обращено внимание в работах [13], которые, в свою очередь, привели к анализу связи топологии и квантовой статистики и соответственно к исследованию зависимости от выбора граничных условий в точке сингулярности описания бозонов, фермионов и парачастиц (см., например, [14]).

Рассмотрим стационарное одномерное уравнение Шредингера

$$\psi''(x) + [k^2 - u(x)]\psi(x) = 0 \quad (1)$$

с потенциалом

$$u(x) = \varepsilon(x) \frac{\alpha}{x}, \quad x, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где $\varepsilon(x)$ – знаковая функция

$$\varepsilon(x) = \theta(x) - \theta(-x) \quad (3)$$

($\theta(x)$ – характеристическая (ступенчатая) функция Хевисайда). Будем строить общее решение уравнения (1), используя функции Уиттекера, соответствующие задаче рассеяния, т.е. выберем решения в виде фундаментальной пары (см. приложение)

$$\psi_+^{+,W}(k, x) = e^{\pi\alpha/(4k)} W_{-\frac{i\alpha}{2k}, \frac{1}{2}}(-2ikx), \quad (4a)$$

$$\psi_+^{-,V}(k, x) = -e^{\pi\alpha/(4k)} V_{-\frac{i\alpha}{2k}, \frac{1}{2}}(-2ikx) \quad (4б)$$

для положительной полуоси и

$$\psi_-^{+,W}(k, x) = e^{-\pi\alpha/(4k)} W_{\frac{i\alpha}{2k}, \frac{1}{2}}(-2ikx), \quad (5a)$$

$$\psi_-^{-,V}(k, x) = -e^{-\pi\alpha/(4k)} V_{\frac{i\alpha}{2k}, \frac{1}{2}}(-2ikx) \quad (5б)$$

для отрицательной полуоси. Функции (4), (5), как отмечено в приложении, характеризуются асимптотическим поведением:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_+^{+,W}(k, x) = e^{i(kx - \alpha \ln(2kx)/(2k))} \left[1 + O\left(\frac{1}{-2ikx}\right) \right], \quad (6a)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_+^{-,V}(k, x) = e^{-i(kx - \alpha \ln(2kx)/(2k))} \left[1 + O\left(\frac{1}{2ikx}\right) \right], \quad (6б)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_-^{+,W}(k, x) = e^{i(kx + \alpha \ln(2kx)/(2k))} \left[1 + O\left(\frac{1}{-2ikx}\right) \right], \quad (6в)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_-^{-,V}(k, x) = e^{-i(kx + \alpha \ln(2kx)/(2k))} \left[1 + O\left(\frac{1}{2ikx}\right) \right], \quad (6г)$$

а их вронскианы (см. формулу (П.5)) имеют вид

$$\mathcal{W}\{\psi_+^{+,W}(k, x), \psi_+^{-,V}(k, x)\} = -2ik, \quad (7)$$

$$\mathcal{W}\{\psi_-^{+,W}(k, x), \psi_-^{-,V}(k, x)\} = -2ik. \quad (8)$$

Выбор решений (4), (5) с асимптотическим поведением (6) фиксирует поведение решений уравнения (1) на бесконечности. Однако, как было отмечено выше, оператор Шредингера (1) с сингулярным потенциалом (2) (как и оператор импульса) является примером замкнутого симметрического, но не самосопряженного оператора (см. [11], [12]) и определяется четырехпараметрическим семейством самосопряженных расширений (см. [15], а также [4]), которое может быть сведено к трехпараметрическому семейству [16]. Конкретный выбор самосопряженного расширения, как известно [12], определяет соответствующую физику. В свою очередь, с точки зрения физики для определения полного набора состояний необходимо фиксировать поведение волновых функций (и оператора) вблизи сингулярных точек, что и определяет расширение оператора до самосопряженного.

Прежде чем фиксировать поведение решений в нуле, напомним стандартное определение коэффициентов отражения и прохождения. Обычно в простейших случаях, соответствующих “хорошим” (см., например, [17]) потенциалам (т.е. в случаях, когда оператор самосопряжен, или, иначе говоря, его индексы дефекта равны $(0, 0)$ (см. [7], а также [12], [4])), в качестве фундаментальной пары берут пару фундаментальных решений (или решений Йоста) $f_1(k, x)$ и $f_1(-k, x)$, характеризующихся асимптотическим поведением

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-ikx} f_1(k, x)] = 1, \quad (9a)$$

или $f_2(k, x)$ и $f_2(-k, x)$ с поведением

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^{ikx} f_2(k, x)] = 1. \quad (9b)$$

Так как любое третье решение есть комбинация двух линейно независимых решений, то можно написать, что, например,

$$f_2(k, x) = c_{11}(k) f_1(k, x) + c_{12}(k) f_1(-k, x), \quad (10a)$$

$$f_1(k, x) = c_{21}(k) f_2(-k, x) + c_{22}(k) f_2(k, x). \quad (10b)$$

Рассматривая теперь предельные значения соотношений (10), легко увидеть, что (10a) представляет собой решение уравнения (1), которое при $x \rightarrow -\infty$ стремится к e^{-ikx} , а при $x \rightarrow +\infty$ — к линейной комбинации $c_{11}e^{ikx} + c_{12}e^{-ikx}$. Таким образом, решение (10a) соответствует задаче рассеяния, в которой из $x = +\infty$ (R-случай) на рассеивающий потенциал падает волна с амплитудой c_{12} , частично отражающаяся с амплитудой c_{11} , а частично проходящая на $-\infty$ с амплитудой, равной 1. Это означает, что коэффициенты отражения и прохождения имеют вид

$$R_R(k) = \frac{c_{11}(k)}{c_{12}(k)}, \quad (11a)$$

$$T_R(k) = \frac{1}{c_{12}(k)}. \quad (11b)$$

Аналогично решение (10b) описывает задачу рассеяния с волной, падающей слева (L-случай), и коэффициентами

$$R_L(k) = \frac{c_{22}(k)}{c_{21}(k)}, \quad (12a)$$

$$T_L(k) = \frac{1}{c_{21}(k)}. \quad (12b)$$

В рассматриваемом в настоящей работе случае осуществление такой программы имеет ту трудность, что функции Уиттекера (П.6) и (П.7) (см. приложение) имеют при $z = 0$ регулярную особую точку, являющуюся логарифмической точкой ветвления, т.е. связь функций $f_1(k, x)$ и $f_1(-k, x)$ (и соответственно $f_2(k, x)$ и $f_2(-k, x)$) неоднозначна, причем мы заранее не знаем, на каком листе окажутся отраженная и проходящая волны. Однако тот факт, что существует аналитическое продолжение для произвольного решения уравнения (1) (см. приложение), причем обе функции $W_{p,m}(ze^{2i\pi s})$ и $V_{p,m}(ze^{2i\pi s})$ являются решениями уравнения (1), позволяет произвольное решение уравнения Шредингера (1) представить в виде их линейной комбинации. В нашем случае это означает, что при $x > 0$ справедливо выражение

$$\psi_+(k, x) = \alpha_2^+(k)\psi_+^{-,V}(k, x) + \beta_2^+(k)\psi_+^{-,V}(e^{2i\pi s}k, x). \quad (13)$$

Соответственно на отрицательной полуоси

$$\psi_-(k, x) = \alpha_2^-(k)\psi_-^{-,V}(k, e^{2i\pi r}x) + \beta_2^-(k)\psi_-^{-,V}(e^{2i\pi s}k, e^{2i\pi r}x). \quad (14)$$

При этом в выражениях (13), (14) необходимо учитывать, что при прохождении переменной x через точку сингулярности $x = 0$ могут, вообще говоря, изменяться коэффициенты при соответствующих волновых функциях (это явление связано с показателями регулярной особой точки; см. приложение, а также монографию [18]). Вводя обозначения

$$\alpha_2^-(k) = \alpha_2^+(k)Q_1 = \alpha_2(k)Q_1, \quad (15)$$

$$\beta_2^-(k) = \beta_2^+(k)Q_2 = \beta_2(k)Q_2, \quad (16)$$

можно записать решение уравнения (1) на всей прямой в виде

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \alpha_2(k)[\psi_+^{-,V}(k, x)\theta(x) + Q_1\psi_-^{-,V}(k, e^{2i\pi r}x)\theta(-x)] + \\ & + \beta_2(k)[\psi_+^{-,V}(e^{2i\pi s}k, x)\theta(x) + Q_2\psi_-^{-,V}(e^{2i\pi s}k, e^{2i\pi r}x)\theta(-x)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Формулы аналитического продолжения функций Уиттекера (П.30) могут быть представлены в виде

$$V_{p, \frac{1}{2}}(e^{2i\pi s}z) = b_s^V(p)V_{p, \frac{1}{2}}(z) + b_s^W(p)W_{p, \frac{1}{2}}(z), \quad (18)$$

где

$$b_s^V(p) = -se^{2i\pi p} + (s+1), \quad (19)$$

$$b_s^W(p) = -s \frac{2i\pi e^{i\pi p}}{\Gamma(p)\Gamma(1+p)}. \quad (20)$$

Это позволяет переписать выражение (17) в форме

$$\begin{aligned} \psi(x) = & [\alpha_+^-(k)\psi_+^{-,V}(k, x) + \alpha_+^+(k)\psi_+^{+,W}(k, x)]\theta(x) + \\ & + [\alpha_-^-(k)\psi_-^{-,V}(k, x) + \alpha_-^+(k)\psi_-^{+,W}(k, x)]\theta(-x), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\alpha_+^-(k) = \alpha_2(k) + \beta_2(k)b_s^V\left(-\frac{i\alpha}{2k}\right), \quad (22)$$

$$\alpha_+^+(k) = -\beta_2(k)b_s^W\left(-\frac{i\alpha}{2k}\right), \quad (23)$$

$$\alpha_-^-(k) = Q_1\alpha_2(k)b_r^V\left(\frac{i\alpha}{2k}\right) + Q_2\beta_2(k)b_{r+s}^V\left(\frac{i\alpha}{2k}\right), \quad (24)$$

$$\alpha_-^+(k) = -\left[Q_1\alpha_2(k)b_r^W\left(\frac{i\alpha}{2k}\right) + Q_2\beta_2(k)b_{r+s}^W\left(\frac{i\alpha}{2k}\right)\right]. \quad (25)$$

Отметим, что хотя выражение (17) соответствует формуле (106), оно носит совершенно общий характер, волновая функция $\psi(x)$ (21) представляет собой произвольное решение уравнения (1) с потенциалом (2). Соответствующее представление может быть получено при построении аналога формулы (10а).

Вернемся теперь к задаче рассеяния, кратко описанной соотношениями (9)–(12). Рассмотрим, например, случай, когда решение $\psi(x)$ (21) является фундаментальным решением с асимптотическим поведением, аналогичным поведению (96), т.е. положим $\psi(x) = f_2(k, x)$. Сравнение выражений (21) и (10а) показывает, что решение, описывающее рассеяние частицы, падающей справа (R-случай), должно иметь вид

$$\psi(x) = f_2(k, x) = \mathcal{A}_R(k)\psi_+^{-,V}(k, x)\theta(x) + \mathcal{B}_R(k)\psi_+^{+,W}(k, x)\theta(x) + \psi_-^{-,V}(k, x)\theta(-x), \quad (26)$$

а выражения для коэффициентов рассеяния (11) в данном случае приобретают форму

$$R_R(k) = \frac{\mathcal{B}_R(k)}{\mathcal{A}_R(k)}, \quad (27)$$

$$T_R(k) = \frac{1}{\mathcal{A}_R(k)}. \quad (28)$$

Воспользуемся теперь несколько модифицированным методом вариации постоянных, т.е. будем рассматривать коэффициенты $\alpha_2(k)$ и $\beta_2(k)$ в выражении (17) (и соответственно $\alpha_+^-(k)$, $\alpha_+^+(k)$, $\alpha_-^-(k)$, $\alpha_-^+(k)$ в формулах (22)–(25)) как величины, зависящие от x . Если представить выражения для $\alpha_2(k, x)$ и $\beta_2(k, x)$ в виде

$$\alpha_2(k, x) = A_1(k)\theta(x) + A_2(k)\theta(-x), \quad (29)$$

$$\beta_2(k, x) = B_1(k)\theta(x) + B_2(k)\theta(-x), \quad (30)$$

то из сравнения выражений (17)–(25) и (26) следует, что в рассматриваемом случае рассеяния частиц, падающих справа,

$$A_2(k) = \frac{1}{Q_1} \frac{r+s}{s}, \quad (31)$$

$$B_2(k) = -\frac{1}{Q_2} \frac{r}{s}, \quad (32)$$

т. е.

$$\mathcal{A}_R(k) = A_1(k) + B_1(k)b_s^V\left(-\frac{i\alpha}{2k}\right), \quad (33)$$

$$\mathcal{B}_R(k) = -B_1(k)b_s^W\left(-\frac{i\alpha}{2k}\right) \quad (34)$$

и

$$\alpha_2(k, x) = \left[\mathcal{A}_R(k) + \mathcal{B}_R(k) \frac{b_s^V(-i\alpha/(2k))}{b_s^W(-i\alpha/(2k))} \right] \theta(x) + \frac{1}{Q_1} \frac{r+s}{s} \theta(-x), \quad (35)$$

$$\beta_2(k, x) = -\mathcal{B}_R(k) \frac{1}{b_s^W(-i\alpha/(2k))} \theta(x) - \frac{1}{Q_2} \frac{r}{s} \theta(-x). \quad (36)$$

Выражения (35), (36) явным образом демонстрируют отличие в определении коэффициентов рассеяния в рассматриваемом здесь сингулярном и простейшем стандартном случаях (ср. формулы (10)–(12) и (17), (35), (36), (27), (28)).

Обычное в методе вариации постоянных условие отсутствия членов, связанных с дифференцированием коэффициентов при волновых функциях, приводит в нашем случае к требованию отсутствия в производной $f'_2(k, x)$ члена вида

$$[\mathcal{A}_R(k)\psi_+^{-,V}(k, x) + \mathcal{B}_R(k)\psi_+^{+,W}(k, x) - \psi_-^{-,V}(k, x)]\delta(x). \quad (37)$$

Разложение в ряд функций $\psi_+^{-,V}(k, x)$, $\psi_+^{+,W}(k, x)$ (и $\psi_-^{-,V}(k, x)$) (см. (П.22) и (П.24)) с учетом операторного соотношения $x\delta(x) = 0$ и выражений (33), (34) приводит к условию

$$e^{\pi\alpha/(4k)} \left[\left(A_1(k) + B_1(k)b_s^V\left(-\frac{i\alpha}{2k}\right) \right) V_{-\frac{i\alpha}{2k}, \frac{1}{2}}(0) + B_1(k)b_s^W\left(-\frac{i\alpha}{2k}\right) W_{-\frac{i\alpha}{2k}, \frac{1}{2}}(0) \right] - e^{-\pi\alpha/(4k)} V_{\frac{i\alpha}{2k}, \frac{1}{2}}(0) = 0. \quad (38)$$

При этом

$$f'_2(k, x) = \alpha_2(k, x) [\psi_+^{-,V'}(k, x)\theta(x) + Q_1\psi_-^{-,V'}(k, e^{2i\pi r}x)\theta(-x)] + \beta_2(k, x) [\psi_+^{-,V'}(e^{2i\pi s}k, x)\theta(x) + Q_2\psi_-^{-,V'}(e^{2i\pi s}k, e^{2i\pi r}x)\theta(-x)]. \quad (39)$$

Выражение для плотности тока, определенное стандартным образом,

$$j(k, x) = \frac{1}{2i} [\psi^*(k, x)\psi'(k, x) - \psi(k, x)\psi'^*(k, x)], \quad (40)$$

с учетом вронскианов (7), (8) и (П.31)–(П.33) приобретает вид

$$j(k) = k(-|\mathcal{A}_R(k)|^2 + |\mathcal{B}_R(k)|^2), \quad (41)$$

а закон сохранения тока (т. е. условие унитарности) –

$$|\mathcal{A}_R(k)|^2 - |\mathcal{B}_R(k)|^2 = 1, \quad (42)$$

или на языке коэффициентов рассеяния (27), (28)

$$|R_R(k)|^2 + |T_R(k)|^2 = 1. \quad (43)$$

Отметим, что условие (38) совпадает с условием четного продолжения функции $f_2(k, x)$ при прохождении через точку $x = 0$, т.е. обеспечивает сохранение вероятности в нуле.

Вычисляя вторую производную функции $\psi(k, x) = f_2(k, x)$ и подставляя полученное выражение в уравнение (1) с потенциалом (2), с учетом выражений (17), (21), (26) получаем

$$\begin{aligned} & [\mathcal{A}_R(k)\psi_+^{-,V'}(k, x) + \mathcal{B}_R(k)\psi_+^{+,W'}(k, x) - \psi_-^{-,V'}(k, x)]\delta(x) + \\ & + \mathcal{A}_R(k)\left\{\psi_+^{-,V''}(k, x) + \left[k^2 - \varepsilon(x)\frac{\alpha}{x}\right]\psi_+^{-,V}(k, x)\right\}\theta(x) + \\ & + \mathcal{B}_R(k)\left\{\psi_+^{+,W''}(k, x) + \left[k^2 - \varepsilon(x)\frac{\alpha}{x}\right]\psi_+^{+,W}(k, x)\right\}\theta(x) + \\ & + \left\{\psi_-^{-,V''}(k, x) + \left[k^2 - \varepsilon(x)\frac{\alpha}{x}\right]\psi_-^{-,V}(k, x)\right\}\theta(-x) = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Из этого выражения видно, что построение решения в виде (17), т.е. согласование решений (13) на $\mathbb{R}_+$ и (14) на $\mathbb{R}_-$ в нуле, приводит к появлению дополнительного первого члена в (44). Казалось бы, этот член можно рассматривать как сингулярную добавку к потенциалу, являющуюся проявлением граничных условий в нуле. Однако (и последующие расчеты это подтверждают) при этом нельзя быть уверенным в сохранении тока и выполнении условия (38). Поэтому введем в (44) взаимно компенсирующие друг друга члены вида $\alpha_2(k, x)\psi_i(k, x)\delta V_i(k, x)$ и $\beta_2(k, x)\psi_i(k, x)\delta V_i(k, x)$ (где $\psi_i(k, x) = \psi_+^{-,V}(k, x), \psi_+^{+,W}(k, x), \psi_-^{-,V}(k, x), \psi_-^{+,W}(k, x)$). Появление этих членов означает, что функции $\psi_i(k, x)$ должны удовлетворять уравнению Шредингера с учетом граничных условий, т.е. уравнения для них приобретают вид

$$\psi_i''(k, x) + \left[k^2 - \varepsilon(x)\frac{\alpha}{x} - \delta V_i(k, x)\right]\psi_i(k, x) = 0. \quad (45)$$

Некоторые математические детали возможности сосуществования кулоновского и точечного потенциалов (в частности, в смысле КЛМН-теоремы (теоремы Като–Лайонса–Мильграма–Нельсона)) см. в книгах [4], а также [12].

Будем искать сингулярные добавки $\delta V_i(k, x)$ в виде

$$\delta V_i(k, x) = v_i \frac{\psi_i'(k, x)}{\psi_i(k, x)} \delta(x), \quad (46)$$

где $v_i = v_+^{-,V}, v_-^{-,V}, v_+^{+,W}, v_-^{+,W}$ – параметры для соответствующих $\psi_i(k, x)$. Форма (46) для $\delta V_i(k, x)$ делает их, с одной стороны, аналогичными первому члену формулы (44), а с другой – представляет сингулярные добавки к потенциалу в виде логарифмической производной (см., например, [19]).

Объединяя соотношения (45) и учитывая выражения (26), (33)–(36), получаем, что в случае рассеяния частиц, падающих справа, наложение граничных условий при $x = 0$

приводит к тому, что соответствующая волновая функция $f_2(k, x)$ должна удовлетворять уравнению

$$f_2''(k, x) + \left[k^2 - \varepsilon(x) \frac{\alpha}{x} - \delta V_{f_2}(k, x) \right] f_2(k, x) = 0, \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} \delta V_{f_2}(k, x) = & \left[\frac{\mathcal{A}_R(k) v_+^{-,V} \psi_+^{-,V'}(k, x) + \mathcal{B}_R(k) v_+^{+,W} \psi_+^{+,W'}(k, x)}{\mathcal{A}_R(k) \psi_+^{-,V}(k, x) + \mathcal{B}_R(k) \psi_+^{+,W}(k, x)} \theta(x) + \right. \\ & \left. + v_-^{-,V} \frac{\psi_-^{-,V'}(k, x)}{\psi_-^{-,V}(k, x)} \theta(-x) \right] \delta(x) \end{aligned} \quad (48)$$

при условии отсутствия первого члена в соотношении (44). В отличие от случая условия (38), структура разложения функций $\psi_i'(k, x)$ (П.23) и (П.25) с учетом операторного соотношения $x\delta(x) = 0$ приводит к необходимости выполнения двух условий:

$$\begin{aligned} e^{\pi\alpha/(4k)} & \left[\left(A_1(k) + B_1(k) b_s^V \left(-\frac{i\alpha}{2k} \right) \right) (1 + v_+^{-,V}) V_{-\frac{i\alpha}{2k}, \frac{1}{2}}'(0) + \right. \\ & \left. + B_1(k) b_s^W \left(-\frac{i\alpha}{2k} \right) (1 + v_+^{+,W}) W_{-\frac{i\alpha}{2k}, \frac{1}{2}}'(0) \right] - \\ & - e^{-\pi\alpha/(4k)} (1 - v_-^{-,V}) V_{\frac{i\alpha}{2k}, \frac{1}{2}}'(0) = 0, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} e^{\pi\alpha/(4k)} & \left[\left(A_1(k) + B_1(k) b_s^V \left(-\frac{i\alpha}{2k} \right) \right) (1 + v_+^{-,V}) \frac{1}{\Gamma(-i\alpha/(2k))} + \right. \\ & \left. + B_1(k) b_s^W \left(-\frac{i\alpha}{2k} \right) (1 + v_+^{+,W}) \frac{1}{\Gamma(i\alpha/(2k))} \right] - \\ & - e^{-\pi\alpha/(4k)} (1 - v_-^{-,V}) \frac{1}{\Gamma(i\alpha/(2k))} = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Условие (50) обеспечивает отсутствие в разложении членов вида $\delta(x) \ln x$.

Проведенное построение нуждается в некоторых комментариях.

Прежде всего следует отметить, что из выражения (44) и рассуждений, приводящих к виду (48) сингулярной добавки к потенциалу, видно, что условие (38) (помимо того, что оно, как указывалось выше, обеспечивает непрерывность продолжения функции $f_2(k, x)$ при прохождении через нуль) одновременно является условием именно δ -образного вида сингулярной добавки (48). Невыполнение условия (38), в частности, может приводить к появлению в уравнении (1) членов, пропорциональных $\delta'(x)$.

В целом сам факт присутствия в уравнении (47) сингулярной добавки (48) требует пояснения. Суть дела состоит в том, что с точки зрения теории обобщенных функций появление такого члена совершенно естественно. И именно продолжение непрерывного линейного функционала (в нашем случае – гамильтониана), заданного на $\mathcal{J}(\mathbb{R} \setminus 0) = \{f \in \mathcal{J} \mid \text{supp } f \subset \mathbb{R} \setminus 0\}$, на все пространство $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ называется “перенормировкой” данного функционала [11]. При этом перенормировка функционала имеет носитель, равный $\{0\}$, т.е. представляет собой, вообще говоря, бесконечный ряд вида $\sum_{\alpha} c_{\alpha} D^{\alpha} \delta(x)$, где c_{α} – некоторые свободные константы, а D^{α} – производная в смысле обобщенных функций

(или слабая производная) (см. [11]). Как раз таким образом интерпретировались перенормировки в теории R -операции Боголюбова, Парасюка и Хепша [20] (см. также [21]). Однако в теории Боголюбова, Парасюка и Хепша рассматривались только перенормировки членов ряда фейнмановского разложения, причем для вычисления констант c_α (которые выступали в роли, например, перенормировок массы и заряда) использовалась регуляризация Паули–Вилларса (см., например, [21]). В нашем случае, как указывалось выше, в качестве соответствующего функционала рассматривается весь гамильтониан, а перенормировочные константы c_α определяются совершенно иным способом. Как видно из выражения (48), единственный присутствующий в рассматриваемом случае коэффициент c_0 является функцией параметров A_i , B_i и v_i . В свою очередь, эти параметры определяются уравнениями (38), (49) и (50), полученными в результате интегрирования выражений, в которые входят произведения обобщенных функций $\theta(\pm x)\delta(x)$. Вообще говоря, произведение нескольких обобщенных функций не является хорошо определенной интегрируемой функцией. Тем не менее для основных функций, непрерывных в точке сингулярности, произведение $\theta(\pm x)\delta(x)$ определено (например, в смысле несобственного предельного перехода, см. [21]); обычно принято полагать для таких основных функций $\theta(\pm x)\delta(x) = (1/2)\delta(x)$. В нашем случае основная функция не определена в точке сингулярности, и произведение обобщенных функций $\theta(\pm x)$ и $\delta(x)$ требует доопределения. Иначе говоря, возникает проблема определения, вообще говоря, произвольных коэффициентов $c_\pm$ в соотношениях $\int f(x)\theta(\pm x)\delta(x) dx = c_\pm f(0^\pm)$. Но уравнения (38), (49) и (50) как раз и являются уравнениями, определяющими коэффициенты $c_\pm$, в роли которых выступают комбинации параметров A_i , B_i и v_i . Таким образом, решив систему этих уравнений, мы и определим произведения $\theta(\pm x)\delta(x)$, что, в свою очередь, определит перенормировочные δ -образные добавки в выражении (48).

Решая систему уравнений (38), (49), (50) относительно, например, $A_1(k)$, $B_1(k)$ и $v_{-}^{-,V}$ и используя выражения (33), (34), получаем общее решение в виде

$$\mathcal{A}_R(k) = \frac{4\pi k(1 + v_+^{+,W})}{\alpha(2 + v_+^{-,V} + e^{\pi\alpha/k}v_+^{-,V} + v_+^{+,W} - e^{\pi\alpha/k}v_+^{+,W})\Gamma^2(i\alpha/(2k))}, \quad (51)$$

$$\mathcal{B}_R(k) = \frac{(1 + e^{\pi\alpha/k})(1 + v_+^{-,V})}{e^{\pi\alpha/(2k)}(2 + v_+^{-,V} + e^{\pi\alpha/k}v_+^{-,V} + v_+^{+,W} - e^{\pi\alpha/k}v_+^{+,W})}, \quad (52)$$

$$v_{-}^{-,V} = \frac{-4 - 3v_+^{-,V} - e^{\pi\alpha/k}v_+^{-,V} - 3v_+^{+,W} + e^{\pi\alpha/k}v_+^{+,W} - 2v_+^{-,V}v_+^{+,W}}{-2 - v_+^{-,V} - e^{\pi\alpha/k}v_+^{-,V} - v_+^{+,W} + e^{\pi\alpha/k}v_+^{+,W}}. \quad (53)$$

Сразу обращает на себя внимание отсутствие в формулах (51)–(53) коэффициентов аналитического продолжения $b_s^V(-i\alpha/(2k))$ и $b_s^W(-i\alpha/(2k))$ и, что наиболее существенно, из формулы (53) видно, что ни при каких значениях импульса k все три коэффициента v_i не могут одновременно обращаться в нуль. Это означает, что δ -образные добавки (т.е. перенормировочные контрчлены) *обязательно* должны присутствовать в уравнениях (45), (47).

Подстановка выражений (51), (52) в формулу (26) дает при $x \rightarrow 0^+$ предельное значение

$$f_2(k, 0^+) = -\frac{2ik}{\alpha\Gamma(i\alpha/(2k))}e^{-\pi\alpha/(4k)}, \quad (54)$$

совпадающее (что соответствует условию (38)) с пределом $f_2(k, 0^-)$. Таким образом, имеем

$$|f_2(k, 0)|^2 = \frac{2k}{\pi\alpha} e^{-\pi\alpha/(2k)} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi\alpha}{2k}\right) \quad (55)$$

при любом наборе допустимых значений v_i , т.е. функции $f_2(k, x)$, удовлетворяющие системе уравнений (38), (49), (50), действительно (как отмечалось выше) хорошо определены и непрерывны в точке сингулярности.

Решения (51)–(53) при наложении ряда дополнительных условий описывают выбор допустимых самосопряженных расширений. Рассмотрим некоторые из них.

1. Будем искать значения v_i , при которых оператор Шредингера действителен. Будем считать при этом, что параметры v_i тоже действительны.

Действительность сингулярной добавки $\delta V_i(k, x)$ (46), определенной на отрицательной полуоси, приводит к условию

$$v_-^{-,V} = 0. \quad (56)$$

Используя связь между $v_+^{+,W}$ и $v_+^{-,V}$, получающуюся из формулы (53), и накладывая условие действительности сингулярной добавки (48) на положительной полуоси, получаем, что при значениях параметров (56) и

$$v_+^{-,V} = \frac{-\pi + 2\arg(2k) + \pi \operatorname{cth}(\pi\alpha/(2k))}{-2\arg(2k) - \pi \operatorname{cth}(\pi\alpha/(2k))}, \quad (57)$$

$$v_+^{+,W} = \frac{2(\pi + \arg(2k) - e^{\pi\alpha/k} \arg(2k))}{(-1 + e^{\pi\alpha/k})(\pi + 2\arg(2k))} \quad (58)$$

сингулярная добавка (48) действительна и имеет вид

$$\delta V_{f_2}(k, x) = -2\alpha \left[2\gamma_E + \ln(2\sqrt{k^2} x) + \operatorname{Re} \psi\left(\frac{i\alpha}{2k}\right) \right] \theta(x) \delta(x) \quad (59)$$

(здесь γ_E – постоянная Эйлера, $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ – дигамма-функция; при вычислении формулы (59), как и ранее, учтено равенство $x\delta(x) = 0$).

Имеет смысл обратить внимание на некоторые свойства добавки (59). Сразу видно, что при выключении взаимодействия ($\alpha = 0$) добавка (59), естественно, также обращается в нуль. Кроме того, общий знак “минус” в выражении (59) показывает, что поправка к кулоновскому потенциалу $\delta V_{f_2}(k, x)$ ослабляет, “компенсирует” исходное взаимодействие $\alpha|x|^{-1}$. Используя представление для $\operatorname{Re} \psi(i\alpha/(2k))$ в виде ряда (П.35), можно переписать выражение (59) в форме

$$\delta V_{f_2}(k, x) = -2\alpha \left[\gamma_E + \ln(2\sqrt{k^2} x) + \frac{\alpha^2}{4k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{n^2 + \alpha^2/(4k^2)} \right] \theta(x) \delta(x), \quad (60)$$

$$-\infty < \frac{\alpha}{2k} < \infty,$$

аналогичной виду фейнмановского разложения.

Представляет интерес также асимптотическое разложение $\text{Re } \psi(i\alpha/(2k))$, соответствующее низкоэнергетическому случаю. Использование разложения (П.36) дает для $\delta V_{f_2}(k, x)$ выражение

$$\delta V_{f_2}(k, x) \sim -2\alpha \left[2\gamma_E + \ln(\alpha x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_{2n}}{2n(\alpha/(2k))^{2n}} \right] \theta(x) \delta(x), \quad \alpha \gg 2k \quad (61)$$

(здесь B_{2n} — числа Бернулли).

Для случая рассеяния $\arg(2k) = 0$, подставляя выражения (56)–(58) в (51) и (52), имеем

$$\mathcal{A}_R^{(s)}(k) = -\frac{2\pi k}{\alpha} \frac{1}{\Gamma^2(i\alpha/(2k))} \text{cth}\left(\frac{\pi\alpha}{2k}\right), \quad (62)$$

$$\mathcal{B}_R^{(s)}(k) = -\text{sh}\left(\frac{\pi\alpha}{2k}\right), \quad (63)$$

откуда

$$T_R(k) = -\frac{\alpha}{2\pi k} \Gamma^2\left(\frac{i\alpha}{2k}\right) \text{th}\left(\frac{\pi\alpha}{2k}\right), \quad (64)$$

$$R_R(k) = \frac{\alpha}{2\pi k} \Gamma^2\left(\frac{i\alpha}{2k}\right) \text{th}\left(\frac{\pi\alpha}{2k}\right) \text{sh}\left(\frac{\pi\alpha}{2k}\right), \quad (65)$$

т.е.

$$|T_R(k)|^2 = \text{sech}^2\left(\frac{\pi\alpha}{2k}\right), \quad (66)$$

$$|R_R(k)|^2 = \text{th}^2\left(\frac{\pi\alpha}{2k}\right), \quad (67)$$

что обеспечивает выполнение условия унитарности (43).

Связанным состояниям соответствуют значения импульса, расположенные на положительной мнимой оси, т.е. следует положить $\arg(2k) = \pi/2$. В этом случае

$$\mathcal{A}_R^{(b)}(k) = \frac{2\pi k}{\alpha} \frac{1}{\Gamma^2(i\alpha/(2k))} e^{\pi\alpha/(2k)} \text{cosech}\left(\frac{\pi\alpha}{2k}\right). \quad (68)$$

Положение связанных состояний определяется простыми полюсами коэффициента $T_R(k)$, т.е. простыми нулями величины (68). Так как $(\Gamma(z))^{-1}$ — целая функция, обладающая простыми нулями при $z = -n$, то легко видеть, что выражение (68) имеет простые нули при

$$\frac{i\alpha}{2k} = -n, \quad (69)$$

т.е. связанные состояния существуют при $\alpha < 0$ и имеют отрицательную энергию

$$E = -\frac{\alpha^2}{4n^2}. \quad (70)$$

Таким образом, рассматриваемый случай приводит к старому известному боровскому выражению для кулоновских уровней энергии. Но при этом потенциал не является

точно кулоновским – уровни энергии (70) имеют место при наличии дополнительного точечного взаимодействия (59). Более того, поправки (59), записанные в форме (60), (61), чрезвычайно похожи на поправки, возникающие в квантовой электродинамике (КЭД) при учете таких явлений, как перенормировки, поляризация вакуума, вакуумные флуктуации и т.д. (причем указанные поправки КЭД обычно принято интерпретировать как релятивистские (см., например, [22])). Существенно, что полученные выражения (и, в частности, формула (59)) являются *точным* результатом, полученным вне рамок каких-либо приближений.

2. Случай полной прозрачности. Условие (38) (являющееся, как отмечалось выше, условием четного продолжения волновой функции при прохождении через точку сингулярности) можно переписать в виде

$$R_R(k) - T_R(k)e^{-\pi\alpha/(2k)} = \frac{\Gamma(i\alpha/(2k))}{\Gamma(-i\alpha/(2k))}. \quad (71)$$

Если положить

$$R_R(k) = 0, \quad (72)$$

то

$$T_R(k) = e^{\pi\alpha/(2k)} \frac{\Gamma(i\alpha/(2k))}{\Gamma(-i\alpha/(2k))}, \quad (73)$$

т.е.

$$|T_R(k)|^2 = e^{\pi\alpha/k}, \quad (74)$$

и условие унитарности (43) при действительных значениях импульса k и $\alpha \neq 0$ не выполняется. Таким образом, ни при каких значениях параметров v_i одномерный кулоновский потенциал не является абсолютно прозрачным.

3. Случай абсолютной непроницаемости кулоновского потенциала соответствует выбору

$$T_R(k) = 0. \quad (75)$$

В этом случае

$$R_R(k) = \frac{\Gamma(i\alpha/(2k))}{\Gamma(-i\alpha/(2k))}, \quad (76)$$

$$|R_R(k)|^2 = 1. \quad (77)$$

Значения коэффициентов рассеяния (75) и (76) реализуются в трех случаях: при связи

$$v_+^{-,V} = -\frac{2 + (1 - e^{\pi\alpha/k})v_+^{+,W}}{1 + e^{\pi\alpha/k}}, \quad (78)$$

или при значениях

$$v_+^{+,W} = -1, \quad v_-^{-,V} \neq 1, \quad (79)$$

или

$$v_+^{-,V} = -1, \quad v_-^{-,V} \neq 1. \quad (80)$$

Величины двух (а фактически, с учетом соотношения (53), одного) параметров v_i остаются произвольными, но это оказывается несущественным: во всех трех случаях

(78)–(80) независимо от значения оставшихся параметров коэффициенты в сингулярной добавке $\delta V_{f_2}(k, x)$ (48) на положительной полуоси обращаются в бесконечность. Таким образом, случай полной непрозрачности кулоновского потенциала может в принципе рассматриваться, хотя это рассмотрение и носит достаточно формальный характер. Этот случай соответствует решению граничной задачи Дирихле (см., например, [4]), т.е. разделению оси на два независимых промежутка. При этом, очевидно, в качестве решения уравнения (47) разумно рассматривать перенормированную волновую функцию, определяемую условием

$$f_2(k, x) = \mathcal{A}_R(k) f_2^{(R)}(k, x), \quad (81)$$

т.е.

$$f_2^{(R)}(k, x) = \left[\psi_+^{-,V}(k, x) + \frac{\Gamma(i\alpha/(2k))}{\Gamma(-i\alpha/(2k))} \psi_+^{+,W}(k, x) \right] \theta(x), \quad (82)$$

причем функция $f_2^{(R)}(k, x)$ (82) удовлетворяет граничному условию Дирихле

$$f_2^{(R)}(k, 0) = 0. \quad (83)$$

Подводя итоги, можно констатировать, что предложенный в работе метод позволяет построить с учетом аналитической структуры фундаментальных решений трехпараметрическое семейство решений (самосопряженных расширений), полностью определяющих коэффициенты рассеяния, волновые функции и поправки к кулоновскому потенциалу, а также вычислить соответствующие уровни энергии. При этом все указанные величины оказываются однозначно связанными, взаимозависимыми. Кроме того, оказывается, что поправки к потенциалу должны присутствовать *обязательно* при любых допустимых значениях параметров. Обращает на себя внимание также замечательное сходство членов (59), (60) с контрчленами, полученными методом размерной регуляризации (причем без введения параметра, нарушающего в размерной регуляризации масштабную инвариантность (см., например, [23])).

Таким образом, можно говорить, что уже на уровне расчетов, связанных с нерелятивистским уравнением Шредингера, обязательно присутствуют перенормировки и члены, соответствующие радиационным поправкам КЭД, причем эти величины возникают как проявление внутренней структуры соответствующего динамического уравнения. Существенно, что эти величины можно вычислять, не прибегая к методам теории возмущений.

В целом предложенный метод указывает на возможность интерпретации широкого класса явлений квантовой теории как результата расширения соответствующего оператора Гамильтона до самосопряженного, а в части, касающейся теории перенормировок, может рассматриваться как обобщение метода перенормировок Боголюбова, Парасюка и Хеппа.

Заметим, наконец, что в данной работе получено решение, соответствующее четному продолжению волновых функций через точку сингулярности. Вопросы, связанные с проблемой вырождения (и в частности с возможностью нечетного продолжения волновой функции в нуле), с возможностью включения в гамильтониан δ' -членов, детальный анализ спектра связанных состояний (включая проблему отсутствия уровня с бесконечно большой отрицательной энергией) в данной работе не рассматривались. Эти проблемы будут проанализированы в следующей публикации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Используемый в работе математический аппарат в значительной степени разбросан по различным источникам. Отсутствует также и единый стандарт в описании уравнений с особыми точками. К тому же ряд формул, использованных в данной работе, не удалось найти в известных математических пособиях. Поэтому приведем краткую сводку использованных в работе математических соотношений. Обозначения в основном соответствуют принятым в книгах [18] и [24].

Уравнение типа (1), (2) получается из вырожденного гипергеометрического уравнения

$$z \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + (c - z) \frac{dw(z)}{dz} - aw(z) = 0, \quad a, c, z \in \mathbb{C}, \quad (\text{П.1})$$

при исключении члена с первой производной. При этом оно приобретает вид

$$\frac{d^2 W(z)}{dz^2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{p}{z} + \frac{m^2 - 1/4}{z^2} \right) W(z), \quad (\text{П.2})$$

где $p = c/2 - a$, $m = c/2 - 1/2$, $W(z) = e^{-z/2} z^{m+1/2} w(z)$, и называется уравнением Уиттекера.

Уравнение (П.1) имеет регулярную особую точку в начале координат с показателями 0 и $1 - c$ и иррегулярную особую точку ранга 1 на бесконечности.

Решение в виде ряда уравнения (П.1), соответствующее показателю 0 в точке $z = 0$, имеет вид

$$M(a, c, z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s}{(c)_s} \frac{z^s}{s!}, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots \quad (\text{П.3})$$

$((a)_s, (c)_s$ — символы Похгаммера). Этот ряд сходится при всех конечных z и определяет функцию Куммера. Функция $M(a, c, z)$ является в общем случае мероморфной функцией переменной c с полюсами в точках $0, -1, -2, \dots$ и целой по a . Второму показателю $1 - c$ при $z = 0$ соответствует решение

$$N(a, c, z) = z^{1-c} M(1 + a - c, 2 - c, z), \quad c \neq 2, 3, 4, \dots \quad (\text{П.4})$$

Определяя вронскиан двух функций стандартным образом:

$$\mathcal{W}\{w_1(z), w_2(z)\} = w_1(z)w_2'(z) - w_1'(z)w_2(z), \quad (\text{П.5})$$

легко получить, что определитель Вронского функций (П.3) и (П.4) имеет вид

$$\mathcal{W}\{M(a, c, z), N(a, c, z)\} = (1 - c)e^z z^{-c}. \quad (\text{П.6})$$

Парой линейно независимых при всех значениях параметров решений уравнения (П.1), соответствующих иррегулярной особой точке, являются функции $U(a, c, z)$ и $V(a, c, z)$, имеющие нормальные разложения вида

$$U(a, c, z) \sim z^{-a} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(a)_s (1 + a - c)_s}{s! z^s}, \quad z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{3\pi}{2} - \delta, \quad (\text{П.7})$$

$$V(a, c, z) \sim e^z (-z)^{a-c} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(c - a)_s (1 - a)_s}{s! z^s}, \quad z \rightarrow \infty, \quad |\arg(-z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad (\text{П.8})$$

где δ — произвольная малая положительная постоянная. $U(a, c, z)$ и $V(a, c, z)$ — многозначные функции z , целые по a и c . Функции $U(a, c, z)$ и $V(a, c, z)$ связаны между собой соотношением

$$V(a, c, z) = e^z U(c - a, c, -z). \quad (\text{П.9})$$

Определитель Вронского для функций $U(a, c, z)$ и $V(a, c, z)$ имеет вид

$$\mathcal{W}\{U(a, c, z), V(a, c, z)\} = e^{\varepsilon(\text{Im } z)i\pi(c-a)} e^z z^{-c}, \quad (\text{П.10})$$

где $\varepsilon(\text{Im } z)$ определяется формулой (3).

Стандартные решения уравнения (П.2) имеют вид

$$M_{p,m}(z) = e^{-z/2} z^{m+1/2} M\left(m - p + \frac{1}{2}, 2m + 1, z\right), \quad (\text{П.11})$$

$$W_{p,m}(z) = e^{-z/2} z^{m+1/2} U\left(m - p + \frac{1}{2}, 2m + 1, z\right) \quad (\text{П.12})$$

и называются функциями Уиттекера. Каждое из решений (П.11) и (П.12) является многозначной функцией z . Главные ветви соответствуют области $\arg z \in (-\pi, \pi]$. Асимптотическое поведение решений (П.11) и (П.12) определяется выражениями

$$M_{p,m}(z) \sim z^{m+1/2}, \quad z \rightarrow 0, \quad 2m \neq -1, -2, -3, \dots, \quad (\text{П.13})$$

$$W_{p,m}(z) \sim e^{-z/2} z^p, \quad z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{3\pi}{2} - \delta. \quad (\text{П.14})$$

Поскольку в работе исследуется задача рассеяния, предпочтительно рассматривать решения, обладающие асимптотическим поведением типа (П.14). Поэтому в качестве фундаментальной пары будем использовать решения, связанные с функциями

$$W_{p,m}(z) = e^{-z/2} z^{m+1/2} U\left(m - p + \frac{1}{2}, 2m + 1, z\right), \quad (\text{П.15})$$

$$V_{p,m}(z) = e^{-z/2} z^{m+1/2} V\left(m - p + \frac{1}{2}, 2m + 1, z\right). \quad (\text{П.16})$$

Из разложений (П.7) и (П.8) и формулы (П.9) видно, что при $z \rightarrow \infty$

$$V_{p,m}(z) \sim e^{z/2} z^{-p}. \quad (\text{П.17})$$

Из сравнения уравнения Уиттекера (П.2) и стационарного одномерного уравнения Шредингера (1) с потенциалом (2) видно, что при

$$p = -\frac{i\alpha}{2k}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad z = -2ikx \quad (\text{П.18})$$

фундаментальная пара решений уравнения (1), (2), соответствующая задаче рассеяния, при $x > 0$ имеет вид (4а), (4б). Как видно из выражения (2), переход на отрицательную полуось соответствует замене $\alpha \rightarrow -\alpha$ при $x < 0$, что приводит к паре решений (5а), (5б). Нормировочные множители, выписанные в выражениях (4а)–(5б), приводят к асимптотическим разложениям (6а)–(6г).

Подстановка (П.18), приводящая уравнение Уиттекера (П.2) к виду (1), (2), соответствует тому, что параметр c в функциях $U(a, c, z)$, $V(a, c, z)$ имеет целочисленное значение ($c = 2$). Это приводит к необходимости использовать предельные формы функций $M(a, c, z)$ и $N(a, c, z)$ (получаемые, например, с помощью метода Фробениуса) для описания поведения $U(a, c, z)$ и $V(a, c, z)$ около точки $z = 0$. Соответствующее логарифмическое разложение для функции $U(a, c, z)$ при $c = r$ ($r \in \mathbb{Z}$) имеет в общем случае вид

$$U(a, r, z) = \sum_{s=1}^{r-1} (-1)^{s-1} \lambda_{r,-s} \frac{(s-1)!}{z^s} + \lambda_{r,0} M(a, r, z) \ln z + \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{r,s} \mu_{r,s} \frac{z^s}{s!}, \quad (\text{П.19})$$

где

$$\lambda_{r,s} = \frac{(-1)^r \Gamma(a+s)}{\Gamma(a) \Gamma(1+a-r) (r+s-1)!}, \quad (\text{П.20})$$

$$\mu_{r,s} = \psi(a+s) - \psi(1+s) - \psi(r+s), \quad (\text{П.21})$$

$\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ – дигамма-функция. Подстановка значений (П.18) дает для фундаментальной пары решений (4а), (4б) и их производных с точностью до членов второго порядка по z разложения

$$\begin{aligned} \psi_+^{+,W}(k, x) = & \frac{2k}{\alpha \Gamma(i\alpha/(2k))} e^{\pi\alpha/(4k)} \left\{ -i + x \left[i\alpha - 2i\alpha\gamma_E + k - i\alpha \ln(-2ik) - \right. \right. \\ & \left. \left. - i\alpha\psi\left(1 + \frac{i\alpha}{2k}\right) - i\alpha \ln x \right] \right\} + O(x^2), \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

$$\begin{aligned} [\psi_+^{+,W}(k, x)]' = & \frac{2k}{\alpha \Gamma(i\alpha/(2k))} e^{\pi\alpha/(4k)} \left\{ -2i\alpha\gamma_E + k - i\alpha \ln(-2ik) - i\alpha\psi\left(1 + \frac{i\alpha}{2k}\right) - \right. \\ & - i\alpha \ln x + x \left[2i\alpha^2 - 2i\alpha^2\gamma_E + 3\alpha k + ik^2 - i\alpha^2 \ln(-2ik) + 2\alpha k\psi\left(1 + \frac{i\alpha}{2k}\right) - \right. \\ & \left. \left. - i\alpha^2\psi\left(2 + \frac{i\alpha}{2k}\right) - 2\alpha k\psi\left(2 + \frac{i\alpha}{2k}\right) - i\alpha^2 \ln x \right] \right\} + O(x^2), \end{aligned} \quad (\text{П.23})$$

$$\begin{aligned} \psi_+^{-,V}(k, x) = & -\frac{2k}{\alpha \Gamma(-i\alpha/(2k))} e^{\pi\alpha/(4k)} \left\{ -i + x \left[i\alpha - 2i\alpha\gamma_E - k - i\alpha \ln(2ik) - \right. \right. \\ & \left. \left. - i\alpha\psi\left(1 - \frac{i\alpha}{2k}\right) - i\alpha \ln x \right] \right\} + O(x^2), \end{aligned} \quad (\text{П.24})$$

$$\begin{aligned} [\psi_+^{-,V}(k, x)]' = & -\frac{2k}{\alpha \Gamma(-i\alpha/(2k))} e^{\pi\alpha/(4k)} \left\{ -2i\alpha\gamma_E - k - i\alpha \ln(2ik) - i\alpha\psi\left(1 - \frac{i\alpha}{2k}\right) - \right. \\ & - i\alpha \ln x + x \left[2i\alpha^2 - 2i\alpha^2\gamma_E - 3\alpha k + ik^2 - i\alpha^2 \ln(2ik) - 2\alpha k\psi\left(1 - \frac{i\alpha}{2k}\right) - \right. \\ & \left. \left. - i\alpha^2\psi\left(2 - \frac{i\alpha}{2k}\right) + 2\alpha k\psi\left(2 - \frac{i\alpha}{2k}\right) - i\alpha^2 \ln x \right] \right\} + O(x^2). \end{aligned} \quad (\text{П.25})$$

Как было указано выше, замена $\alpha \rightarrow -\alpha$ дает соответствующие разложения для фундаментальной пары (5а), (5б).

Ранее уже отмечалось, что $U(a, c, z)$ и $V(a, c, z)$ – многозначные функции z . Используя соотношения

$$W_{p,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(1/2 - m - p)} M_{p,m}(z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(1/2 + m - p)} M_{p,-m}(z), \quad (\text{П.26})$$

$$V_{p,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(1/2 - m + p)} M_{p,m}(z) + \frac{\Gamma(2m)e^{-2i\pi m}}{\Gamma(1/2 + m + p)} M_{p,-m}(z), \quad (\text{П.27})$$

а также учитывая, что

$$M_{-p,m}(ze^{i\pi}) = ie^{i\pi m} M_{p,m}(z), \quad (\text{П.28})$$

можно получить формулы для аналитических продолжений (при $s \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} (-1)^s W_{p,m}(ze^{2i\pi s}) = & -\frac{e^{2i\pi p} \sin(2\pi sm) + \sin[2\pi(s-1)m]}{\sin(2\pi m)} W_{p,m}(z) + \\ & + \frac{\sin(2\pi sm)}{\sin(2\pi m)} \frac{2\pi e^{i\pi(p+m)}}{\Gamma(1/2 + m - p)\Gamma(1/2 - m - p)} V_{p,m}(z), \end{aligned} \quad (\text{П.29})$$

$$\begin{aligned} (-1)^s V_{p,m}(ze^{2i\pi s}) = & -\frac{e^{2i\pi p} \sin(2\pi sm) + \sin[2\pi(s+1)m]}{\sin(2\pi m)} V_{p,m}(z) - \\ & - \frac{\sin(2\pi sm)}{\sin(2\pi m)} \frac{2\pi e^{i\pi(p-m)}}{\Gamma(1/2 - m + p)\Gamma(1/2 + m + p)} W_{p,m}(z). \end{aligned} \quad (\text{П.30})$$

В рассматриваемом случае следует, естественно, использовать предельные формы выражений для $U(a, c, z)$ и $V(a, c, z)$.

Кроме приведенных в основном тексте вронскианов (7), (8), в работе также используются соотношения

$$\mathcal{W}\{\psi_+^{-,V}(k, x)^*, \psi_+^{-,V}(k, x)\} = -2ik, \quad (\text{П.31})$$

$$\mathcal{W}\{\psi_+^{+,W}(k, x)^*, \psi_+^{+,W}(k, x)\} = 2ik, \quad (\text{П.32})$$

$$\mathcal{W}\{\psi_+^{-,V}(k, x)^*, \psi_+^{+,W}(k, x)\} = 0, \quad (\text{П.33})$$

причем

$$[\psi_+^{-,V}(k, x)]^* = \psi_+^{+,W}(k, x). \quad (\text{П.34})$$

При анализе выражения (59) в работе используется разложение в ряд функции $\text{Re } \psi(z)$. При $z = x + iy$

$$\begin{aligned} \text{Re } \psi(iy) = \text{Re } \psi(-iy) = \text{Re } \psi(1 + iy) = \text{Re } \psi(1 - iy) = \\ = -\gamma_E + y^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{n^2 + y^2}, \quad -\infty < y < \infty. \end{aligned} \quad (\text{П.35})$$

Асимптотические формулы для $\text{Re } \psi(iy)$ имеют вид

$$\text{Re } \psi(iy) \sim \ln y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_{2n}}{2ny^{2n}} = \ln y + \frac{1}{12y^2} + \frac{1}{120y^4} + \frac{1}{252y^6} + \dots, \quad y \rightarrow \infty \quad (\text{П.36})$$

(B_{2n} – числа Бернулли).

Благодарности. Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю признательность Б. А. Арбузову, В. И. Саврину и В. Е. Троицкому за исключительно ценную помощь и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *K. M. Case.* Phys. Rev. 1950. V. 80. P. 797.
- [2] *R. de L. Kronig, W. G. Penney.* Proc. Roy. Soc. A. 1931. V. 130. P. 499.
- [3] *W. M. Frank, D. J. Land, R. M. Spector.* Rev. Mod. Phys. 1971. V. 43. P. 36; *Ю. Н. Демков, В. Н. Островский.* Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: ЛГУ, 1975.
- [4] *C. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хезг-Крон, Х. Холден.* Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
- [5] *J. Zorbas.* J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 840; *S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, L. Streit.* Ann. Inst. H. Poincaré A. 1983. V. 38. P. 263.
- [6] *F. Rellich.* Math. Z. 1943/44. V. 49. P. 702.
- [7] *Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев.* ДАН СССР. 1961. Т. 137. С. 1011.
- [8] *M. Moshinsky.* J. Phys. A. 1993. V. 26. P. 2245.
- [9] *R. G. Newton.* J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 4717.
- [10] *M. Moshinsky.* J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 4719.
- [11] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.
- [12] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1978.
- [13] *E. H. Lieb, W. Liniger.* Phys. Rev. 1963. V. 130. P. 1605; *E. H. Lieb.* Phys. Rev. 1963. V. 130. P. 1616.
- [14] *C. Aneziris, A. P. Balachandran, D. Sen.* Int. J. Mod. Phys. A. 1991. V. 6. P. 4721; Erratum. 1992. V. 7. P. 1851; *A. P. Balachandran.* Int. J. Mod. Phys. B. 1991. V. 5. P. 2585.
- [15] *M. Carreau, E. Farhi, S. Gutmann.* Phys. Rev. D. 1990. V. 42. P. 1194; *M. Carreau.* J. Phys. A. 1993. V. 26. P. 427.
- [16] *F. A. B. Coutinho, Y. Nogami, J. F. Perez.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. L133.
- [17] *Ф. А. Березин, М. А. Шубин.* Уравнение Шредингера. М.: Изд-во МГУ, 1983.
- [18] *Ф. Олвер.* Асимптотики и специальные функции. М.: Наука, 1990.
- [19] *А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.
- [20] *N. N. Bogoliubov, O. S. Parasiuk.* Acta Math. 1957. V. 97. P. 227; *K. Hepp.* Commun. Math. Phys. 1966. V. 2. P. 301.
- [21] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.
- [22] *Дж. Д. Бьеркен, С. Д. Дрелл.* Релятивистская квантовая теория. Т. 1. М.: Наука, 1978.
- [23] *Ф. Индурайн.* Квантовая хромодинамика. М.: Мир, 1986; *R. M. Barnett, M. Dine, L. McLerran.* Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 594.
- [24] *М. Абрамовиц, И. М. Стиган (ред.).* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 18.IV.2003 г.,
после доработки 29.VIII.2003 г.