Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Лезнов, Двумерные интегрируемые ультра-Тода-отображения и цепочки,
ТМФ, 1998, том 117, номер 1, 107–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf920>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 09:59:27

ДВУМЕРНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УЛЬТРА-ТОДА-ОТОБРАЖЕНИЯ И ЦЕПОЧКИ

Вводится новый класс двумерных интегрируемых отображений и цепочек. Указан путь построения иерархий $(1+2)$ интегрируемых систем, инвариантных относительно такого рода дискретных преобразований. Получены явные выражения для решений солитонного типа в терминах матричных элементов фундаментальных представлений полупростых алгебр.

1. ВВЕДЕНИЕ: КЛЮЧЕВАЯ РОЛЬ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ В ТЕОРИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Систему уравнений бесконечной цепочки Тоды можно представить многими эквивалентными способами. Наиболее привычны следующие два:

$$(\ln v)_{xy} = \frac{\overleftarrow{v}}{v} - \frac{v}{\overrightarrow{v}}, \quad (\ln \theta)_{xy} = \overleftarrow{\theta} - 2\theta + \overrightarrow{\theta}, \quad (1)$$

где $v \equiv v_s$, $\overleftarrow{v} \equiv v_{s+1}$, $\overrightarrow{v} \equiv v_{s-1}$, s — натуральное число и x, y — независимые аргументы.

Уравнения (1) могут рассматриваться как определение некоторого отображения, посредством которого две начальные функции v , $\overrightarrow{v}(\theta, \overrightarrow{\theta})$ связаны с двумя конечными $\overleftarrow{v}$, $v(\overleftarrow{\theta}, \theta)$.

Мы воспользуемся первой из систем (1), переписав ее в эквивалентной форме:

$$\overleftarrow{u} = \frac{1}{v}, \quad \overleftarrow{v} = v(vu - (\ln v)_{xy}). \quad (2)$$

Замечательное свойство отображения (подстановки) (2) состоит в его интегрируемости (см., например, [1, 2]). Это означает, что соответствующая ему система уравнений симметрии (возникающая как результат вариационного дифференцирования (2))

$$\overleftarrow{U} = -\frac{1}{v^2}V, \quad \overleftarrow{V} = v^2U + (2uv - (\ln v)_{xy})V - v\left(\frac{V}{v}\right)_{xy} \quad (3)$$

*Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская область, Россия

обладает бесконечным набором нетривиальных решений (см., например, [3]). В системе (3) независимыми аргументами функций U, V являются u, v (из (2)) и их производные до определенного порядка по “пространственным” координатам x, y . $\overleftarrow{U}, \overleftarrow{V}$ – те же функции, но от преобразованных в соответствии с (2) аргументов.

Каждое решение (3) связано с интегрируемой в смысле Лиувилля (бесконечное число законов сохранения в инволюции) системой уравнений эволюционного типа

$$u_t = U, \quad v_t = V. \quad (4)$$

Более того, построенные таким образом системы инвариантны относительно преобразований подстановки (2).

Подавляющее большинство систем, проинтегрированных к настоящему времени различными методами [4] (в частности, методом обратной задачи рассеяния), напрямую связано с дискретной симметрией Тоды (2) (или с соответствующими преобразованиями Беклунда).

При определенных граничных условиях уравнения бесконечной цепочки Тоды могут обрываться и переходить в конечномерную интегрируемую систему, для которой различные классы решений хорошо изучены. Наиболее известны цепочка Тоды с закрепленными концами: $v_0^{-1} = v_N = 0$, и периодическая цепочка $v_0 = v_N$. В первом случае удастся найти общее решение [5], зависящее от необходимого количества произвольных функций, а во втором – только многосолитонный подкласс решений, зависящих от сколь угодно большого набора числовых параметров [6]. Общее решение в этом случае может быть записано в форме бесконечных абсолютно сходящихся рядов [7].

Общее решение для цепочки Тоды с закрепленными концами при $N = 2m$ связано напрямую с m -солитонными решениями эволюционных уравнений (4). А именно, решение u_m, v_m для такой цепочки точно совпадает (при некоторых дополнительных ограничениях на произвольные функции) с m -солитонными решениями эволюционных уравнений (4).

Таким образом, уравнения бесконечной цепочки Тоды играют двойственную роль в теории интегрируемых систем: с одной стороны, они определяют явный вид интегрируемой системы (как решение уравнения симметрии), а с другой, решения для “обрезанной” цепочки позволяют построить в явном виде некоторые классы точных решений эволюционных уравнений.

В работах [1, 2] была высказана гипотеза, что теория интегрируемых систем эквивалентна теории представлений группы интегрируемых отображений. Цепочка Тоды – простейший аргумент, подкрепляющий эту гипотезу.

В настоящей работе вводится новый класс интегрируемых отображений и цепочек. По сравнению с цепочкой Тоды они имеют большее число неизвестных функций в каждом узле решетки. Такие отображения интегрируемы, и им соответствуют иерархии интегрируемых систем, инвариантных по отношению к рассматриваемым ниже дискретным подстановкам. При фиксированных концах общие решения выражаются в терминах матричных элементов фундаментальных представлений полупростых алгебр.

2. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ЦЕПОЧКИ И ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ

В работе [8] (см. также монографию [9]) предложен прямой способ построения точно интегрируемых систем на основе произвольной градуированной (супер)алгебры. Ниже мы воспользуемся этим способом применительно к конкретному случаю полупростой алгебры серии A_n .

Для генераторов простых корней алгебры и соответствующих им элементов Картана используем обозначения $X_\alpha^\pm, h_\alpha$. Подпространства с градуировочными индексами $\pm s$ строятся из генераторов алгебры A_n , которые, в свою очередь, могут быть построены из генераторов s простых корней. Основное уравнение [8]

$$\left[\partial_x - \sum_{s=1}^{m_1} A^{-s}, \partial_y - (\rho h) - \sum_{s=1}^{m_2} A^{+s} \right] = 0 \quad (5)$$

может быть в данном случае значительно конкретизировано и позволяет записать уравнения цепочки в достаточно обзримом виде.

Генераторы $\pm s$ градуированных подпространств следующим образом связаны с генераторами простых корней:

$$Y_\alpha^{+s} = [X_\alpha^+, \dots [X_{\alpha+s-1}^+, X_{\alpha+s}^+] \dots], \quad Y_\alpha^{-s} = [\dots [X_{\alpha+s}^-, X_{\alpha+s-1}^-] \dots, X_\alpha^-]. \quad (6)$$

Как следствие определений (6) возникает следующая система коммутационных соотношений:

$$\begin{aligned} [Y_\alpha^{-i}, Y_\beta^{+j}] &= \delta_{\alpha+i, \beta+j} Y_\alpha^{-i+j} - \delta_{\alpha, \beta} Y_{\alpha+j}^{-i+j}, \quad i \leq j, \\ [Y_\alpha^{+i}, Y_\beta^{+j}] &= -\delta_{\alpha, \beta+j} Y_\alpha^{i+j} + \delta_{\alpha+i, \beta} Y_\beta^{i+j}, \\ [Y_\alpha^{-i}, Y_\beta^{+i}] &= \delta_{\alpha, \beta} \sum_{s=0}^{i-1} h_{\alpha+i}. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее,

$$A^{-s} = \sum_{\alpha} Y_\alpha^{-s} f_\alpha^s, \quad A^{+s} = \sum_{\beta} Y_\beta^{+s} \bar{f}_\beta^s.$$

Используя (7), перепишем основное уравнение (5) в виде

$$\begin{aligned} (f_\alpha^s)_y + \left(\sum_{k=0}^{s-1} \bar{\rho}_{\alpha+k} \right) f_\alpha^s - \sum_{k=1}^{m_1-s} (f_\alpha^{s+k} \bar{f}_{\alpha+s}^k - f_{\alpha-k}^{s+k} \bar{f}_{\alpha-k}^k) &= 0, \\ \bar{\rho}_\alpha = -\rho_{\alpha+1} + 2\rho_\alpha - \rho_{\alpha-1}, \quad (\rho_\alpha)_x + \sum_{s=1}^{\min(m_1, m_2)} \sum_{k=0}^{s-1} f_{\alpha-k}^s \bar{f}_{\alpha-k}^s &= 0, \\ (\bar{f}_\alpha^s)_x - \sum_{k=1}^{m_2-s} (\bar{f}_\alpha^{s+k} f_{\alpha+s}^k - \bar{f}_{\alpha-k}^{s+k} f_{\alpha-k}^k) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Назовем систему (8) ультра-Тода (УТ)-цепочкой, УТ(m_1, m_2), имея в виду, что обычная двумерная цепочка Тоды для серии A_n возникает при специальном выборе параметров $m_1 = m_2 = 1$. Конкретный вычислительный рецепт, изложенный в работе [8], позволяет точно проинтегрировать (8).

3. СИСТЕМА УТ(2, 2) И ЕЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

В случае $m_1 = m_2 = 2$ в каждом узле изначально имеются 5 неизвестных функций: $\rho_\alpha, f_\alpha^1, \bar{f}_\alpha^1, f_\alpha^2, \bar{f}_\alpha^2$. Однако, вводя калибровочно-инвариантные функции

$$q_\alpha = f_\alpha^1 \bar{f}_\alpha^1, \quad p_\alpha = \frac{f_\alpha^2}{f_\alpha^1 f_{\alpha+1}^1}, \quad \bar{p}_\alpha = \frac{\bar{f}_\alpha^2}{\bar{f}_\alpha^1 \bar{f}_{\alpha+1}^1},$$

мы сокращаем число неизвестных до трех (в каждом узле) и можем переписать (8) в виде

$$\begin{aligned} (\ln p)_y + (\overleftarrow{q}^2 \overleftarrow{p} - qp) + (\overleftarrow{q} p - \overrightarrow{q} \overrightarrow{p}) &= 0, \\ -(\ln q)_{xy} + (\overleftarrow{q} \bar{p} - \overrightarrow{q} \overrightarrow{\bar{p}})_y + (\overleftarrow{q} p - \overrightarrow{q} \overrightarrow{p})_x + \hat{K}(q + \overrightarrow{q} q \overrightarrow{p} \overrightarrow{\bar{p}} + q \overleftarrow{q} p \bar{p}) &= 0, \\ (\ln \bar{p})_x + (\overleftarrow{q}^2 \overleftarrow{\bar{p}} - q \bar{p}) + (\overleftarrow{q} \bar{p} - \overrightarrow{q} \overrightarrow{\bar{p}}) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\hat{K}\theta = \overleftarrow{\theta} - 2\theta + \overrightarrow{\theta}$.

В случае $p = \bar{p} = 0$ мы возвращаемся к обычной цепочке Тоды (УТ(1, 1)). Случай $\bar{p} = 0, p \neq 0$ (или аналогичный ему $p = 0, \bar{p} \neq 0$) соответствует цепочке УТ(1, 2) с уравнениями

$$\begin{aligned} -(\ln q)_{xy} + (\overleftarrow{q} p - \overrightarrow{q} \overrightarrow{p})_x + \overleftarrow{q} - 2q + \overrightarrow{q} &= 0, \\ (\ln p)_y + (\overleftarrow{q}^2 \overleftarrow{p} - qp) + (\overleftarrow{q} p - \overrightarrow{q} \overrightarrow{p}) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Последняя система представляет самостоятельный интерес, однако всегда может рассматриваться как редукция цепочки УТ(2, 2) при соответствующем выборе произвольных функций, определяющих ее общее решение.

Ниже мы приведем общее решение системы (9), переписав ее предварительно в более обозримом виде.

Воспользуемся следующими подстановками:

$$p = \exp(\overleftarrow{s} + s), \quad \bar{p} = \exp(\overleftarrow{t} + t), \quad \theta = q \exp(s + t).$$

В новых переменных (9) принимает форму

$$\begin{aligned} (\exp(-s))_y &= \theta \overleftarrow{\text{ex}}(-t) - \theta \overrightarrow{\text{ex}}(-t), \quad (\exp(-t))_x = \theta \overleftarrow{\text{ex}}(-s) - \theta \overrightarrow{\text{ex}}(-s), \\ -(\ln \theta)_{xy} + \hat{K}(\theta \exp(-(s+t)) + \theta \overleftarrow{\theta} + \theta \overrightarrow{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

или после окончательной идентификации $p^{(1)} = \exp(-s), \bar{p}^{(1)} = \exp(-t)$

$$\begin{aligned} (p^{(1)})_y &= \bar{p}^{(1)} \theta - \bar{p}^{(1)} \overrightarrow{\theta}, \quad (\bar{p}^{(1)})_x = p^{(1)} \theta - p^{(1)} \overleftarrow{\theta}, \\ -(\ln \theta)_{xy} + \hat{K}(p^{(1)} \bar{p}^{(1)} \theta + \theta \overleftarrow{\theta} + \theta \overrightarrow{\theta}) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Формы (9) и (11) описания цепочки УТ(2, 2) по сути абсолютно эквивалентны друг другу. Последняя более привлекательна чисто визуальной простотой.

Для того чтобы записать общее решение (9) или (11), нам потребуются некоторые результаты из [8], которые мы приведем в конспективном виде, применительно к данному случаю. В основе всей конструкции лежат два уравнения S -матричного типа:

$$\begin{aligned}(M_+)_y &= M_+ L_+ \equiv M_+ \left(\sum_1^r Y_\alpha^{+1} \bar{\phi}_\alpha^1 + \sum_1^{r-1} Y_\beta^{+2} \bar{\phi}_\beta^2 \right), \\ (M_-)_x &= M_- L_- \equiv M_- \left(\sum_1^r X_\alpha^- \phi_\alpha^1 + \sum_1^{r-1} Y_\beta^{-2} \phi_\beta^2 \right),\end{aligned}\tag{12}$$

где r – ранг полупростой алгебры, $Y^{\pm 2}$ определены в (6), $\phi^{1,2} = \phi^{1,2}(x)$, $\bar{\phi}^{1,2} = \bar{\phi}^{1,2}(y)$.

“Лагранжианы” $L^\pm$ уравнения (12) – соответственно верхняя и нижняя треугольные матрицы. По этой причине решения уравнений (12) могут быть записаны в явном виде в квадратурах.

Решение исходной задачи может быть представлено в терминах матричных элементов единственного элемента группы $SL(n+1, R)$ (с алгеброй A_n)

$$K = \exp(h\Phi) M_-^{-1} M_+ \exp(-h\bar{\Phi}) \equiv m_-^{-1} m_+.\tag{13}$$

Как вытекает из их определения, элементы группы $m_\pm$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}(m_+)_y &= m_+ \left(-(h\bar{\Phi})_y + \sum Y_j^{+1} (\bar{\nu}_{j+1} - \bar{\nu}_{j-1}) + \sum Y_j^{+2} \right) \equiv \\ &\equiv m_+ (\exp(h\bar{\Phi}) L_+ \exp(-h\bar{\Phi}) - (h\bar{\Phi})_y), \\ (m_-)_x &= m_- \left((h\Phi)_x + \sum Y_j^{-1} (\nu_{j+1} - \nu_{j-1}) + \sum Y_j^{-2} \right) \equiv \\ &\equiv m_- (\exp(h\Phi) L_- \exp(-h\Phi) - (h\Phi)_x).\end{aligned}\tag{14}$$

Последние равенства определяют все дополнительно введенные функции и соотношения между ними.

Через $\|i\rangle$, $(\langle i|)$ обозначим минимальный вектор i -го фундаментального представления алгебры A_n со следующими свойствами:

$$\begin{aligned}X_\alpha^- \|i\rangle &= 0, \quad h_s \|i\rangle = -\delta_{s,i}, \quad \langle i| X_\alpha^+ = 0, \quad \langle i| h_s = -\delta_{s,i}, \\ X_\alpha^+ \|i\rangle &= \delta_{\alpha,i} X_i^+ \|i\rangle, \quad \langle i| X_\alpha^- = \delta_{\alpha,i} \langle i| X_i^-.\end{aligned}\tag{15}$$

В дальнейшем мы используем следующие сокращения:

$$\begin{aligned}[i] &= \langle i| K \|i\rangle, & \theta_i &= \frac{[i+1][i-1]}{[i]^2}, \\ \alpha_{ij\dots l} &\equiv \frac{\langle i| X_i^- X_j^- \dots X_l^- K \|i\rangle}{\langle i| K \|i\rangle}, & \bar{\alpha}_{ij\dots l} &\equiv \frac{\langle i| K X_l^+ \dots X_j^+ X_i^+ \|i\rangle}{\langle i| K \|i\rangle}.\end{aligned}$$

В этих обозначениях общее решение системы (11) выглядит так:

$$\begin{aligned} p_i^{(1)} &= \bar{\nu}_{i+1} - \bar{\alpha}_{i+1} - \bar{\nu}_{i-1} + \bar{\alpha}_{i-1} \equiv (\theta_i)^{-1} (\alpha_i)_y, \\ \theta_i &= \frac{[i+1][i-1]}{[i]^2}, \\ \bar{p}_i^{(1)} &= \nu_{i+1} - \alpha_{i+1} - \nu_{i-1} + \alpha_{i-1} \equiv (\theta_i)^{-1} (\bar{\alpha}_i)_x. \end{aligned} \quad (16)$$

Общее решение (9) в терминах (16) можно представить в виде

$$q_i = p_i^{(1)} \bar{p}_i^{(1)} \theta_i, \quad \bar{p}_i = \frac{1}{\bar{p}_i^{(1)} \bar{p}_{i+1}^{(1)}}, \quad p_i = \frac{1}{p_i^{(1)} p_{i+1}^{(1)}}.$$

Проверка справедливости сделанных выше утверждений проводится с помощью базового тождества между матричными элементами последовательных фундаментальных представлений:

$$\text{Det}_2 \begin{pmatrix} \langle i \| K \| i \rangle & \langle i \| X_i^- K \| i \rangle \\ \langle i \| K X_i^+ \| i \rangle & \langle i \| X_i^- K X_i^+ \| i \rangle \end{pmatrix} = [i+1][i-1]. \quad (17)$$

На самом деле (17) есть не что иное, как знаменитое тождество Якоби, связывающее детерминанты $(i, i+1, i-1)$ -х порядков и записанное более экономным способом [5].

Доказательство (17) читатель может найти в [9] (см. также дополнение). Все другие необходимые соотношения являются прямыми следствиями (17).

Используя приведенные формулы, нетрудно проверить равенство

$$(\ln[i])_{xy} = \theta_i \theta_{i+1} + \theta_i \theta_{i-1} + \bar{p}_i^{(1)} p_i^{(1)} \theta_i,$$

а также ряд других соотношений подобного рода (в частности, тождеств (16)). С деталями вычислений читатель может познакомиться в пятом разделе.

Общее решение для цепочки УТ(1, 2) содержится среди приведенных выше. С помощью преобразований такого же типа, как переход от (9) к (11), уравнения (10) переписываются в эквивалентной форме:

$$\phi_y = \overleftarrow{\theta} - \overrightarrow{\theta}, \quad (\ln \theta)_{xy} = \overleftarrow{\phi} \theta - 2\phi\theta + \overrightarrow{\phi} \theta. \quad (18)$$

Общее решение (18) таково: ϕ совпадает с $p_i^{(1)}$ из (16), а в выражении для θ требуется небольшая модификация:

$$\theta_i = \nu_i \bar{\phi}_i^1 \frac{\langle i-1 \| K \| i-1 \rangle \langle i+1 \| K \| i+1 \rangle}{(\langle i \| K \| i \rangle)^2}.$$

В уравнении (12), определяющем $M_{\pm}$, необходимо положить $\bar{\phi}_i^2 = 0$.

Явный вид (16) показывает, что решение полностью определяется единственным элементом группы K , а потому естественно предположить, что задачи, связанные с УТ-цепочками, закодированы в его матричных элементах.

4. ПАРАМЕТРЫ ЭВОЛЮЦИИ – ГАМИЛЬТОНОВЫ ПОТОКИ

В этом разделе вводятся эволюционные параметры и предлагается метод построения систем уравнений, инвариантных относительно УТ-подстановок. Обсуждение начинается с обычной УТ(1, 1)-цепочки, для которой решение было найдено ранее другими методами [3].

4.1. Двумерная иерархия Деви–Стюартсона. В этом случае элемент группы m_+ удовлетворяет уравнению

$$m'_+ \equiv (m_+)_y = m_+ \left(-(h\bar{\Phi})' + \sum Y_j^{+1} \right) \quad (19)$$

и определяется набором произвольных функций $\bar{\Phi}_i(y)$. Допустим, что помимо y последние функции зависят также от переменной t_2 таким образом, чтобы уравнение

$$\dot{m}_+ \equiv (m_+)_{t_2} = m_+ \left(-(h\bar{\Phi})' + \sum Y_j^{+1} \mu_j - \sum Y_j^{+2} \right) \quad (20)$$

было совместно с (19). Разрешая тождества Маурера–Картана, приходим к системе соотношений

$$\mu_i = -\bar{\Phi}_{i+1} + \bar{\Phi}_{i-1}, \quad \mu'_i + (k\bar{\Phi})'_i - \mu_i(k\bar{\Phi})' = 0, \quad (21)$$

где, как обычно, $(kf)_i = -f_{i+1} + 2f_i - f_{i-1}$. Итак, (21) эквивалентна системе уравнений

$$\dot{\bar{\Phi}}_i - \dot{\bar{\Phi}}_{i-1} + \bar{\Phi}''_i + \bar{\Phi}''_{i-1} + (\bar{\Phi}'_i - \bar{\Phi}'_{i-1})^2 = 0 \quad (22)$$

(во всех случаях из условия $b_i = b_{i+1}$ мы заключали, что $b_i = 0$).

Решение для цепочки (22) можно представить в терминах N линейно независимых решений одномерного уравнения Шредингера (N – число узлов цепочки (22))

$$\dot{\Psi} = \Psi'' + V(t_2, y)\Psi,$$

где V – произвольная функция пространственной y и временной t_2 координат [3].

Цепочка (22) индуцирует систему Деви–Стюартсона [10]. Чтобы это показать, вычислим пространственную и временную производные матричного элемента $[i]$ (мы используем обозначения (15) и последующие). Как следствие (19), (20) и (22) имеем

$$\begin{aligned} (\ln[i])' &= \dot{\bar{\Phi}}_i + \mu_i \bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_{i,i+1} + \bar{\alpha}_{i,i-1}, \\ (\ln[i])' &= (\bar{\Phi}_i)' + \bar{\alpha}_i, \\ \frac{[i]''}{[i]} &= (\bar{\Phi}_i)'' + (\bar{\Phi}_i')^2 + (\bar{\Phi}_{i+1} + \bar{\Phi}_{i-1})' \bar{\alpha}_i + \bar{\alpha}_{i,i+1} + \bar{\alpha}_{i,i-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Исключая $\dot{\bar{\Phi}}_i$, $\bar{\Phi}'_i$, $\bar{\Phi}''_i$ из (22) с помощью (23), приходим к следующему ключевому равенству:

$$\left(\ln \frac{[i]}{[i-1]} \right)' + \left(\ln([i][i-1]) \right)'' + \left(\left(\ln \frac{[i]}{[i-1]} \right)' \right)^2 = 2(\bar{\alpha}_{i-1,i} + \bar{\alpha}_{i,i-1} - \bar{\alpha}_{i-1} \bar{\alpha}_i), \quad (24)$$

примечательному тем, что его правая часть тождественно равна нулю. Доказательство этого факта приведено в дополнении.

Вводя в рассмотрение функции

$$v = \frac{[i]}{[i-1]}, \quad u = \frac{[i-2]}{[i-1]},$$

имея в виду тождества (эквивалентные уравнениям цепочки Тоды)

$$(\ln[i])_{xy} = \frac{[i+1][i-1]}{[i]^2}$$

и справедливость (24) для произвольных i , мы заключаем, что функции u, v удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$-\dot{u} + u_{yy} + 2u \int dx (uv)_y = 0, \quad \dot{v} + v_{yy} + 2v \int dx (uv)_y = 0. \quad (25)$$

Это в точности система Деви–Стюартсона [10], в одномерном случае ($\partial_x = \partial_y$) переходящая в нелинейное одномерное уравнение Шредингера.

В общем случае дополнительное уравнение (20), определяющее зависимость произвольных функций от параметра эволюции, следует заменить условием разложимости алгеброзначной функции $m_+^{-1}\dot{m}_+$ по генераторам алгебры с градуировочными индексами, не превышающими заданное натуральное число d_1 . Возникающая система уравнений определяет зависимость функций $\bar{\Phi}_i$ от параметра эволюции $\bar{t}_r$ и пространственной координаты y . Как следствие возникает d_1 -е уравнение иерархии Деви–Стюартсона. Другими методами эта задача была решена в явном виде в [3, 11].

В одномерном случае описанная выше конструкция эквивалентна многовременному формализму и технике гамильтоновых потоков [4].

Очевидно, что все проделанное выше можно повторить по отношению к пространственной координате x в паре с элементом m_- .

В итоге мы получаем наборы правых ($\bar{t}_d$) и левых (t_d) параметров эволюции, соответствующие системы уравнений, инвариантные относительно подстановки УТ(1, 1), и набор их солитоноподобных решений.

4.2. Случай УТ(2, 2). Воспользуемся техникой предыдущего раздела для построения интегрируемой системы уравнений, инвариантной относительно подстановки (11), т.е. относительно преобразований УТ(2, 2). Соответствующие вычисления хотя и не сложны по своей сути, имеют весьма громоздкий вид. Поэтому мы опускаем, как правило, их подробное описание, приводя лишь окончательные результаты. Все необходимые для их проверки формулы содержатся в пятом разделе и в дополнении. Возможно, использование более удачных обозначений могло бы значительно упростить процедуру вычислений.

В случае УТ(2, 2) элемент m_+ удовлетворяет уравнению (см. раздел 3)

$$\begin{aligned} (m_+)' &= m_+ \left(-(h\bar{\Phi})' + \sum Y_j^{+1} \bar{\phi}_j + \sum Y_j^{+2} \right) \equiv \\ &\equiv m_+ (\exp(h\bar{\Phi}) L_+ \exp(-h\bar{\Phi}) - (h\bar{\Phi})'), \quad f' \equiv f_y, \quad \bar{\phi}_j = (\bar{\nu}_{j+1} - \bar{\nu}_{j-1}). \end{aligned}$$

Соответствующий оператор t_2 дифференцирования имеет вид

$$\dot{m}_+ = m_+ \left(-(h\dot{\bar{\Phi}}) + \sum Y_j^{+1} \mu_j^{(1)} + \sum Y_j^{+2} \mu_j^{(2)} + \sum Y_j^{+3} \mu_j^{(3)} - \sum Y_j^{+4} \right). \quad (26)$$

Условие самосогласованности (тождества Маурера–Картана) позволяет выразить все функции $\mu_i^{(s)}$ из (26) в терминах $\bar{\Phi}_i, \bar{\nu}_i$ и получить систему (цепочку) уравнений, которой последние как функции аргументов y, t_2 удовлетворяют.

Используя коммутационные соотношения (7), приходим к искомой функциональной зависимости:

$$\begin{aligned} \mu_i^{(3)} &= \bar{\phi}_{i+2} + \bar{\phi}_i = \bar{\nu}_{i+3} - \bar{\nu}_{i-1}, \quad \mu_i^{(2)} = \bar{\Phi}'_{i+1} - \bar{\Phi}'_{i+2} - \bar{\Phi}'_i + \bar{\Phi}'_{i-1} + \bar{\phi}_i \bar{\phi}_{i+1}, \\ \mu_i^{(1)} &= -(\bar{\nu}_{i+1} - \bar{\nu}_{i-1})(\bar{\Phi}'_{i+1} - \bar{\Phi}'_{i-1}) - (\bar{\nu}'_{i+1} + \bar{\nu}'_{i-1}), \end{aligned}$$

и системе зацепляющихся уравнений, которым функции $\bar{\Phi}, \bar{\nu}$ удовлетворяют (ср. с (22)):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Phi}}_{i+1} - \dot{\bar{\Phi}}_{i-1} + \bar{\Phi}''_{i+1} + \bar{\Phi}''_{i-1} + (\bar{\Phi}'_i - \bar{\Phi}'_{i+1})^2 + (\bar{\Phi}'_i - \bar{\Phi}'_{i-1})^2 &= 2\bar{\nu}'_i(\bar{\nu}_{i+1} - \bar{\nu}_{i-1}), \\ (\bar{\nu}_{i+1} - \bar{\nu}_{i-1})' + (\bar{\nu}_{i+1} + \bar{\nu}_{i-1})'' - 2\bar{\nu}'_{i+1}(\bar{\Phi}'_i - \bar{\Phi}'_{i-1}) - 2\bar{\nu}'_{i-1}(\bar{\Phi}'_i - \bar{\Phi}'_{i+1}) + \\ + (\bar{\nu}_{i+1} - \bar{\nu}_{i-1})[(\dot{\bar{\Phi}}_{i+1} - 2\dot{\bar{\Phi}}_i) + \dot{\bar{\Phi}}_{i-1} + \bar{\Phi}''_{i+1} - \bar{\Phi}''_{i-1} + \\ + (\bar{\Phi}'_{i+1})^2 - (\bar{\Phi}'_{i-1})^2 - 2(\bar{\Phi}'_{i+1} - \bar{\Phi}'_{i-1})\bar{\Phi}'_i] &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Ниже мы несколько отступим от принятых ранее обозначений и будем рассматривать УТ(2, 2) в переменных

$$p_i = \alpha_i - \nu_i, \quad \bar{p}_i = \bar{\alpha}_i - \bar{\nu}_i.$$

Тогда, как это вытекает из (16), УТ(2, 2)-подстановка принимает вид

$$\begin{aligned} (p_i)_y &= \theta_i(\bar{p}_{i-1} - \bar{p}_{i+1}), \quad (\bar{p}_i)_x = \theta_i(p_{i-1} - p_{i+1}), \\ (\ln \theta)_{xy} &= \widehat{K}(p_y \bar{p}_x \theta + \theta \overleftarrow{\theta} + \theta \overrightarrow{\theta}). \end{aligned} \quad (28)$$

Вводим функции

$$v_i = \frac{[i+1]}{[i]}, \quad u_i = \frac{[i-1]}{[i]}.$$

Очевидно, $\theta_i \equiv u_i v_i$, $u_{i+1} = v_i^{-1}$.

Следующие соотношения – прямое следствие введенных выше определений (что может быть проверено прямым расчетом с помощью соответствующих формул пятого раздела и дополнения):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{v}_i}{v_i} + \frac{v_i''}{v_i} + 2(\bar{\alpha}_{i,i-1} - \bar{\nu}_{i-1}\bar{\alpha}_i)' - 2\bar{p}_i'\bar{p}_{i+1} &= V_i(y, t_2), \\ -\frac{\dot{u}_i}{u_i} + \frac{u_i''}{u_i} - 2(\bar{\alpha}_{i,i+1} - \bar{\nu}_{i+1}\bar{\alpha}_i)' + 2\bar{p}_i'\bar{p}_{i-1} &= U_i(y, t_2), \\ \dot{p}_i &= -p_i'' - 2(\ln v_{i-1})' + 2\theta_i\bar{p}_{i-1}', \\ V_i &= \dot{\bar{\Phi}}_{i+1} - \dot{\bar{\Phi}}_i + \bar{\Phi}_{i+1}'' - \bar{\Phi}_i'' + (\bar{\Phi}_i' - \bar{\Phi}_{i+1}')^2 - 2\bar{\nu}_i'\bar{\nu}_{i+1}, \\ U_i &= -\dot{\bar{\Phi}}_{i-1} + \dot{\bar{\Phi}}_i + \bar{\Phi}_{i-1}'' - \bar{\Phi}_i'' + (\bar{\Phi}_i' - \bar{\Phi}_{i-1}')^2 + 2\bar{\nu}_i'\bar{\nu}_{i-1}. \end{aligned}$$

Для того чтобы иметь замкнутую систему, необходимо прежде всего выразить функции $\bar{\alpha}_{i\pm 1}$, $\bar{\alpha}_{i,i\pm 1}$ через функции, участвующие в вышеприведенных равенствах. Это достигается с помощью тождества

$$(\bar{\alpha}_{i,i\pm 1} - \bar{\nu}_{i\pm 1}\bar{\alpha}_i)_x = \mp \theta_i \theta_{i\pm 1} + \theta_i \bar{p}_{i\pm 1}(\bar{p}_i)_x,$$

которое нетрудно проверить. Теперь вышеприведенную систему, учитывая уравнения подстановки (28), можно переписать в виде системы из восьми уравнений для восьми неизвестных функций v_{i+1} , v_i , u_i , u_{i-1} , p_i , p_{i+1} , $\bar{p}_i$, $\bar{p}_{i-1}$:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i+1} + v_{i+1}'' + 2v_i\bar{p}_{i+1}'p_{i+1}' + 2v_{i+1}\bar{p}_{i+1}\bar{p}_i' - 2v_{i+1} \int dx [-u_i v_{i+1} + \bar{p}_{i+1}(\bar{p}_i)_x]' &= 0, \\ \dot{v}_i + v_i'' - 2v_i\bar{p}_{i+1}\bar{p}_i' + 2v_i \int dx [v_i u_{i-1} + \bar{p}_{i-1}(\bar{p}_i)_x]' &= 0, \\ -\dot{u}_i + u_i'' + 2u_i\bar{p}_{i-1}\bar{p}_i' - 2u_i \int dx [-u_i v_{i+1} + \bar{p}_{i+1}(\bar{p}_i)_x]' &= 0, \\ -\dot{u}_{i-1} + u_{i-1}'' + 2u_i\bar{p}_{i-1}'p_{i-1}' - 2u_{i-1}\bar{p}_{i-1}\bar{p}_i' + 2u_{i-1} \int dx [v_i u_{i-1} + \bar{p}_{i-1}(\bar{p}_i)_x]' &= 0, \\ \dot{p}_i + p_i'' - 2(\ln u_i)'p_i' - 2u_i v_i \bar{p}_{i-1}' &= 0, \\ \dot{p}_{i-1} + p_{i-1}'' - 2(\ln u_i)'p_{i-1}' - 2\frac{u_{i-1}}{u_i}p_i' &= 0, \\ (\theta_i^{-1}(\bar{p}_i)_x)' &= p_{i+1}'' + p_{i-1}'' + 2p_{i+1}'(\ln v_i)' + 2p_{i-1}'(\ln u_i)' - 2\bar{p}_i'(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}), \\ (\theta_{i-1}^{-1}(\bar{p}_{i-1})_x)' &= p_i'' + p_{i-2}'' + 2p_i'(\ln v_{i-1})' + 2p_{i-2}'(\ln u_{i-1})' - 2\bar{p}_{i-1}'(\theta_i - \theta_{i-2}). \end{aligned} \tag{29}$$

Из (29) непосредственно видно, что 8 функций

$$\begin{aligned} p_i &= \alpha_i - \nu_i, & p_{i-1} &= \alpha_{i-1} - \nu_{i-1}, & \bar{p}_i &= \bar{\alpha}_i - \bar{\nu}_i, & \bar{p}_{i-1} &= \bar{\alpha}_{i-1} - \bar{\nu}_{i-1}, \\ v_i &= \frac{[i+1]}{[i]}, & v_{i+1} &= \frac{[i+2]}{[i+1]}, & u_i &= \frac{[i-1]}{[i]}, & u_{i-1} &= \frac{[i-2]}{[i-1]} \end{aligned}$$

при произвольном выборе i являются частными решениями одной и той же системы (получающейся, если искомые функции в (29) представить в безындексной форме).

Теперь мы можем пояснить ситуацию с решением системы (27). Очевидно, что система (29) обладает частным решением вида

$$u_0 = u_{-1} = p_0 = \bar{p}_0 = p_{-1} = \bar{p}_{-1} = 0.$$

Действительно, в случае алгебры A_n (при произвольном n) все перечисленные матричные элементы отсутствуют. Для остающихся неизвестных функций v_0 , v_1 , p_1 , $\bar{p}_1$ как следствие (29) возникает замкнутая система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 + v_0'' &= V_0 v_0, & (p_1 v_0)' + (p_1 v_0)'' &= V_0 (p_1 v_0), \\ (\bar{p}_1 v_0)' + (\bar{p}_1 v_0)'' &= U_0 (\bar{p}_1 v_0), & \dot{v}_1 + v_1'' - U_0 v_1 &= -2p_1' \bar{p}_1' v_0 \end{aligned}$$

(появление произвольных функций U_0 , V_0 связано с неоднозначностью неопределенного интеграла $\int dx \, 0 = F(y, t_2)$).

Мы видим, что функции v_0 , $p_1 v_0$ являются решениями одномерного однородного уравнения Шредингера с произвольной потенциальной функцией V_0 . При этом v_1 и $\bar{p}_1 v_0$ являются решениями (не)однородного уравнения Шредингера с потенциалом U_0 и известным источником $-2p_1' \bar{p}_1' v_0$. В терминах различных решений указанной пары уравнений Шредингера можно представить общее решение цепочки (27). К этой проблеме мы напомним вернуться в другом месте.

В заключение настоящего раздела приведем $(1 + 1)$ -интегрируемую систему, которая возникает в результате редукции (29) на пространство одного переменного ($\partial/\partial x = \partial/\partial y$):

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i+1} + v_{i+1}'' + 2v_i \bar{p}_{i+1}' p_{i+1}' + 2v_{i+1}^2 u_i &= 0, \\ \dot{v}_i + v_i'' + 2\frac{1}{u_i} \bar{p}_i' p_i' + 2v_i^2 u_{i-1} &= 0, \\ -\dot{u}_i + u_i'' + 2\frac{1}{v_i} p_i \bar{p}_i' + 2u_i^2 v_{i+1} &= 0, \\ -\dot{u}_{i-1} + u_{i-1}'' + 2u_i \bar{p}_{i-1}' p_{i-1}' + 2u_{i-1}^2 v_i &= 0, \\ \dot{p}_i + p_i'' - 2(\ln u_i)' p_i' - 2u_i v_i \bar{p}_{i-1}' &= 0, \\ \dot{p}_{i-1} - p_{i-1}'' - 2(\ln u_i)' p_{i-1}' - 2\frac{u_{i-1}}{u_i} \bar{p}_i' &= 0, \\ \dot{\bar{p}}_i + \bar{p}_i'' - 2(\ln u_i)' \bar{p}_i' - 2u_i v_i p_{i-1}' &= 0, \\ \dot{\bar{p}}_{i-1} - \bar{p}_{i-1}'' - 2(\ln u_i)' \bar{p}_{i-1}' - 2\frac{u_{i-1}}{u_i} p_i' &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Уравнения системы (30) инвариантны по отношению к преобразованиям одномерного варианта УТ(2, 2)-подстановки (28) и обладают бесконечным набором сохраняющихся величин.

5. УРАВНЕНИЯ УТ(m_1, m_2)-ЦЕПОЧКИ И ИХ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

В настоящем разделе собраны вспомогательные равенства и соотношения. С их помощью задача построения УТ(m_1, m_2)-цепочек уравнений и их общих решений переходит в область чисто технических манипуляций.

Пусть пара групповых элементов $m^\pm$ удовлетворяет уравнениям, обобщающим (14):

$$\begin{aligned} m_y^+ &= m^+ \left(-(h\bar{\Phi})_y + \sum_{s=1}^{m_1} (Y^s \bar{\phi}^{(s)}) \right) \equiv m^+ L^+, \\ (Y^s \bar{\phi}^{(s)}) &\equiv \sum_i (Y_i^s \bar{\phi}_i^{(s)}), \quad (Y^s \phi^{(s)})^T \equiv \sum_i (Y_i^{-s} \phi_i^{(s)}), \\ m_x^- &= m^- \left((h\Phi)_x - \sum_{s=1}^{m_2} (Y^s \bar{\phi}^{(s)})^T \right) \equiv m^- L^-, \end{aligned} \quad (31)$$

где генераторы $Y^{\pm s}$ и их взаимные коммутаторы определены в (6) и ниже.

Наша ближайшая цель — установить правила дифференцирования матричных элементов в различных представлениях элемента группы

$$k = m_-^{-1} m_+. \quad (32)$$

Очевидно, что

$$(\ln[i])_{xy} = [i]^{-2} \begin{pmatrix} \langle i \| k \| i \rangle & \langle i \| L^- k \| i \rangle \\ \langle i \| k L^+ \| i \rangle & \langle i \| L^- k L^+ \| i \rangle \end{pmatrix}. \quad (33)$$

В соответствии с (15) при действии генераторов простых корней на минимальный базисный вектор отличны от нуля только $X_i^+ \|i\rangle \neq 0$, $\langle i \| X_i^- \neq 0$. По этой причине действие операторов $L^\pm$ на минимальный вектор фундаментального представления может быть представлено в виде

$$L^+ \|i\rangle = l_i^+ X_i^+ \|i\rangle, \quad \langle i \| L^- = \langle i \| X_i^- l_i^-,$$

где $l_i^\pm$ — некоторые операторы, полиномиальные по генераторам положительных (отрицательных) простых корней. Например,

$$(Y^2 \bar{\phi}^{(2)}) \|i\rangle = (\phi_{i-1}^{(2)} X_{i-1}^+ - \phi_i^{(2)} X_{i+1}^+) X_i^+ \|i\rangle,$$

в этом случае $l_i^+ = \phi_{i-1}^{(2)} X_{i-1}^+ - \phi_{i+1}^{(2)} X_{i+1}^+$. Имея в виду этот факт и принимая во внимание (8), мы переписываем (33) в виде

$$(\ln[i])_{xy} = [i]^{-2} (l_i^-)_l (l_i^+)_r [i-1][i+1], \quad (34)$$

где теперь уже $(l_i^-)_l$, $(l_i^+)_r$ — те же самые полиномы, построенные, однако, из генераторов простых корней, соответственно левого и правого присоединенного представлений. Нижеприведенные формулы иллюстрируют применение (34) к конкретному случаю $m_1 = m_2 = 3$ в (31):

$$\begin{aligned} (\alpha_i)_y &= \theta_i (\bar{\phi}_i^{(1)} + \bar{\phi}_{i-1}^{(2)} \bar{\alpha}_{i-1} - \bar{\phi}_i^{(2)} \bar{\alpha}_{i+1} + \bar{\alpha}_{i+1, i+2} - \bar{\alpha}_{i+1} \bar{\alpha}_{i-1} + \bar{\alpha}_{i-1, i-2}), \\ (\alpha_{i, i+1})_y &= \alpha_{i+1} (\alpha_i)_y - \theta_i \theta_{i+1} (\bar{\phi}_i^{(2)} + \bar{\alpha}_{i-1} - \bar{\alpha}_{i+2}), \\ (\ln[i])_{xy} &= \theta_{i+2} \theta_{i+1} \theta_i + \theta_{i+1} \theta_i \theta_{i-1} + \theta_{i-2} \theta_{i-1} \theta_i + \\ &\quad + \theta_{i+1} \theta_i (\phi_i^{(2)} + \alpha_{i-1} - \alpha_{i+2}) (\bar{\cdot} \bar{\cdot}) + \theta_{i-1} \theta_i (\phi_{i-1}^{(2)} + \alpha_{i-2} - \alpha_{i+1}) (\bar{\cdot} \bar{\cdot}) + \\ &\quad + \theta_i (\phi_i^{(1)} + \phi_{i-1}^{(2)} \alpha_{i-1} - \phi_i^{(2)} \alpha_{i+1} + \alpha_{i+1, i+2} - \alpha_{i+1} \alpha_{i-1} + \alpha_{i-1, i-2}) (\bar{\cdot} \bar{\cdot}), \end{aligned} \quad (35)$$

где под $(\bar{\cdot})$ имеются в виду те же самые величины, что и в соответствующих предшествующих сомножителях, с заменой всех функций f на $\bar{f}$. Очевидно, что аналогичные (35) соотношения будут выполняться после замены $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$, $y \rightarrow x$ и наоборот.

Введем новые функции $p_i^{(1,2)}$, $\bar{p}_i^{(1,2)}$:

$$\begin{aligned} p_i^{(1)} &= \theta_i^1(\bar{\alpha}_i)_y, & \bar{p}_i^{(1)} &= \theta_i^1(\alpha_i)_x, \\ p_i^{(2)} &= \phi_i^{(2)} + \alpha_{i-1} - \alpha_{i+2}, & \bar{p}_i^{(2)} &= \bar{\phi}_i^{(2)} + \bar{\alpha}_{i-1} - \bar{\alpha}_{i+2}. \end{aligned}$$

Используя еще раз (34), приходим к системе уравнений для функций $p_i^{(1,2)}$, $\bar{p}_i^{(1,2)}$, θ_i :

$$\begin{aligned} (p_i^{(2)})_y &= \theta_{i-1}\bar{p}_{i-1}^{(1)} - \theta_{i+2}\bar{p}_{i+2}^{(1)}, & (\bar{p}_i^{(2)})_x &= \theta_{i-1}p_{i-1}^{(1)} - \theta_{i+2}p_{i+2}^{(1)}, \\ (p_i^{(1)})_y &= \theta_{i-1}\bar{p}_{i-1}^{(1)}p_{i-1}^{(2)} - \theta_{i+1}\bar{p}_{i+1}^{(1)}p_i^{(2)} + \theta_{i-1}\theta_{i-2}\bar{p}_{i-2}^{(2)} - \theta_{i+1}\theta_{i+2}\bar{p}_{i+1}^{(2)}, \\ (\bar{p}_i^{(1)})_x &= \theta_{i-1}p_{i-1}^{(1)}\bar{p}_{i-1}^{(2)} - \theta_{i+1}p_{i+1}^{(1)}\bar{p}_i^{(2)} + \theta_{i-1}\theta_{i-2}p_{i-2}^{(2)} - \theta_{i+1}\theta_{i+2}p_{i+1}^{(2)}, \\ (\ln \theta_i)_{xy} &= \widehat{K}(\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+2} + \theta_i\theta_{i-1}\theta_{i-2} + \theta_i\theta_{i+1}p_i^{(2)}\bar{p}_i^{(2)} + \theta_{i-1}\theta_i p_{i-1}^{(2)}\bar{p}_{i-1}^{(2)} + \theta_i p_i^{(1)}\bar{p}_i^{(1)}). \end{aligned}$$

Это как раз система уравнений УТ(3, 3)-цепочки с известным общим решением, которое определяется набором произвольных функций $(\Phi_i, \phi_i^{(1)}, \phi_i^{(2)})$ и $(\bar{\Phi}_i, \bar{\phi}_i^{(1)}, \bar{\phi}_i^{(2)})$ одного аргумента (x, y) , соответственно.

Буквально повторяя вычисления настоящего раздела или аналогичные из третьего раздела, приходим окончательно к уравнениям УТ(m_1, m_2) интегрируемой подстановки:

$$\begin{aligned} (p_\alpha^{(s)})_y &= \sum_{k=1}^{m_1-s} \left(p_{\alpha-k}^{(s+k)} \bar{p}_{\alpha-k}^{(k)} \prod_{i=1}^k \theta_{\alpha-k+i-1} - p_\alpha^{(s+k)} \bar{p}_{\alpha+s}^{(k)} \prod_{i=1}^k \theta_{\alpha+s+i-1} \right), \\ (\ln \theta_\alpha)_{xy} &= \widehat{K} \sum_{s=1}^{\min(m_1, m_2)} \sum_{k=0}^{s-1} p_{\alpha-k}^{(s)} \bar{p}_{\alpha-k}^{(s)} \prod_{i=1}^s \theta_{\alpha-s+i-1}, \quad p_\alpha^{(m_1)} = 1, \quad \bar{p}_\alpha^{(m_2)} = 1, \\ (\bar{p}_\alpha^{(s)})_y &= \sum_{k=1}^{m_2-s} \left(\bar{p}_{\alpha-k}^{(s+k)} p_{\alpha-k}^{(k)} \prod_{i=1}^k \theta_{\alpha-k+i-1} - \bar{p}_\alpha^{(s+k)} p_{\alpha+s}^{(k)} \prod_{i=1}^k \theta_{\alpha+s+i-1} \right). \end{aligned} \tag{36}$$

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Обсудим сначала еще раз предлагаемую конструкцию, не вдаваясь в детали.

В основе построения лежат два групповых элемента $m_\pm$, принадлежащие соответственно $\pm$ разрешимым подгруппам (относительно некоторой градуировки) полупростой группы. Они определяются парой уравнений S -матричного типа:

$$l_+ \equiv m_+^{-1}(m_+)_y = \sum_{s=0}^{m_1} A^{+s}, \quad l_- \equiv m_-^{-1}(m_-)_x = \sum_{s=0}^{m_2} A^{-s}. \tag{37}$$

Эти уравнения, чисто алгебраические по своей природе, представляют собой условие разложимости операторов $l_{\pm}$ по генераторам алгебры с градуировочными индексами, меньшими определенных заданных m_1, m_2 .

Матричные элементы различных фундаментальных представлений элемента группы $K = m_-^{-1}m_+$ удовлетворяют определенной системе тождеств, которые могут быть интерпретированы как уравнения точно интегрируемой цепочки УТ(m_1, m_2).

На этом построение интегрируемого УТ(m_1, m_2)-отображения (подстановки) заканчивается.

Следующий шаг связан с введением параметров эволюции. На функции $\phi_i^{(s)}(y), \phi_i^{(s)}(x)$, до сего времени произвольные, накладываются дополнительные условия, которым должны удовлетворять элементы $m_{\pm}$:

$$m_+^{-1}(m_+)_{\bar{t}_{d_1}} = \sum_{s=0}^{d_1} B^{+s}, \quad m_-^{-1}(m_-)_{\bar{t}_{d_2}} = \sum_{s=0}^{d_2} B^{-s}. \quad (38)$$

Условия совместности (37) с (38) определяют явную зависимость функций $\bar{\phi}_i^{(s)} \equiv \bar{\phi}_i^{(s)}(y, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots)$, $\phi_i^{(s)} \equiv \phi_i^{(s)}(x, t_1, t_2, \dots)$ как от эволюционных (временных) параметров, так и от пространственных координат x, y .

В результате возникают иерархии интегрируемых $(1+2)$ уравнений (каждая система иерархии определяется своим набором d_1, d_2 при фиксированных m_1, m_2). Все системы иерархии инвариантны относительно УТ(m_1, m_2)-подстановки.

В одномерном случае ($\partial/\partial y = \partial/\partial x$) предлагаемая конструкция эквивалентна многовременному формализму или технике гамильтоновых потоков [4].

Теперь перечислим задачи, интересные с нашей точки зрения, которые могут быть решены в контексте результатов настоящей работы.

Не вызывает сомнения возможность прямого обобщения предложенной конструкции на случай суперсимметрии. На этом пути могут быть в явном виде построены не известные до сих пор интегрируемые иерархии в $(2|2)$ -суперпространстве.

Исключительно интересна ситуация в квантовой области. Гайзенберговы операторы квантованной (в соответствии с каноническими правилами) двумерной цепочки Тоды [12] выражаются в терминах матричных элементов единственного оператора $k = m_-^{-1}m_+$. Элементы $m_{\pm}$ являются решениями следующих уравнений:

$$(m_+)y = m_+ \left(\sum_{s=1}^r X_s^+ \exp(k\bar{\phi}(y)) \right)_s, \quad (m_-)x = m_- \left(\sum_{s=1}^r X_s^- \exp(k\phi(x)) \right)_s, \quad (39)$$

где теперь $X_s^{\pm}$ – генераторы простых корней уже квантовых алгебр, а $\phi(x) + \bar{\phi}(y)$ – квантованное поле двумерного уравнения Лапласа, k – матрица Картана полупростой алгебры.

Сравнение (37) и (39) приводит к интригующему вопросу: с какими квантовыми алгебрами связаны уравнения квантованных УТ(m_1, m_2)-цепочек?

В настоящей работе был рассмотрен единственный конкретный пример системы (п. 4.2), инвариантной относительно УТ(2, 2)-подстановки. Однако мы надеемся и уверены, что существует универсальная процедура, позволяющая в общем случае УТ-подстановок находить решения уравнений симметрии столь же просто, как это было проделано в [3] в простейшем случае УТ(1, 1).

И, наконец, последнее замечание. Читатель, наверное, уже обратил внимание на значительное несоответствие между удивительной простотой и чисто алгебраической природой изначальных предположений (единственный групповой элемент k и уравнения (37), (38), его определяющие), с одной стороны, и многочисленными рекуррентными соотношениями между матричными элементами различных фундаментальных представлений, для которых необходимы независимые обоснования, с другой. Наиболее вероятно, что последние рекуррентные соотношения являются прямыми следствиями уравнений (37), (38) и групповых свойств элементов $m_{\pm}$. Однако в настоящий момент автору неизвестно, как подобная информация может быть извлечена и возможно ли вообще это сделать. К этой увлекательной проблеме автор надеется вернуться в дальнейшем.

ДОПОЛНЕНИЕ

Рассмотрим функцию

$$R^i = \langle i \| K X_{i-1}^+ X_i^+ \| i \rangle [i-1] + \langle i-1 \| K X_i^+ X_{i-1}^+ \| i-1 \rangle [i] - \langle i \| K X_i^+ \| i \rangle \langle i-1 \| K X_{i-1}^+ \| i-1 \rangle,$$

где K – произвольный элемент группы $SL(n, R)$.

Из ее определения и свойств младшего вектора состояния $\|i\rangle$ (15) вытекает, что функция R обращается в нуль генераторами всех правых положительных и левых отрицательных простых корней. Это означает, что R представима в виде линейной комбинации матричных элементов с обкладками из минимальных векторов.

Вычисление элементов Картана на R приводит к результату

$$h_r^s R^i = -(\delta_{s,i+1} + \delta_{s,i-2}) R^i, \quad h_l^s R^i = -(\delta_{s,i} + \delta_{s,i-1}) R^i.$$

Отсюда вытекает, что функция R^i справа и слева принадлежит к различным неприводимым представлениям. Последнее невозможно, и, следовательно, $R^i = 0$. Так же может быть доказано тождество Якоби (см. третий раздел).

Ниже приведены простейшие базисные векторы i -го фундаментального представления. Они различаются числом повышающих генераторов простых корней, примененных к минимальному вектору состояния.

Базисные векторы нулевого $\|i\rangle$ и первого $X_i^+ \|i\rangle$ порядков одномерны. Существуют два вектора второго порядка

$$X_{i+1}^+ X_i^+ \|i\rangle, \quad X_{i-1}^+ X_i^+ \|i\rangle,$$

три вектора третьего порядка

$$X_{i+2}^+ X_{i+1}^+ X_i^+ \|i\rangle, \quad X_{i+1}^+ X_{i-1}^+ X_i^+ \|i\rangle, \quad X_{i-2}^+ X_{i-1}^+ X_i^+ \|i\rangle$$

и, наконец, пять векторов четвертого порядка

$$X_{i+3}^+ X_{i+2}^+ X_{i+1}^+ X_i^+ \|i\rangle, \quad X_{i+2}^+ X_{i-1}^+ X_{i+1}^+ X_i^+ \|i\rangle, \quad X_i^+ X_{i+1}^+ X_{i-1}^+ X_i^+ \|i\rangle, \\ X_{i-2}^+ X_{i-1}^+ X_{i+1}^+ X_i^+ \|i\rangle, \quad X_{i-3}^+ X_{i-2}^+ X_{i-1}^+ X_i^+ \|i\rangle.$$

Все другие возможности приводят к векторам с нулевой нормой.

Благодарность. Автор благодарен Российскому фонду фундаментальных исследований (грант № 95-01-00249) за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] *D. B. Fairlie, A. N. Leznov.* Phys. Lett. A. 1995. V. 199. P. 360–364.
- [2] *A. N. Leznov.* Physica D. 1995. V. 87. P. 48–51; Discrete group of integrable mappings as a foundation of the theory of integrable systems. Preprint MPI 96–46. Bonn, 1996.
- [3] *V. B. Derjagin, A. N. Leznov, E. A. Yuzbashyan.* Two-dimensional integrable mappings and explicit form of equations of $(1+2)$ dimensional hierarchies of integrable systems. Preprint MPI 96–39. Bonn, 1996.
- [4] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.* Теория солитонов: Метод обратной задачи рассеяния. М.: Наука, 1980; *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986; *P. G. Olver.* Application of Lie groups to differential equations. Berlin: Springer, 1986.
- [5] *А. Н. Лезнов.* ТМФ. 1980. Т. 42. С. 343–349.
- [6] *A. N. Leznov.* In: Proc. of II International Workshop “Nonlinear and turbulent process”. Kiev, 1983. Ed. R. Sagdeev. New York: Gordon and Breach, 1984. P. 1437–1453.
- [7] *A. N. Leznov, V. G. Smirnov.* Lett. Math. Phys. 1981. V. 5. P. 31–36.
- [8] *A. N. Leznov.* In: Proc. of International Seminar “Group Methods in Physics”, Zvenigorod, 24–26 November 1982. Ed. M. A. Markov. New York: Gordon and Breach, 1983. P. 443–457.
- [9] *A. N. Leznov, M. V. Saveliev.* Progr. in Phys. 1992. V. 15. P. 290.
- [10] *A. Davey, K. Stewartson.* Proc. Roy. Soc. 1974. V. A338. P. 101–110.
- [11] *A. N. Leznov, E. A. Yuzbashjan.* Multi-soliton solution of two-dimensional matrix Davey–Stewartson equation. Preprint MPI-96-37. Bonn, 1996; Lett. Math. Phys. 1995. V. 35. P. 345–349.
- [12] *А. Н. Лезнов, И. А. Федосеев.* ТМФ. 1982. Т. 53. № 3. С. 358–373; *I. A. Fedoseev, A. N. Leznov.* Phys. Lett. B. 1984. V. 141. № 1–2. P. 100–103; *А. Н. Лезнов, М. А. Мухтаров.* ТМФ. 1987. Т. 71. № 1. С. 46–53.

Поступила в редакцию 16.IV.1997 г.,
после доработки 14.I.1998 г.