Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Юэ-Фэн Чжао, Янь Цзен, Хун-Ган Лю, Ци Сун,
Ган-Чэн Ван, Кан Сюэ, q -Деформированные $su(1,1)$ -
когерентные состояния Барута–Жирарделло и состоя-
ния кота Шредингера, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 3, 505–
514

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9200>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 11:35:06

© 2017 г. Юэ-Фэн Чжао*, Янь Цзен*, Хун-Ган Лю*,
Ци Сун*, Ган-Чэн Ван*, Кан Сюэ*

q -ДЕФОРМИРОВАННЫЕ $su(1, 1)$ -КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ БАРУТА–ЖИРАРДЕЛЛО И СОСТОЯНИЯ КОТА ШРЕДИНГЕРА

Состояния кота Шредингера определены как суперпозиции q -деформированных $su(1, 1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло с регулируемым углом φ в q -деформированном пространстве Фока. Изучены статистические свойства q -деформированных $su(1, 1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло и квантовых состояний кота Шредингера. Как оказалось, в случае q -деформированных $su(1, 1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло статистические свойства фотонов всегда являются субпуассоновскими. В случае состояний кота Шредингера при $\varphi = 0, \pi/2, \pi$ статистические свойства фотонов всегда являются субпуассоновскими, если $\varphi = \pi/2$, а в других ситуациях их трудно охарактеризовать, поскольку они зависят от параметров q и k . Более того, найдены некоторые интересные свойства состояний кота Шредингера в пределе при $|z| \rightarrow 0$, где z – параметр этих состояний. Также сделан вывод, что статистические свойства фотонов являются субпуассоновскими в недеформированном случае, когда $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$.

Ключевые слова: q -деформированная алгебра Барута–Жирарделло, $su(1, 1)$ -когерентные состояния, q -деформированные состояния кота Шредингера.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9200>

1. ВВЕДЕНИЕ

С тех пор как Шредингер при изучении гармонического осциллятора впервые ввел понятие когерентных состояний [1] с целью определения его квантовых состояний, исследованию когерентных состояний и их применений было посвящено

Работа выполнена при финансовой поддержке NSF of China (гранты № 11405026, 11175043), Plan for Scientific and Technological Development of Jilin Province (грант № 20150520083JH), а также при финансовой поддержке Fundamental Research Funds for the Central Universities (грант № 14QNJ008).

*Department of Physics, Northeast Normal University, Changchun, Republic of China.
E-mail: wanggc000@163.com, xuekang@nenu.edu.cn

множество работ в различных разделах физики. Глаубером [2], [3] были предложены важные когерентные состояния (так называемые когерентные состояния Глаубера), являющиеся собственными состояниями оператора уничтожения $a|z\rangle = z|z\rangle$ в квантовой оптике и, как оказалось, имеющие интересное свойство, заключающееся в том, что они минимизируют соотношение неопределенностей Гейзенберга. Далее Переломов [4] развил теорию когерентных состояний, связанных с произвольной группой Ли. Частным случаем этих состояний являются $su(1, 1)$ -когерентные состояния. Известны два типа $su(1, 1)$ -когерентных состояний. Состояния первого типа согласно статье [4] можно получить, действуя унитарным z -оператором сдвига на основное состояние; эти состояния часто называют $su(1, 1)$ -когерентными состояниями Переломова. Состояния второго типа определяются как собственные состояния оператора понижения K_- согласно работе Барута и Жирарделло [5] и называются $su(1, 1)$ -когерентными состояниями Барута–Жирарделло.

С другой стороны, множество работ было посвящено обобщению идеи когерентных состояний на теорию q -деформаций. q -Деформированные когерентные состояния Глаубера были впервые предложены Ариком и Куном [6]. Более того, были определены квантовые супералгебры [7], а в статьях [8]–[10] Макфарлейн, Бидебхам и Сун рассмотрели q -деформированные квантовые осцилляторы. Согласно этим исследованиям q -деформированный осциллятор можно использовать в рамках теории представлений квантовых алгебр аналогично понятию гармонического осциллятора, а затем с помощью теории представлений квантовых алгебр легко получить q -деформированные когерентные состояния. С использованием q -деформированного гармонического осциллятора q -деформированные $su(2)$ -когерентные состояния были изучены Макфарлейном [8], а q -деформированные $su(1, 1)$ -когерентные состояния Переломова были исследованы Кулишем и Дамаскинским [11]. Недавно q -деформированные $su(1, 1)$ -когерентные состояния Барута–Жирарделло были рассмотрены в работе Беррады, База и Хассоуни [12].

Поскольку Шредингер сформулировал знаменитый “парадокс кота Шредингера” [13] примерно в то же время, когда обсуждался парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена, в основе идеи Шредингера лежало обобщение копенгагенской интерпретации квантовой механики на макроскопически различимые объекты. В квантовой оптике когерентные состояния определяются для макроскопических объектов, и в ней было предложено использовать состояния кота Шредингера с двумя когерентными состояниями одинаковой амплитуды, но с различными фазами. Также состояния кота Шредингера были применены в других различных областях физики. Соответственно построению состояний кота Шредингера посвящено множество работ. Например, Герри и Гроб определили двухмодовые $su(2)$ - и $su(1, 1)$ -состояния кота Шредингера как суперпозиции $su(2)$ - и $su(1, 1)$ -когерентных состояний [14]. Было рассмотрено квадратурное сжатие и распределение числа фотонов для состояний кота Шредингера. Идея о том, что атомарные коллективные состояния кота Шредингера состоят из суперпозиций состояний Блоха, также была предложена Герри и Гробом [15]. Кроме того, они исследовали когерентные свойства состояний кота Шредингера и обнаружили, что эти могут демонстрировать как свойства антигруппирования, так и группирования. Недавно Дей [16] построил состояния кота Шредингера с q -деформированными когерентными состояниями Глаубера и изучил для них распределение числа фотонов.

В настоящей статье мы определяем состояния кота Шредингера как суперпозиции q -деформированных $su(1, 1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло с регулируемым углом φ . Мы рассматриваем три случая, когда $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = \pi$, и обсуждаем в каждом из них статистические свойства фотонов для q -деформированных состояний кота Шредингера.

Структура статьи имеет следующий вид. В разделе 2 мы сначала вводим определение q -деформированной алгебры $su(1, 1)$, затем определяем q -деформированные $su(1, 1)$ -когерентные состояния Барута–Жирарделло, а затем в разделе 3 рассматриваем статистические свойства фотонов. Далее мы определяем состояния кота Шредингера как суперпозиции q -деформированных $su(1, 1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло и рассматриваем в разделе 4 статистические свойства фотонов для состояний кота Шредингера. Наконец, мы суммируем результаты и формулируем основные выводы в разделе 5.

2. q -ДЕФОРМИРОВАННАЯ АЛГЕБРА $su(1, 1)$

Согласно работам [11] и [17] q -деформированная алгебра Ли $su(1, 1)$ определяется следующим образом:

$$[K_3, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \quad K_- K_+ - q K_+ K_- = [2K_3], \quad (1)$$

где генераторы алгебры $(K_3, K_{\pm})$ удовлетворяют условиям эрмитовости $K_3^{\dagger} = K_3$, $K_+^{\dagger} = K_-$, $K_-^{\dagger} = K_+$, а через $[x]$ обозначена q -деформация для параметра x или оператора $\hat{x}$:

$$[x] = \frac{1 - q^x}{1 - q}. \quad (2)$$

В недеформированном случае (т.е. когда $q = 1$ и $[x] = x$) недеформированную алгебру Ли $su(1, 1)$ можно легко получить из выражения (1).

Для того чтобы с помощью формулы (1) прийти к q -деформированной алгебре Ли $su(1, 1)$, рассмотрим сначала q -деформированные бозонные операторы рождения и уничтожения a_q и $a_q^{\dagger}$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$a_q a_q^{\dagger} - q a_q^{\dagger} a_q = 1, \quad [N, a_q^{\dagger}] = a_q^{\dagger}, \quad [N, a_q] = -a_q, \quad 0 < q \leq 1. \quad (3)$$

Действуя операторами a_q , $a_q^{\dagger}$ на q -деформированные фоковские состояния $|n\rangle_q$, получаем равенства

$$a_q^{\dagger} |n\rangle_q = \sqrt{[n+1]} |n+1\rangle_q, \quad a_q |n\rangle_q = \sqrt{[n]} |n-1\rangle_q, \quad N |n\rangle_q = n |n\rangle_q. \quad (4)$$

Здесь состояние $|n\rangle_q$ есть полный ортонормированный базис пространства неприводимого представления, $n = 0, 1, \dots$. Определим операторы a_q и $a_q^{\dagger}$ на q -деформированном фоковском пространстве как обобщенные операторы рождения и уничтожения:

$$a_q = \sqrt{\frac{[N+1]}{N+1}} a, \quad a_q^{\dagger} = a^{\dagger} \sqrt{\frac{[N+1]}{N+1}}. \quad (5)$$

В соответствии с работой [18], в которой рассмотрена q -деформированная реализация алгебры $su(1, 1)$ Холштейна–Примакова, можно получить генераторы $K_{\pm}$ и K_3 с помощью бозонных операторов рождения-уничтожения следующим образом:

$$K_+ = a_q^{\dagger} \sqrt{[N+2k]}, \quad K_- = \sqrt{[N+2k]} a_q, \quad K_3 = N + k. \quad (6)$$

Следовательно, легко проверить, что действие операторов $K_{\pm}$ и K_3 на q -деформированные фоковские состояния $|n\rangle_q$ имеет вид

$$K_+|n\rangle_q = \sqrt{[n+1][n+2k]}|n+1\rangle_q, \quad (7)$$

$$K_-|n\rangle_q = \sqrt{[n][n+2k-1]}|n-1\rangle_q, \quad (8)$$

$$K_3|n\rangle_q = (n+k)|n\rangle_q, \quad (9)$$

где $k = 1/2, 1, 3/2, \dots$ ($2k$ является положительным целым числом). Используя выражения (6), нетрудно получить q -деформированные $su(1, 1)$ -когерентные состояния Перемолова в фоковском пространстве. Также мы можем вывести q -деформированные $su(1, 1)$ -когерентные состояния Барута–Жирарделло, которые обсуждаются в следующем разделе.

3. q -ДЕФОРМИРОВАННЫЕ $su(1, 1)$ -КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ БАРУТА–ЖИРАРДЕЛЛО И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФОТОНОВ

В предыдущем разделе мы видели, что q -деформированную алгебру Ли $su(1, 1)$ можно построить, используя q -деформированные бозонные операторы рождения-уничтожения в фоковском пространстве. В настоящем разделе мы вводим q -деформированные когерентные состояния Барута–Жирарделло и исследуем статистические свойства фотонов для этих состояний. q -Деформированные когерентные состояния Барута–Жирарделло, впервые предложенные Барутом и Жирарделло [5], определяются как собственные состояния оператора понижения K_- :

$$K_-|z, k\rangle_q = z|z, k\rangle_q. \quad (10)$$

Здесь $|z, k\rangle_q$ – собственные состояния, а z – собственное значение оператора понижения K_- . Легко видеть, что

$$|z, k\rangle_q = C(|z|) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{[n]![2k+n-1]!}} |n\rangle_q, \quad (11)$$

где $[n]!$ есть q -деформированный факториал, определяемый как $[n]! = [n][n-1] \dots [2][1]$, $[0]! = 1$, $C(|z|)$ – нормализованная постоянная, которую можно найти из условия нормализации ${}_q\langle z, k|z, k\rangle_q = 1$, равная

$$C(|z|) = \frac{|z|^{k-1/2}}{\sqrt{I_{2k-1}^q(2|z|)}}, \quad (12)$$

а $I_v^q(x)$ является q -деформированной модифицированной функцией Бесселя первого рода, разложение которой в ряд имеет вид

$$I_v^q(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2m+v}}{[m]![v+m]!}. \quad (13)$$

Если считать $q = 1$, то функция $I_v^q(x)$ превращается в недеформированную модифицированную функцию Бесселя первого рода.

Рис. 1. Графики распределений числа фотонов q -деформированных $su(1, 1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло при $|z| = 1.2$ и $k = 1$.

При измерении количества фотонов вероятность обнаружения n фотонов дается формулой

$$P_{n,q} = |\langle n|z, k \rangle_q|^2 = \frac{|z|^{2k-1}}{I_{2k-1}^q(2|z|)} \left| \frac{z^n}{\sqrt{[n]![2k+n-1]!}} \right|^2. \quad (14)$$

Распределения числа фотонов при различных значениях параметра q представлены на рис. 1.

Для того чтобы изучить статистические свойства фотонов для $su(1, 1)$ -когерентных состояний и определить, являются ли эти свойства пуассоновскими, субпуассоновскими или суперпуассоновскими, удобно использовать параметр Манделя Q [19], согласно которому можно охарактеризовать вид распределения вероятностей числа фотонов (14). Этот параметр задается выражением

$$Q = \frac{\langle a_q^\dagger a_q a_q^\dagger a_q \rangle_q - \langle a_q^\dagger a_q \rangle_q^2}{\langle a_q^\dagger a_q \rangle_q}, \quad (15)$$

где $\langle a_q^\dagger a_q \rangle_q$ — среднее число фотонов в состоянии $|z, k \rangle_q$, а $\langle a_q^\dagger a_q a_q^\dagger a_q \rangle_q - \langle a_q^\dagger a_q \rangle_q^2$ — дисперсия распределения числа фотонов. Если параметр Манделя $Q = 0$, то статистические свойства фотонов пуассоновские, а если $Q < 0$ или $Q > 0$, то свойства субпуассоновские или суперпуассоновские соответственно.

Для изучения свойств параметра Манделя для q -деформированных $su(1, 1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло сначала вычислим среднее число фотонов и дисперсию распределения числа фотонов. Легко видеть, что

$$\langle a_q^\dagger a_q \rangle_q = |z| \frac{I_{2k}^q(2|z|)}{I_{2k-1}^q(2|z|)}, \quad (16)$$

$$\langle a_q^\dagger a_q a_q^\dagger a_q \rangle_q - \langle a_q^\dagger a_q \rangle_q^2 = |z| \frac{I_{2k}^q(2|z|)}{I_{2k-1}^q(2|z|)} + q|z|^2 \frac{I_{2k+1}^q(2|z|)}{I_{2k-1}^q(2|z|)} - \left[|z| \frac{I_{2k}^q(2|z|)}{I_{2k-1}^q(2|z|)} \right]^2. \quad (17)$$

Рис. 2. Параметр Манделя для q -деформированных $su(1,1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло как функция от $|z|$ при $k = 2$.

Теперь можно рассчитать параметр Манделя Q с помощью формулы (15):

$$Q = |z| \left[q \frac{I_{2k+1}^q(2|z|)}{I_{2k}^q(2|z|)} - \frac{I_{2k}^q(2|z|)}{I_{2k-1}^q(2|z|)} \right]. \quad (18)$$

Отметим, что в недеформированном случае (т.е. при $q = 1$), соответствующем случаю общих $su(1,1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло, параметр Манделя Q имеет вид

$$Q = |z| \left[\frac{I_{2k+1}(2|z|)}{I_{2k}(2|z|)} - \frac{I_{2k}(2|z|)}{I_{2k-1}(2|z|)} \right]. \quad (19)$$

Согласно неравенствам типа Турана для модифицированных функций Бесселя первого рода

$$I_{v+1}(x)I_{v-1}(x) < I_v(x)^2, \quad (20)$$

доказанных в работах [20], [21], нетрудно видеть, что параметр Манделя $Q < 0$. Более того, если рассмотреть q -деформированный случай и наложить ограничение $0 < q < 1$, можно получить неравенство $Q < 0$ для параметра Манделя согласно рис. 2. Другими словами, статистические свойства фотонов для q -деформированных $su(1,1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло всегда являются субпуассоновскими.

4. $su(1,1)$ -СОСТОЯНИЯ КОТА ШРЕДИНГЕРА И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФОТОНОВ

В предыдущем разделе мы исследовали статистические свойства фотонов для q -деформированных $su(1,1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло. В настоящем разделе мы рассматриваем суперпозиции двух $su(1,1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло, которые часто называют $su(1,1)$ -состояниями кота Шредингера, и обсуждаем статистические свойства фононов. Определим $su(1,1)$ -состояния

Рис. 3. Распределение числа фотонов для q -деформированных состояний кота Шредингера при $|z| = 1.2$ и $k = 1$ для $\varphi = 0$ (а) и $\varphi = \pi/2$ (б).

кота Шредингера как суперпозиции q -деформированных $su(1, 1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло

$$|z, k, \varphi\rangle_q = \frac{1}{N(z, k, \varphi)} (|z, k\rangle_q + e^{i\varphi} |z, k\rangle_q), \quad (21)$$

где $0 < \varphi < 2\pi$ – регулируемый угол, а нормализованную постоянную $N(z, k, \varphi)$ можно получить из условия нормализации ${}_q\langle |z, k, \varphi|z, k, \varphi\rangle_q = 1$:

$$N(z, k, \varphi) = \sqrt{2} \left[1 + \cos \varphi \frac{J_{2k-1}^q(2|z|)}{I_{2k-1}^q(2|z|)} \right]^{1/2}. \quad (22)$$

Здесь $J_v^q(x)$ – q -деформированная функция Бесселя первого рода, разложение которой в ряд имеет вид

$$J_v^q(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+v}}{[m]! [v+m]!}. \quad (23)$$

Если считать $q = 1$, то функция $J_v^q(x)$ превращается в недеформированную функцию Бесселя первого рода.

Согласно выражению (14) можно получить следующее распределение вероятностей числа фотонов для $su(1, 1)$ -состояний кота Шредингера:

$$P_{n,q} = |\langle n|z, k, \varphi\rangle_q|^2 = \frac{2|z|^{2n+2k-1} (1 + (-1)^n \cos \varphi)}{N(z, k, \varphi)^2 I_{2k-1}^q(2|z|) [n]! [2k+n-1]!}. \quad (24)$$

Отметим три случая ограничения для φ в формуле (24). При $\varphi = 0$ вносят вклад только состояния с четными n , при $\varphi = \pi$ – только с нечетными. Для рассматриваемых состояний распределение числа фотонов имеет такой же вид, как и распределение в случае гармонического осциллятора (см. рис. 3а). При $\varphi = \pi/2$ распределение числа фотонов для $su(1, 1)$ -состояний кота Шредингера имеет тот же вид, что для q -деформированных $su(1, 1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло (ср. рис. 1 и рис. 3б).

Рис. 4. Поведение параметра Манделя для q -деформированных состояний кота Шредингера как функции параметра $|z|$ при $k = 2$, $\varphi = \pi/2$ (а), $\varphi = \pi$ (б), $\varphi = 0$ (в).

Далее мы рассматриваем данные случаи для состояний кота Шредингера и исследуем статистические свойства фотонов в них. Среднее число фотонов дается выражением

$$\langle a_q^\dagger a_q \rangle_q = |z| \frac{I_{2k}^q(2|z|) - \cos \varphi J_{2k}^q(2|z|)}{I_{2k-1}^q(2|z|) + \cos \varphi J_{2k-1}^q(2|z|)}, \quad (25)$$

а дисперсия распределения фотонов имеет вид

$$\begin{aligned} & \langle a_q^\dagger a_q a_q^\dagger a_q \rangle_q - \langle a_q^\dagger a_q \rangle_q^2 = \\ & = |z|^2 \frac{I_{2k+1}^q(2|z|) + \cos \varphi J_{2k+1}^q(2|z|)}{I_{2k-1}^q(2|z|) + \cos \varphi J_{2k-1}^q(2|z|)} + |z| \frac{I_{2k}^q(2|z|) - \cos \varphi J_{2k}^q(2|z|)}{I_{2k-1}^q(2|z|) + \cos \varphi J_{2k-1}^q(2|z|)} - \\ & - \left[|z| \frac{I_{2k}^q(2|z|) - \cos \varphi J_{2k}^q(2|z|)}{I_{2k-1}^q(2|z|) + \cos \varphi J_{2k-1}^q(2|z|)} \right]^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Тогда согласно формуле (15) параметр Манделя Q записывается как

$$Q = |z| \left[q \frac{I_{2k+1}^q(2|z|) + \cos \varphi J_{2k+1}^q(2|z|)}{I_{2k}^q(2|z|) - \cos \varphi J_{2k}^q(2|z|)} - \frac{I_{2k}^q(2|z|) - \cos \varphi J_{2k}^q(2|z|)}{I_{2k-1}^q(2|z|) + \cos \varphi J_{2k-1}^q(2|z|)} \right]. \quad (27)$$

Поведение параметра Манделя Q определяется параметрами q , k , и $|z|$. В случае $\varphi = \pi/2$ получаем, что параметр Манделя так же, как и в случае q -деформированных $su(1, 1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло, удовлетворяет неравенству $Q < 0$, а статистические свойства фотонов являются субпуассоновскими, как видно на рис. 4а. Для других случаев, когда $\varphi = \pi$ и $\varphi = 0$, представленных на рис. 4б и 4в, определить характер свойств сложнее. Более того, можно заметить некоторые интересные свойства состояний кота Шредингера в пределе при $|z| \rightarrow 0$. Параметр Манделя Q достигает значения -1 при $\varphi = \pi$ и значения 0 при $\varphi = \pi/2$ независимо от значений параметров q , k (см. рис. 4а, 4б). Кроме того, в случае $\varphi = 0$ поведение параметра Манделя Q зависит от значений параметра q в пределе $|z| \rightarrow 0$ (см. рис. 4в).

Отметим, что в недеформированном случае (т. е. при $q = 1$), который соответствует случаю общих $su(1, 1)$ -состояний кота Шредингера, параметр Манделя Q имеет вид

$$Q = |z| \left[\frac{I_{2k+1}(2|z|) + \cos \varphi J_{2k+1}(2|z|)}{I_{2k}(2|z|) - \cos \varphi J_{2k}(2|z|)} - \frac{I_{2k}(2|z|) - \cos \varphi J_{2k}(2|z|)}{I_{2k-1}(2|z|) + \cos \varphi J_{2k-1}(2|z|)} \right]. \quad (28)$$

Согласно неравенствам типа Турана для функций Бесселя первого рода, доказанных в работах [22], [23], верно неравенство

$$J_v(x)^2 - J_{v+1}(x)J_{v-1}(x) > \frac{J_v(x)^2}{v+1}. \quad (29)$$

При $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$ можно легко проверить, что параметр Манделя $Q < 0$. Другими словами, статистические свойства фотонов в недеформированном случае всегда являются субпуассоновскими.

5. ВЫВОДЫ

Рассмотрены q -деформированные $su(1, 1)$ -когерентные состояния Барута–Жирарделло, а состояния кота Шредингера определены как суперпозиции q -деформированных $su(1, 1)$ -когерентных состояний Барута–Жирарделло с регулируемым углом φ в q -деформированном фоковском пространстве. Было обнаружено, что статистические свойства фотонов всегда являются субпуассоновскими. Для состояний кота Шредингера поведение параметра Манделя зависит от параметров q , φ и k , а статистические свойства фотонов всегда являются субпуассоновскими при $\varphi = \pi/2$. Кроме того, мы исследовали некоторые интересные свойства состояний кота Шредингера в пределе при $|z| \rightarrow 0$: параметр Манделя Q достигает значения -1 при $\varphi = \pi$ и значения 0 при $\varphi = \pi/2$ вне зависимости от значений параметров q , k , в то время как при $\varphi = 0$ поведение параметра Манделя зависит от значений параметров q и k . Наконец, было показано, что статистические свойства фотонов являются субпуассоновскими в недеформированном случае при $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$.

Список литературы

- [1] E. Schrödinger, “Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik”, *Naturwissenschaften*, **14**:28 (1926), 664–666.
- [2] R. J. Glauber, “The quantum theory of optical coherence”, *Phys. Rev.*, **130**:6 (1963), 2529–2539.
- [3] R. J. Glauber, “Coherent and incoherent states of radiation field”, *Phys. Rev.*, **131**:6 (1963), 2766–2788.
- [4] A. M. Perelomov, “Coherent states for arbitrary Lie group”, *Commun. Math. Phys.*, **26**:3 (1972), 222–236.
- [5] A. O. Barut, L. Girardello, “New “coherent” states associated with non-compact groups”, *Commun. Math. Phys.*, **21**:1 (1971), 41–55.
- [6] M. Arik, D. D. Coon, “Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states”, *J. Math. Phys.*, **17**:4 (1976), 524–527.
- [7] M. Chaichian, P. P. Kulish, “Quantum Lie superalgebras and q -oscillators”, *Phys. Lett. B*, **234**:1–2 (1990), 72–80.
- [8] A. J. Macfarlane, “On q -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)_q$ ”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**:21 (1989), 4581–4588.
- [9] L. C. Biedenharn, “The quantum group $SU_q(2)$ and a q -analogue of the boson operators”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**:18 (1989), L873–L878.
- [10] C. P. Sun, H. C. Fu, “The q -deformed boson realisation of the quantum group $SU(n)_q$ and its representations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**:21 (1989), L983–L986.
- [11] P. P. Kulish, E. V. Damaskinsky, “On the q oscillator and the quantum algebra $su_q(1, 1)$ ”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23**:9 (1990), L415–L419.
- [12] K. Berrada, M. El Baz, Y. Hassoumi, “On the construction of generalized $SU(1, 1)$ coherent states”, *Rep. Math. Phys.*, **23–25**:1 (2011).
- [13] E. Schrödinger, “Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik”, *Naturwissenschaften*, **23**:50 (1935), 844–849.
- [14] C. C. Gerry, R. Grobe, “Two-mode $SU(2)$ and $SU(1, 1)$ Schrödinger cat states”, *J. Modern Optics*, **44**:1 (1997), 41–53.
- [15] C. C. Gerry, R. Grobe, “Generation and properties of collective atomic Schrödinger-cat states”, *Phys. Rev. A*, **56**:3 (1997), 2390–2396.
- [16] S. Dey, “ q -Deformed noncommutative cat states and their nonclassical properties”, *Phys. Rev. D*, **91**:4 (2015), 044024, 9 pp.
- [17] A. M. Perelomov, “On the completeness of some subsystems of q -deformed coherent states”, *Helv. Phys. Acta*, **68**:6 (1995), 554–576.
- [18] J. Katriel, A. I. Solomon, “Generalized q -bosons and their squeezed states”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24**:9 (1991), 2093–2105.
- [19] L. Mandel, “Sub-Poissonian photon statistics in resonance fluorescence”, *Opt. Lett.*, **4**:7 (1979), 205–207.
- [20] L. Lorch, “Monotonicity of the zeros of a cross product of Bessel functions”, *Methods Appl. Anal.*, **1**:1 (1994), 75–80.
- [21] A. Laforgia, P. Natalini, “Some inequalities for modified Bessel functions”, *J. Inequal. Appl.*, **2010** (2010), 253035, 10 pp.
- [22] O. Szász, “Inequalities concerning ultraspherical polynomials and Bessel functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 256–267.
- [23] O. Szász, “Identities and inequalities concerning orthogonal polynomials and Bessel functions”, *J. Analyse Math.*, **1** (1951), 116–134.