Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Маресин, Конформные системы отсчета для лоренцевых многообразий, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 2, 243–253

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 11:44:56

© 2017 г.

И. В. Маресин*

КОНФОРМНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА ДЛЯ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Дано определение конформной системы отсчета – особого класса проекций шестимерного расслоения небесных сфер лоренцева многообразия (или пятимерного пространства твисторов) на трехмерное многообразие. Построен ее пример – конформная компактификация – для пространства Минковского. Дано инвариантное выражение 1-формы на расслоении небесных сфер, порождающей контактную структуру в пространстве твисторов, когда оно гладко. На ориентированном лоренцевом многообразии спинорное соответствие выражено через комплексную структуру на небесных сферах. Доказана теорема о проекции упомянутой 1-формы на послойно нормальное расслоение системы отсчета, следствием которой является уравнение потока времени.

Ключевые слова: лоренцевы многообразия, небесные сферы, изотропные геодезические, твисторы, контактная геометрия, линейные расслоения, спиноры, конформная геометрия, световой конус, компактификация Пенроуза.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9202>

1. ВВЕДЕНИЕ

Твисторный подход к лоренцевым многообразиям основан на описании пятимерного пространства всех светоподобных геодезических $\mathfrak{N}$. В случае пространства Минковского оно может быть вложено в комплексное проективное пространство твисторов, однако в общем (искривленном) случае канонической комплексной структуры на твисторах не существует. Тем не менее каждой точке $x \in X$ соответствует небесная сфера $\mathfrak{S}_x$, лежащая в $\mathfrak{N}$, причем $\mathfrak{N}$ наделяется естественной контактной структурой [1]. Небесная сфера $\mathfrak{S}_x$ имеет естественную конформную структуру

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-01-00117А “Комплексные задачи математической физики” и программой РАН № I.37П “Нелинейная динамика в математических и физических науках”, проект № 0014-2015-0037 “Комплексные и алгебро-геометрические методы в задачах нелинейной динамики”.

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: qq@superstructure.info

и изоморфна $\mathbb{CP}^1$. Это позволяет описать давно известное твисторное соответствие геометризованным способом, позволяющим обобщение на искривленный случай, свободное от указанного недостатка – невозможности пользоваться комплексной структурой глобально.

Введенное в настоящей статье определение конформной системы отсчета дает описание (четырёхмерного) лоренцева многообразия в терминах отображения его небесных сфер в трёхмерное многообразие. Известно, что в глобально гиперболическом случае (и в некоторых других) $\mathfrak{N}$ расслаивается над поверхностью Коши $M \subset X$. Тогда вместо сфер – подмногообразий $\mathfrak{N}$ – можно рассмотреть отображения $\mathfrak{S}_x$ в M (в неособых случаях – погружения). Вместо поверхности Коши удобно рассмотреть ее обобщение, конформную систему отсчета. Игнорируя технические сложности дифференциальной геометрии на пространстве $\mathfrak{N}$, конформную систему отсчета следует понимать как гладкое отображение из $\mathfrak{N}$, или его части, в произвольное 3-многообразие M , совместимое с контактной структурой, обладающее определенным условием невырожденности (а именно, для всякого $x \in X$ отображение $T\mathfrak{S}_x \rightarrow TM$ имеет ранг 2 на непустом открытом подмножестве $\mathfrak{S}_x$). В настоящей работе представлено уравнение потока времени, описывающее, как образ неба $\mathfrak{S}_x$ зависит от точки x и как это связано с контактной структурой и отношением причинности, но не с топологической точки зрения, а с дифференциальной. При этом показано, что голоморфные сечения линейного расслоения над небесной сферой пригодны для построения спинорного соответствия и “расслоение размера” (с представлением веса $(1/2, 1/2)$ группы $SL(2, \mathbb{C})$) является естественной областью значения контактной формы на пространстве твисторов.

2. РАССЛОЕНИЕ НЕБЕСНЫХ СФЕР

2.1. Предварительные сведения. В данном пункте излагаются известные факты о лоренцевых многообразиях, под которыми обычно понимаются псевдоримановы многообразия сигнатуры $(1, 3)$, т. е. $(+ - - -)^1$. Настоящая работа требует дополнительной структуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Лоренцево многообразие* – псевдориманово четырёхмерное многообразие с метрикой g сигнатуры $(+ - - -)$ и заданным в каждой точке $x \in X$ направлением времени (т. е. одна из двух компонент связности конуса $\{v \in T_x X \mid g(v) > 0\}$ выбрана как “хронологическое будущее”), причем непрерывным образом.

В работе [1] многообразие X , удовлетворяющее этому определению, называется *пространством-временем*. Все многообразия будут предполагаться гладкими (C^∞).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для каждого $x \in X$ граница его конуса “хронологического будущего” в $T_x X$ называется *световым конусом будущего* и обозначается C_x^+ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Небесная сфера* $\mathfrak{S}_x$ является базой конуса C_x^+ в $T_x X$, а ее точки обозначаются Pv , где $v \in C_x^+ \setminus \{0\}$. Объединение небесных сфер по всем точкам X образует локально тривиальное гладкое расслоение над X , обозначаемое через $\mathfrak{S}X$, с функцией проекции $\chi: \mathfrak{S}X \rightarrow X$.

¹⁾ Многие авторы используют метрику $(- + + +)$. Разница может влиять на алгебраические аспекты теории, но геометрия остается такой же.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Точки небесной сферы понимаются как светоподобные *направления* (1-подпространства) в $T_x X$, а P – как *проективизация* $v \mapsto \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Обозначим через $T_v \mathfrak{S}X$ объединение касательных расслоений $T\mathfrak{S}_x$ по всем $x \in X$, иными словами вертикальное подрасслоение $\ker dx$ в $T(\mathfrak{S}X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Геодезический поток FX – поле 1-подпространств в касательном расслоении $T(\mathfrak{S}X)$ тотального пространства расслоения $\mathfrak{S}X$, задаваемое уравнениями $dx \parallel v$ (приращение по x коллинеарно v), $\nabla v = 0$, где $v \in \mathcal{C}_x^+ \setminus \{0\}$ – вектор, представляющий точку небесной сферы, а ∇ – связность Леви-Чивиты.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Интегрирование потока FX дает “световое” слоение тотального пространства $\mathfrak{S}X$, листами которого являются изотропные (светоподобные) геодезические на X , максимально продолженные в обе стороны времени и поднятые на $\mathfrak{S}X$ отображением P касательных векторов на небесные сферы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Отношение эквивалентности $[(x_1, Pv_1)] = [(x_2, Pv_2)]$ на точках тотального пространства $\mathfrak{S}X$ – свойство изотропных векторов $v_1 \in \mathcal{C}_{x_1}^+ \setminus \{0\}$ и $v_2 \in \mathcal{C}_{x_2}^+ \setminus \{0\}$ лежать на одной изотропной геодезической (т.е. на листе слоения; см. замечание 2).

Из работ [2] и [1] известно, что на $\mathfrak{N}$ – факторпространстве $\mathfrak{S}X$ по введенному выше отношению эквивалентности – имеется естественная контактная структура (когда $\mathfrak{N}$ гладко). В настоящей статье используется версия этого утверждения, приспособленная к факту, что $\mathfrak{N}$ не всегда обладает структурой многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Выберем гладким способом для каждой точки $w \in \mathfrak{S}X$ по представителю $v \in \mathcal{C}_x^+ \setminus \{0\}$, где $x := x(w)$. Тогда $\vartheta = (v \cdot dx)$ – 1-форма на тотальном пространстве $\mathfrak{S}X$.

Очевидно, данное определение 1-формы имеет смысл лишь с точностью до умножения на положительную функцию. Однако существует *глобальное* линейное расслоение с помеченной положительной стороной, значения в котором принимают инвариантно определенная форма ϑ . Это построение будет описано в п. 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. 1-форма ϑ гладка и нигде не обращается в нуль. Но ϑ обращается в нуль как FX (следует из того, что всякое лоренцево изотропное направление ортогонально себе), так и $T_v \mathfrak{S}X$ (следует из его уравнения $dx = 0$). Или иначе: пятимерное расслоение $T(\mathfrak{S}X)/FX$ обладает непрерывным полем однородных гиперплоскостей $\vartheta = 0$, содержащих $T\mathfrak{S}_x$ для всех $x \in X$, с помеченной положительной стороной.

2.2. Определение конформной системы отсчета.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Конформная система отсчета (Ω, M, j) лоренцева многообразия X задается следующим образом:

- 1) открытое подмножество $\Omega \subset \mathfrak{S}X$ такое, что всякий его слой $\Omega_x := \Omega \cap \mathfrak{S}_x$, $x \in X$ непуст;
- 2) трехмерное гладкое многообразие M ;
- 3) гладкое отображение j из Ω в M такое, что

$$(f) \quad \forall w_1, w_2 \in \Omega \quad [w_1] = [w_2] \Rightarrow j(w_1) = j(w_2)$$

(т. е. отображение постоянно на листах “светового” слоения),

$$(c) \quad \forall w \in \Omega \quad \vartheta|_w \in j^*(T_{j(w)}^*M)$$

(т. е. выделенное поле лучей, представленное формой ϑ в $T^*(\Omega)$, лежит в $j^*(T^*M)$, обратном образе кокасательного расслоения), а также

(d) производная j вдоль $T\Omega_x$ (слоев Ω) не вырождается (т. е. отображение $j_*: T_v\Omega \rightarrow TM$ имеет всюду ранг 2).

Образ Ω_x под действием j (погруженная в M поверхность) обозначим $\mathfrak{M}_x$ и назовем *образом неба*.

ПРИМЕР 1. Пусть M – поверхность Коши в глобально гиперболическом лоренцевом многообразии, X – его часть, лежащая после $M^{(2)}$, j – операция проецирования вдоль изотропных геодезических на *твисторное расслоение* ST^*M (см. [1]) с последующей проекцией на M , а Ω – неособое подмножество $\mathfrak{S}X$, на котором отображение $j_*: T_v\mathfrak{S} \rightarrow TM$ имеет ранг 2. Если всюду на X выполнено условие непустоты Ω_x , то (Ω, M, j) является конформной системой отсчета многообразия X .

2.3. Производная образов неба. Определим производную образов неба $\mathfrak{M}_x := j(\Omega_x)$ по $x \in X$. Будем считать дифференциалом отображения j гомоморфизм $dj: T\Omega \rightarrow j^*(TM)$ расслоений над Ω , из касательного расслоения к Ω в обратный образ касательного расслоения к M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. В условиях конформной системы отсчета фактор

$$N_M\Omega := j^*(TM)/dj(T_v\Omega), \quad \text{где } T_v\Omega := T_v\mathfrak{S}X|_{\Omega},$$

назовем *послойно нормальным расслоением*.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Ограничение $N_M\Omega$ на Ω_x , т. е. “слой” $N_M\Omega_x = j|_{\Omega_x}^*(TM)/dj(T\Omega_x)$, послойно нормального расслоения является поднятым на Ω_x нормальным расслоением $N\mathfrak{M}_x$ поверхности $\mathfrak{M}_x$ в M , вне самопересечений, под действием отображения $j: \Omega \rightarrow M$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Понятие нормального расслоения не требует никакой структуры сверх дифференцируемости: касательные векторы объемлющего пространства факторизуются по касательным к погружению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Для локальной тривиализации проекции $x: \Omega \rightarrow X$ (т. е. такой области $U \subset X$, что $U \times \Delta$ представляет подобласть в Ω , где Δ – стандартный круг в слоях, а x проецирует $U \times \Delta$ на U) и отображения в M , заданного как $j: U \times \Delta \rightarrow M$, производная семейства $\mathfrak{M}_x$ по $x \in X$ определяется (локально) как гомоморфизм векторных расслоений из $\Delta \times TX$ в соответствующую часть множества $N_M\Omega$:

$$d\mathfrak{M}_x := \frac{\partial j}{\partial x} \Big/ dj(T\Delta),$$

где “/” означает факторизацию (по образу $T\Delta$ под действием j). Иными словами, векторы $\frac{\partial j}{\partial x}(\xi) \in j^*(TM)$ для всех $(x, z) \in U \times \Delta$, $\xi \in T_xX$ представляют $d\mathfrak{M}_x(\xi) \in N_M\Omega$ (в той же точке (x, z)).

²⁾В более общем случае, имеющем отношение к космологии Большого взрыва (пространства Робертсона–Уокера), M может являться *конформной* границей X (см. [3], разделы 6.8 и 10).

Локальная тривиализация везде существует и, очевидно, от ее выбора значение производной $d\mathfrak{M}_x$ не зависит.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. $N\Omega := T\Omega/T_\vee\Omega$ – естественная (не зависящая от тривиализации) область определения отображения $d\mathfrak{M}_x$:

$$\begin{array}{ccc} T_\vee\Omega & \longrightarrow & dj(T_\vee\Omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T\Omega & \xrightarrow{dj} & j^*(TM) \\ \downarrow dx & \searrow p & \downarrow \\ N\Omega & \xrightarrow{d\mathfrak{M}_x} & N_M\Omega \end{array}$$

Аналогично для всего $\mathfrak{S}X$ обозначим через $N\mathfrak{S}X := x^*(TX) = T(\mathfrak{S}X)/T_\vee\mathfrak{S}X$ поднятое расслоение касательных к X векторов. Кроме того, dx – соответствующая проекция из T в N .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. В тех же условиях определим $p := dj/dj(T_\vee\Omega) : T\Omega \rightarrow N_M\Omega$ – тавтологическую проекцию $T\Omega$ на послойно нормальное расслоение.

3. ПРИМЕР: ПРОСТРАНСТВО МИНКОВСКОГО

3.1. Определение и спинорное соответствие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Алгебраическое спинорное соответствие*, или *преобразование Паули*, отображает вектор из $\mathbb{R}^4$, заданный компонентами (x^0, x^1, x^2, x^3) , в эрмитову (2×2) -матрицу³⁾:

$$x^{AA'} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Нетрудно проверить, что всякий изотропный (для метрики $\eta = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$) вектор $x \in \mathbb{R}^4$ с условием $x^0 \geq 0$ допускает выражение

$$x^{AA'} = \psi^A \bar{\psi}^{A'}, \quad \psi \in \mathbb{S}^{1,0}, \quad \text{где } \mathbb{S}^{1,0} := \mathbb{C}^2,$$

и обратно: любой элемент $\psi \in \mathbb{S}^{1,0}$ дает вектор из $\mathcal{C}^+$ указанным способом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Пространство Минковского $\mathbb{M}$ – пространство координат $\mathbb{R}^4$, снабженное указанной стандартной псевдоевклидовой метрикой.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. При этом действию группы $SO^+(1, 3)$ на $\mathbb{M}$ будет отвечать представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ на $\text{Herm}(2)$, заданное через

$$SL(2, \mathbb{C}) \ni C : x^{AA'} \longmapsto C_L^A x^{LL'} \bar{C}_{L'}^{A'}$$

(или, в матричном смысле, умножение $x^{AA'}$ на C слева и на C^* справа), т. е. тензорное произведение двух указанных двумерных представлений на пространствах $\mathbb{S}^{1,0}$ и $\mathbb{S}^{0,1}$ (см. ниже) соответственно.

³⁾Значение положительного множителя здесь несущественно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Двойственное пространство спиноров $\mathbb{S}_{1,0}^*$ есть линейное комплексное пространство, двойственное к $\mathbb{S}^{1,0}$ и снабженное представлением группы $SL(2, \mathbb{C})$ умножением вектор-строк на обратную матрицу C^{-1} справа.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Все расслоение $\mathfrak{SM}$ имеет естественную тривиализацию, возникающую из тривиализации $T\mathbb{M}$ параллельными переносами. Соответствие между проективизациями конуса $\mathcal{C}^+$ и пространства $\mathbb{S}^{1,0}$ позволяет также отождествить $\mathfrak{S}$ – базу конуса – со сферой Римана $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{PS}^{1,0}$. С другой стороны, всякому $P\psi$, $\psi \in \mathbb{S}^{1,0} \setminus \{0\}$, соответствует однородная прямая $\{\varsigma \in \mathbb{S}_{1,0}^* \mid \varsigma\psi = 0\}$, так что проективизации пространств $\mathbb{S}_{1,0}^*$ и $\mathbb{S}^{1,0}$ канонически изоморфны.

По причинам, объясняемым ниже, точки небесной сферы пространства Минковского удобно представлять как $P\varsigma$, где $\varsigma \in \mathbb{S}_{1,0}^* \setminus \{0\}$, и отождествлять при этом с комплексными однородными прямыми в $\mathbb{S}_{1,0}^*$.

3.2. Комплексные линейные расслоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Расслоение $\mathcal{O}(k, l)$, $k, l \in \mathbb{Z}$, над $\mathfrak{S}$ есть комплексное линейное расслоение, слоем которого в точке $P\varsigma$, $\varsigma \in \mathbb{S}_{1,0}^* \setminus \{0\}$, является одномерное пространство однородных комплекснозначных функций бистепени (k, l) на однородной прямой $\{\lambda\varsigma \mid \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{S}_{1,0}^*$. Под однородностью понимается следующее свойство:

$$\forall f \in \mathcal{O}(k, l)_{P\varsigma} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}: f(\lambda\varsigma) = \lambda^k \bar{\lambda}^l f(\varsigma).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Всякая однородная функция бистепени (k, l) на всем пространстве $\mathbb{S}_{1,0}^*$ задает сечение $\mathcal{O}(k, l)$ путем ограничения на комплексные однородные прямые.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В частности, $\mathcal{O}(1, 0)$ – голоморфное расслоение, причем всякое $\omega \in \mathbb{S}^{1,0}$ задает его голоморфное сечение как линейный функционал на $\mathbb{S}_{1,0}^*$. Таким образом, пространство спиноров $\mathbb{S}^{1,0} = \Gamma_{\text{hol}}(\mathcal{O}(1, 0))$ – пространство голоморфных сечений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. $\mathbb{S}^{0,1} := \overline{\mathbb{S}^{1,0}} = \Gamma_{\text{antihol}}(\mathcal{O}(0, 1))$ – комплексно-сопряженное пространство спиноров. Кроме того, ему двойственно пространство $\mathbb{S}_{0,1}^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Как видно из представления, (2×2) -матрицы Паули следует понимать как элементы тензорного произведения $\mathbb{S}^{1,0} \otimes \mathbb{S}^{0,1}$, а значит, они задают сечения расслоения $\mathcal{O}(1, 1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Под *геометрическим* спинорным соответствием $s_{\mathbb{M}}: \mathbb{M} \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}(1, 1))$ понимается то же отображение из $\mathbb{M}$ в $\mathbb{S}^{1,0} \otimes \mathbb{S}^{0,1}$, что и в алгебраическом, но его значения интерпретируются как $(1, 1)$ -однородные неголоморфные многочлены $\varsigma_A x^{AA'} \bar{\varsigma}_{A'}$ на $\mathbb{S}_{1,0}^*$ или, что то же самое, сечения $\varsigma_A \cdot x^{AA'} \cdot \bar{\varsigma}_{A'}$ неголоморфного расслоения $\mathcal{O}(1, 1) = \mathcal{O}(1, 0) \otimes \mathcal{O}(0, 1)$ над $\mathfrak{S}$.

Иное название $s_{\mathbb{M}}$ – *целестильное преобразование* (от англ. celestial transform). В дальнейшем $s_{\mathbb{M}}$ будет пониматься также как соответствующее отображение из $\mathbb{M} \times \mathfrak{S} = \mathfrak{SM}$ в тотальное пространство $\mathcal{O}(1, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Два расслоения $\mathcal{O}(1, 1)$, построенные над $\mathfrak{S}$ и $\bar{\mathfrak{S}} = \mathbb{PS}_{0,1}^*$, не различаются ничем, кроме комплексной структуры на базах (т.е. канонически изоморфны как комплексные линейные расслоения над поверхностями). Поэтому геометрическое спинорное соответствие выдерживает обмен $\mathfrak{S}$ и $\bar{\mathfrak{S}}$ местами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Подрасслоение неотрицательных функций в $\mathcal{O}(1, 1)$ обозначим $\mathcal{L}^+$. Иначе: $\mathcal{L}^+ = \{\zeta \cdot \bar{\zeta} \mid \zeta \in \mathcal{O}(1, 0)\}$. Содержащее его $\mathbb{R}$ -линейное расслоение $\mathbb{R}$ -значных $(1, 1)$ -однородных функций обозначим $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Слои $\mathcal{L}^+$ эквивалентны лучу $[0, +\infty)$ с точностью до умножения на положительные числа. Также легко видеть, что значения определенного выше отображения $s_{\mathbb{M}}$ являются на самом деле сечениями $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Естественным образом определены операции $\zeta \mapsto \zeta \cdot \bar{\zeta}$, обозначаемые $|\cdot|^2$ (квадрат модуля) и $|\cdot| : (T\mathfrak{S} = \mathcal{O}(2, 0)) \rightarrow \mathcal{L}^+$ – непрерывные отображения расслоений.

Расслоение $\mathcal{L}^+$ будет называться *расслоением размера*, а его сечения – *полями размера*. Расслоение и сечения $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ будут называться *расслоением* и *полями размера со знаком*.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Представления $SL(2, \mathbb{C})$ на перечисленных пространствах спиноров порождают (согласованное с ними) действие той же группы на небесной сфере, соответствующее накрытию

$$\{\pm 1\} \hookrightarrow SL(2, \mathbb{C}) \xrightarrow{2:1} PSL(2, \mathbb{C}) \rightarrow 1.$$

Оно сохраняет $T\mathfrak{S}$ и $\mathcal{O}(1, 0)$ как голоморфные расслоения ($\mathcal{O}(1, 1)$ и прочие – как линейные расслоения), а векторные поля и сечения $\mathcal{O}(1, 1)$ преобразуются так, как они преобразовались бы просто под действием движений сферы Римана.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Согласно определению ϑ в п. 2.1 для всякого $w \in \mathfrak{S}\mathbb{M}$, $x := x(w)$ следует выбрать $v \in \mathcal{C}_x^+ \setminus \{0\}$ – изотропное направление на $\mathbb{M}$, представляющее точку $w \in \mathfrak{S}x$. Запишем v в ковариантной форме (сделаем элементом $T^*\mathbb{M}$) через $v_{AA'} = \varsigma_A \bar{\varsigma}_{A'}$. Для каждого касательного вектора $\Xi \in T_w \mathfrak{S}\mathbb{M}$ имеем $\vartheta(\Xi) = v\xi = \varsigma_A \xi^{AA'} \bar{\varsigma}_{A'}$, $\xi := x_*(\Xi)$, откуда

$$\vartheta \propto \varsigma_A dx^{AA'} \bar{\varsigma}_{A'} : T(\mathfrak{S}\mathbb{M}) \rightarrow \mathcal{L}^{\mathbb{R}}. \quad (1)$$

Символ $\propto$ обозначает здесь равенство с точностью до умножения на положительное число.

3.3. Построение пуанкаре-инвариантной конформной системы отсчета.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Набор $(\Omega := \mathfrak{S}\mathbb{M}, M := \mathcal{L}^{\mathbb{R}}, j := s_{\mathbb{M}})$ составляет конформную систему отсчета для $\mathbb{M}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Тотальное пространство расслоения $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ представимо как $\mathfrak{S} \times \mathbb{R}$, а все $\mathfrak{M}_x$ – графики сечений $\varsigma_A \cdot x^{AA'} \cdot \bar{\varsigma}_{A'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Очевидно, отображение, переводящее небесные сферы в графики сечений, удовлетворяет условию (d) из определения конформной системы отсчета. Условие (f) выполнено в силу того, что $s_{\mathbb{M}}$ -образ сферы $\mathfrak{S}_v$, где v – изотропный вектор, касается нулевого сечения в точке сферы, соответствующей направлению Pv . Для доказательства условия (с) проще всего исследовать $w \in \mathfrak{S}_0\mathbb{M}$, что не ограничивает общности, поскольку параллельные переносы $\mathbb{M}$ соответствуют послойному сложению тотального пространства $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ (и образов неба в нем) с фиксированным гладким сечением. В силу упомянутой в п. 3.1 тривиальности $\mathfrak{S}\mathbb{M}$ имеем $T_w \mathfrak{S}\mathbb{M} = T_w \mathfrak{S}_0 \oplus T_0 \mathbb{M}$, где $T_w \mathfrak{S}_0 \subset \ker \vartheta$, причем $j_*(T_w \mathfrak{S}_0)$ состоит

из векторов, касательных к $\mathfrak{M}_0$ (нулевому сечению $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$). Выберем аналогично (1) такое $\varsigma \in \mathbb{S}_{1,0}^* \setminus \{0\}$, что $P\varsigma = w$. Прямое вычисление

$$\vartheta(\Xi) = \varsigma_A \xi^{AA'} \bar{\varsigma}_{A'} = \frac{\partial j}{\partial x} \Big|_{\varsigma} (\xi), \quad \text{где } \xi := x_*(\Xi), \quad \Xi \in T_w \mathfrak{SM},$$

показывает, что искомый образ формы $\vartheta|_w$ под действием j есть просто проекция пространства $T_{(P\varsigma,0)} \mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ на вертикальное (касательное к слоям $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$) направление. Образ формы ϑ в произвольной точке $w \in \mathfrak{SM}$, $x := x(w)$ будет отличаться проецированием вдоль касательной к графику $\varsigma_A \cdot x^{AA'} \cdot \bar{\varsigma}_{A'} = s_{\mathbb{M}} x$ вместо нулевого сечения.

Прямая интерпретация построенной системы отсчета: тотальное пространство $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ есть пространство изотропных гиперплоскостей в $\mathbb{M}$, а j -прообраз элемента из $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ задается постоянным световым направлением в $\mathfrak{S}$ и гиперплоскостью в $\mathbb{M}$. Выбрав произвольно $P\varsigma \in \mathfrak{S}$ и $\chi \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}}|_{P\varsigma}$, получим множество $x(j^{-1}(\chi))$ всех точек $\mathbb{M}$, $s_{\mathbb{M}}$ -образы небесных сфер которых проходят через χ , как гиперплоскость – решение линейного уравнения $\varsigma_A x^{AA'} \bar{\varsigma}_{A'} = \chi(\varsigma)$ на $x^{AA'}$. Из наличия естественного действия группы Пуанкаре в $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ следует, что таким способом задаются все изотропные гиперплоскости в $\mathbb{M}$.

Указанные изотропные гиперплоскости можно также понимать как световые конусы бесконечно удаленных точек, а само трехмерное тотальное пространство $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ – как часть $\mathcal{I}$ конформной компактификации $\widehat{\mathbb{M}}$ пространства Минковского⁴⁾, что сближает настоящий пример с данным в п. 2.2 и будет обосновано в п. 3.4.

3.4. Интерпретация через твисторное соответствие. Многообразие световых прямых пространства $\widehat{\mathbb{M}}$ допускает известное описание как пространство проективных твисторов (изотропных) $\mathbf{PN} \subset \mathbf{P}(\mathbb{S}_{0,1}^* \times \mathbb{S}^{1,0}) \simeq \mathbb{CP}^3$. $\mathbf{N}$ задается через $\bar{\pi}_L \omega^L + \pi_{L'} \bar{\omega}^{L'} = 0$ [6] и является гладкой вещественной гиперповерхностью в $\mathbb{S}_{0,1}^* \times \mathbb{S}^{1,0}$, а $\mathbf{PN}$ – в соответствующем комплексном проективном пространстве. Если ограничиться собственно пространством Минковского ($X := \mathbb{M}$), то $\mathfrak{N} = \mathbf{PN}_a \subset \mathbf{PN}$ (далее называемое *аффинной частью*), причем $[\mathfrak{S}_x]$ задано следующим уравнением [6]:

$$\omega^L = i x^{LL'} \pi_{L'}, \quad (2)$$

где $\mathbb{S}_{0,1}^* \ni \pi = \bar{\varsigma}$ – комплексные проективные координаты в слоях $\overline{\mathfrak{SM}}$. $\mathbf{N}_a$ же есть объединение всех решений уравнения (2) для всех $x \in \mathbb{M}$, и $\mathbf{N}_a = \mathbf{N} \setminus \{\pi = 0\}$. Гладкость отображения $[\cdot]: \mathfrak{SM} \rightarrow \mathbf{PN}_a$ очевидна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Твисторной сверткой $\tau: \mathbf{P}(\mathbb{S}_{0,1}^* \setminus \{0\} \times \mathbb{S}^{1,0}) \rightarrow \mathcal{O}(1,1)$ называется отображение, переводящее точку $P(\pi, \omega)$ в элемент тотального пространства расслоения $\mathcal{O}(1,1)$ над $\overline{\mathfrak{S}}$ (совпадающего с $\mathcal{O}(1,1)$ над $\mathfrak{S}$), заданный точкой $P\pi$ на базе и “комплексным размером” $\lambda\pi \mapsto -i|\lambda|^2 \bar{\pi}_L \omega^L$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Для корректности определения твисторной свертки требуется, чтобы указанная $(1,1)$ -однородная функция на $\{\lambda\pi\}$, зависящая от пары (π, ω) как от параметра, не менялась при умножении проективных координат на ненулевое комплексное число, что, очевидно, выполняется.

⁴⁾С конформной компактификацией $\mathbb{M}$ можно ознакомиться в [4] (гл.9) и [5]. Более общее построение конформной границы лоренцева многообразия приведено в [3] (раздел 6.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Из определений τ и $\mathbf{N}$, а также явного вида $\mathbf{N}_a$ следует, что

$$\mathbf{N}_a = \{(\pi \in \mathbb{S}_{0,1}^* \setminus \{0\}, \omega \in \mathbb{S}^{1,0}) \mid \tau(\pi, \omega) \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}}\}$$

(иначе говоря, $\mathbf{PN}_a = \tau^{-1}(\mathcal{L}^{\mathbb{R}})$). Очевидно, τ -прообраз всякого элемента $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ есть аффинная часть проективной прямой в $\mathbf{PN}$ (или плоскости в $\mathbf{N}$), но с *постоянным* $P\pi$, в отличие от задаваемых уравнением (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Введенное в п. 3.3 отображение j совпадает с композицией проекции $[\cdot]: \mathfrak{SM} \rightarrow \mathbf{PN}_a$ с твисторной сверткой τ и выводится сворачиванием выражения (2) с $-i\bar{\pi}_L$. Таким образом, каждый τ -прообраз элемента $\chi \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ задает бесконечно удаленную точку $\widehat{\mathbf{M}}$, в которой пересекаются световые прямые, составляющие изотропную гиперплоскость $x(j^{-1}(\chi))$ в $\mathbf{M}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Из выражения j через τ и того факта, что проективная прямая $\omega = 0$ есть $[\mathfrak{S}_0] \subset \mathbf{PN}_a$, получаем, аналогично предложению 1, что контактная форма на $\mathbf{PN}_a$, ограниченная на $[\mathfrak{S}_0]$, допускает выражение

$$\vartheta|_{[\mathfrak{S}_0]} = d\tau|_{\{\omega=0\}} = -i\bar{\pi}_L d\omega^L|_{\{\omega=0\}}.$$

Ввиду однородности τ выражение $d\tau$ корректно определяет отображение $T\mathbf{PN}_a|_{[\mathfrak{S}_0]} \rightarrow \mathcal{O}(1, 1)$.

Нетрудно также показать, что на всем $\mathbf{N}_a$

$$\vartheta_{\mathbf{N}_a} = -i(\bar{\pi}_L d\omega^L + \bar{\omega}^{L'} d\pi_{L'}).$$

4. УРАВНЕНИЕ ПОТОКА ВРЕМЕНИ

В общем случае лоренцева многообразия необходимо рассматривать расслоения над *разными* небесными сферами. Через $\mathcal{O}_x(1, 0)$, $\mathcal{L}_x^+$ и т. п. обозначим соответственные расслоения над небесной сферой $\mathfrak{S}_x$. Аналогично (с нижним индексом x) обозначены зависящие от x пространства спиноров.

ЗАМЕЧАНИЕ 22. Нетрудно видеть, что обратный образ $x^*(T_x X) = N\mathfrak{S}_x$ касательного пространства есть $\mathfrak{S}_x \times T_x X$, что после замены базы и слоя местами превращается в $\mathfrak{S}(T_x X)$. Причем пространство $\mathfrak{S}(T_x X)$ изоморфно изученному в разделе 3 пространству $\mathfrak{SM}$ и изоморфизм определен с точностью до действия группы Лоренца.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Обозначим через $\mathcal{L}^{\mathbb{R}} X$ объединение расслоений размера со знаком $\mathcal{L}_x^{\mathbb{R}}$ по всем $x \in X$ – гладкое линейное расслоение над $\mathfrak{S}X$. Аналогично $\mathcal{L}^+ X \subset \mathcal{L}^{\mathbb{R}} X$ – объединение расслоений размера $\mathcal{L}_x^+$ по всем $x \in X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Отображение $s: N\mathfrak{S}X \rightarrow \mathcal{L}^{\mathbb{R}} X$ определяется послойно через $s_{T_x X}: N\mathfrak{S}_x \rightarrow \mathcal{L}_x^{\mathbb{R}}$ для всех $x \in X$, где $s_{T_x X}$ идентично $s_{\mathbf{M}}$, введенному в п. 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 23. При выбранной (произвольно) ориентации на $T_x X$ корректность определения отображения $s_{T_x X}$ следует из $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантности пространства $\mathbb{S}_x^{1,0}$ и вида соответствующего представления группы в $\mathcal{O}_x(1, 1)$. Перемена ориентации на $T_x X$ переставляет $\mathfrak{S}_x$ и $\varsigma_A \in \mathbb{S}_x^{1,0}$ с $\bar{\mathfrak{S}}_x$ и $\pi_{A'} \in \mathbb{S}_x^{0,1}$ соответственно, но $\mathcal{L}_x^{\mathbb{R}}$ и отображение расслоения $N\mathfrak{S}_x$ в $\mathcal{L}_x^{\mathbb{R}}$ от этого не меняются.

Теперь мы способны заменить определение формы ϑ , данное в п. 2.1, на следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. $\vartheta := s \circ dx$ – 1-форма на тотальном пространстве $\mathfrak{S}X$ со значениями в $\mathbb{L}^{\mathbb{R}}X$, задаваемая композицией горизонтальной проекции $dx: T(\mathfrak{S}X) \rightarrow N\mathfrak{S}X$ с введенным выше отображением s .

ЗАМЕЧАНИЕ 24. “Новая” форма $\vartheta: T\Omega \rightarrow \mathbb{L}^{\mathbb{R}}X$ и $\mathbb{R}$ -значная форма, определенная в п. 2.1 с точностью до положительного множителя, совпадают как ориентированные конаправления на $\mathfrak{S}X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 25. Непосредственно из определения ϑ следует, что $s = dx_*(\vartheta)$.

ТЕОРЕМА 1. Для любой конформной системы отсчета (Ω, M, j) лоренцева многообразия X проекция p (см. п. 2.3) удовлетворяет

$$\ker p = \ker \vartheta|_{\Omega}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с определением конформной системы отсчета ядро отображения dj в $T\Omega$ трехмерно, целиком лежит в $\ker \vartheta$ и имеет нулевое пересечение с $T_v\Omega$, т. е. $\ker \vartheta|_{\Omega} = \ker dj \oplus T_v\Omega$, а над точками $x \in X$ имеет место $T_v\Omega_x = T\Omega_x$. Поскольку поднятое нормальное расслоение $N_M\Omega_x$ – область значений p над Ω_x – получается из $j|_{\Omega_x}^*(TM)$ факторизацией по образам $dj(T\Omega_x)$ небесных направлений, теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Отображение $d\mathfrak{M}_x$ (производная образов неба по x) обращает в нуль dx -проекцию $\ker \vartheta$, и только ее (см. диаграмму в определении 11).

СЛЕДСТВИЕ 2. Прямой образ 1-формы ϑ под действием отображения p корректно определен и нигде на Ω не обращается в нуль, задавая изоморфизм расслоений $\mathbb{L}^{\mathbb{R}}\Omega := \mathbb{L}^{\mathbb{R}}X|_{\Omega}$ и $N_M\Omega$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – ориентированное многообразие с конформной системой отсчета, удовлетворяющее условиям теоремы 1. Определим, опираясь на следствие 2, гомоморфизм линейных расслоений $a_{\vartheta} := p_*(\vartheta)^{-1}: \mathbb{L}^{\mathbb{R}}\Omega \rightarrow N_M\Omega$ ⁵⁾. Тогда производная (см. п. 2.3) семейства $\{\mathfrak{M}_x\} = \{j(\Omega_x)\}$ будет задаваться так называемым уравнением потока времени:

$$d_{AA'}\mathfrak{M}_x = a_{\vartheta}(\varsigma_A \cdot \pi_{A'}) \Leftrightarrow p_*(\vartheta) \cdot d_{AA'}\mathfrak{M}_x = \varsigma_A \cdot \pi_{A'},$$

где ς_A и $\pi_{A'}$ – комплексно-сопряженные друг другу базисы в $\mathbb{S}_x^{1,0}$ и $\mathbb{S}_x^{0,1}$ (или, что то же самое, координаты в $\mathbb{S}_{x,1,0}$ и $\mathbb{S}_{x,0,1}$) соответственно, в которых записано алгебраическое спинорное соответствие для дифференциала $d_{AA'}\mathfrak{M}_x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из тождества $p = d\mathfrak{M}_x \circ dx$, приведенного на диаграмме в определении 11, и определения ϑ выводим $p_*(\vartheta) = (d\mathfrak{M}_x)_*(s)$. А равенство $s\xi = \varsigma_A \cdot \xi^{AA'} \cdot \pi_{A'}$ справедливо по построению, где $\xi \in T_xX$, откуда и следует утверждение теоремы.

⁵⁾ Иначе говоря, $a_{\vartheta} = \vartheta_*(p)$ и решение уравнения $a_{\vartheta} \circ \vartheta = p$.

5. ДРУГИЕ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА

В качестве обобщения лоренцевых многообразий можно рассмотреть псевдоримановы многообразия сигнатуры $(1, d)$, т. е. один плюс и d минусов (где d – натуральное число), с заданным в каждой точке направлением времени. Содержание раздела 2 применимо к данному случаю с очевидными изменениями, касающимися размерности: небесная “сфера” становится S^{d-1} , Δ – $(d-1)$ -мерный шар, и т. д. Комплексная алгебра из раздела 3 не допускает очевидного обобщения, поскольку лишь для случая $(1, 3)$ спинорная группа изоморфна комплексной специальной линейной группе. Тем не менее пространство $\mathbb{M}^{1+d}$ допускает и конформную компактификацию, и построенную в п. 3.3 инвариантную систему отсчета, дающую возможность определить расслоение размера $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}X$ как область значений контактной формы. Теорема 1 также остается верной для любого d .

Благодарности. Автор признателен А. Г. Сергееву за помощь при подготовке работы к публикации.

Список литературы

- [1] V. Chernov, S. Nemirovski, “Legendrian links, causality, and the Low conjecture”, *Geom. Funct. Anal.*, **19**:5 (2010), 1320–1333, arXiv: 0810.5091.
- [2] C. R. LeBrun, “Twistors, ambitwistors and conformal gravity”, *Twistors in Mathematics and Physics*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **156**, eds. T. N. Bailey, R. J. Baston, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, 71–86.
- [3] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.
- [4] Р. Пенроуз, В. Риндлер, *Спиноры и пространство-время. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени*, т. 2, Мир, М., 1988.
- [5] В. С. Владимиров, А. Г. Сергеев, “О компактификации пространства Минковского и комплексном анализе в трубе будущего”, *Ann. Polon. Math.*, **46**:1 (1985), 439–454.
- [6] Р. Пенроуз, “Твисторная программа”, *Твисторы и калибровочные поля*, Мир, М., 1983, 13–24.

Поступила в редакцию 5.04.2016