Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Матушко, В. В. Соколов, Полиномиальные формы для квантовых эллиптических гамильтонианов Калоджеро–Мозера, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 1, 14–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:58:07

© 2017 г.

М. Г. Матушко*, В. В. Соколов†

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДЛЯ КВАНТОВЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ КАЛОДЖЕРО–МОЗЕРА

Высказана гипотеза о форме преобразования, которое сводит эллиптический A_N -оператор Калоджеро–Мозера к дифференциальному оператору с полиномиальными коэффициентами. Эта гипотеза проверяется для $N \leq 3$. При этом явно указываются соответствующие полиномиальные операторы.

Ключевые слова: эллиптический гамильтониан Калоджеро–Мозера, универсальная обертывающая алгебра.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9203>

1. ВВЕДЕНИЕ

Эллиптическим квантовым A_N -гамильтонианом Калоджеро–Мозера называется дифференциальный оператор

$$H_N = -\Delta + \beta(\beta - 1) \sum_{i \neq j}^{N+1} \wp(x_i - x_j), \quad (1.1)$$

где $\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, β – произвольный числовой параметр, а $\wp(x)$ – функция Вейерштрасса с инвариантами g_2, g_3 . Число независимых переменных можно свести к N , переходя к координатам

$$X = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} x_i, \quad y_i = x_i - X.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00289) и при частичной финансовой поддержке Фонда Саймонса. Работа В. В. Соколова частично поддержана Институтом Макса Планка (Бонн).

*Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия. E-mail: matushkom@mail.ru

†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия

В этих координатах оператор (1.1) имеет вид

$$H_N = -\frac{1}{N+1} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \mathcal{H}_N(y_1, \dots, y_N),$$

где

$$\mathcal{H}_N = -\frac{N}{N+1} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{1}{N+1} \sum_{i \neq j}^N \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \beta(\beta-1) \sum_{i \neq j}^{N+1} \wp(y_i - y_j). \quad (1.2)$$

В последнем слагаемом $y_{N+1} = -\sum_{i=1}^N y_i$.

В случае $N = 1$ мы имеем дело с оператором Ламе

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + 2\beta(\beta-1)\wp(2y_1). \quad (1.3)$$

Хорошо известно [1], что сопряжение $\mathcal{H}_1 \rightarrow D^{-\beta} \mathcal{H}_1 D^{\beta}$, где

$$D = \frac{\wp'(y_1)}{\wp^2(y_1)}, \quad (1.4)$$

и последующая замена переменных

$$u = \frac{1}{\wp(y_1)} \quad (1.5)$$

приводят (1.3) к полиномиальной форме (см. приложение). Оказывается, что эта полиномиальная форма P_1 может быть записана в виде

$$P_1 = \frac{1}{2} \{H, E\} + \frac{g_2}{8} \{H, F\} + \frac{g_3}{4} \{F, F\}, \quad (1.6)$$

где через $\{\cdot, \cdot\}$ обозначены антикоммутаторы дифференциальных операторов

$$H = -\left(2u \frac{\partial}{\partial u} + 2\beta\right), \quad E = \frac{\partial}{\partial u}, \quad F = -u \left(u \frac{\partial}{\partial u} + 2\beta\right).$$

Отметим, что эти операторы удовлетворяют sl_2 -коммутационным соотношениям

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H,$$

и, таким образом, P является элементом представления универсальной обертывающей алгебры Ли sl_2 .

В работе [2] результаты, аналогичные приведенным выше, были получены в случае $N = 2$.

В настоящей статье мы формулируем гипотезу о том, как выглядит обобщение формул (1.4) и (1.5) для произвольного N , проверяем эту гипотезу при $N = 3$ и приводим антикоммутаторные представления для полиномиальных форм P_2 и P_3 . Кроме того, мы находим элементы в ассоциативных алгебрах $U(gl_3)$ и $U(gl_4)$, которые обладают нетривиальными централизаторами и переходят в P_2 и P_3 при подходящем представлении алгебр дифференциальными операторами.

2. ГИПОТЕЗЫ

Рассмотрим замену переменных $(y_1, \dots, y_N) \rightarrow (u_1, \dots, u_N)$, заданную системой уравнений

$$\begin{pmatrix} \wp(y_1) & \wp'(y_1) & \dots & \wp^{(N-1)}(y_1) \\ \wp(y_2) & \wp'(y_2) & \dots & \wp^{(N-1)}(y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \wp(y_N) & \wp'(y_N) & \dots & \wp^{(N-1)}(y_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Обозначим через $D_N(y_1, \dots, y_N)$ якобиан замены (2.1).

ГИПОТЕЗА 1. *Сопряжение $\mathcal{H}_N \rightarrow D_N^{-\beta/2} \mathcal{H}_N D_N^{\beta/2}$ и последующая замена переменных (2.1) приводят оператор (1.2) к некоторой полиномиальной форме P_N .*

Для того чтобы проверить гипотезу 1, применив преобразование (2.1) к оператору $\mathcal{H}_N$, нужно выразить из (2.1) переменные y_i через переменные u_i , что представляется весьма затруднительным. Если бы полиномиальная форма P_N была известна, то, заменив в ней переменные u_i через y_i и используя стандартные формулы из теории эллиптических функций, в принципе, можно было бы убедиться, что в конечном результате получается гамильтониан (1.2).

Нетрудно проверить, что дифференциальные операторы

$$E_{ij} = y_i \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad E_{0i} = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad E_{00} = -\sum_{j=1}^N y_j \frac{\partial}{\partial y_j} + \beta(N+1), \quad E_{i0} = y_i E_{00}, \quad (2.2)$$

где $i, j = 1, \dots, N$, удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{il} E_{kj}, \quad (2.3)$$

и, стало быть, задают представление алгебры Ли gl_{N+1} и ассоциативной универсальной обертывающей алгебры $U(gl_{N+1})$. Это представление для любого β не является точным. Было бы интересно описать его ядро.

Отметим, что если $k = -\beta(N+1)$ является натуральным числом, то операторы (2.2) сохраняют пространство полиномов степени не выше k [3], [4].

Если удалить операторы E_{ii} и добавить вместо них операторы

$$\begin{aligned} H_1 &= -\sum_{j=1}^N y_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - \beta(N+1), \\ H_i &= y_{i-1} \frac{\partial}{\partial y_{i-1}} - y_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad i = 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.4)$$

то полученный набор образующих задает представление алгебр sl_{N+1} и $U(sl_{N+1})$.

ГИПОТЕЗА 2. *Оператор P_N можно записать как линейную комбинацию антикоммутаторов дифференциальных операторов E_{ij} и H_i , где $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, N$).*

В случае $N = 1$ полиномиальная форма выражается через антикоммутаторы формулой (1.6).

2.1. Рациональное вырождение. Проверим, что в случае рационального вырождения $\wp(y) \rightarrow 1/y^2$ гипотеза 1 верна для произвольного N . Легко видеть, что формула (2.1) может быть переписана как

$$\begin{pmatrix} y_1^{N-1} & y_1^{N-2} & \cdots & y_1 & 1 \\ y_2^{N-1} & y_2^{N-2} & \cdots & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{N-1}^{N-1} & y_{N-1}^{N-2} & \cdots & y_{N-1} & 1 \\ y_N^{N-1} & y_N^{N-2} & \cdots & y_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ -2! u_2 \\ \vdots \\ (-1)^{N+1} N! u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{N+1} \\ y_2^{N+1} \\ \vdots \\ y_N^{N+1} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

В этом случае

$$D_N = \prod_{i>j}^{N+1} (y_i - y_j)^2. \quad (2.6)$$

Система (2.5) решается методом Крамера,

$$u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \frac{\begin{vmatrix} y_1^{N-1} & \cdots & y_1^{N-k+1} & y_1^{N+1} & y_1^{N-k-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k-1}^{N-1} & \cdots & y_{k-1}^{N-k+1} & y_{k-1}^{N+1} & y_{k-1}^{N-k-1} & \cdots & 1 \\ y_k^{N-1} & \cdots & y_k^{N-k+1} & y_k^{N+1} & y_k^{N-k-1} & \cdots & 1 \\ y_{k+1}^{N-1} & \cdots & y_{k+1}^{N-k+1} & y_{k+1}^{N+1} & y_{k+1}^{N-k-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_N^{N-1} & \cdots & y_N^{N-k+1} & y_N^{N+1} & y_N^{N-k-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{N-1} & y_1^{N-2} & \cdots & y_1 & 1 \\ y_2^{N-1} & y_2^{N-2} & \cdots & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{N-1}^{N-1} & y_{N-1}^{N-2} & \cdots & y_{N-1} & 1 \\ y_N^{N-1} & y_N^{N-2} & \cdots & y_N & 1 \end{vmatrix}},$$

и решение выражается через полиномы Шура s_λ [5]:

$$u_k = \frac{1}{k!} s_{\underbrace{(2, 1, \dots, 1)}_k}(y_1, \dots, y_N), \quad k = 1, \dots, N.$$

Легко проверить, что

$$s_{\underbrace{(2, 1, \dots, 1)}_k}(y_1, \dots, y_N) = \sigma_{k-1} \sigma_1(y_1, \dots, y_N) - \sigma_k(y_1, \dots, y_N) = -\sigma_k(y_1, \dots, y_{N+1}),$$

где

$$\sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{1 < i_1 < \dots < i_k < m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$$

суть элементарные симметрические полиномы. В результате мы приходим к преобразованию $u_k = -(1/k!) \sigma_k(y_1, \dots, y_{N+1})$, которое отличается от найденного в работе [3] только числовым множителем $-1/k!$. Явный вид полиномиальной формы можно найти в [3]. Таким образом, в рациональном случае гипотеза 1 справедлива.

Ясно, что данная полиномиальная форма далеко не единственна. Действительно, любое полиномиальное преобразование, обратное к которому тоже полиномиально, сохраняет полиномиальность коэффициентов дифференциального оператора. Например, после перехода от элементарных симметрических многочленов к степенным суммам $p_n = \sum_i x_i^n$ рациональный оператор (1.1), сопряженный подходящей степенью функции (2.6), записывается в виде (см., например, работы [6], [7])

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \sum_{k, n \geq 1} knp_{n+k-2} \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial p_n} + (1 - \beta) \sum_{n > 1} n(n-1)p_{n-2} \frac{\partial}{\partial p_n} + \\ & + \beta \sum_{n, k \geq 0} (k+n+2)p_k p_n \frac{\partial}{\partial p_{k+n+2}}. \end{aligned}$$

В этой формуле p_n и $\partial/\partial p_n$ заменяются нулями при $n > N+1$.

3. АНТИКОММУТАТОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФОРМ

3.1. Случай $N = 2$. Согласно (1.2) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 = & -\frac{2}{3} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \right) + \\ & + 2\beta(\beta-1)(\wp(y_1 - y_2) + \wp(2y_1 + y_2) + \wp(y_1 + 2y_2)). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Преобразование (2.1) записывается в виде

$$u_1 = \frac{\wp'(y_2) - \wp'(y_1)}{\wp(y_1)\wp'(y_2) - \wp(y_2)\wp'(y_1)}, \quad u_2 = \frac{\wp(y_1) - \wp(y_2)}{\wp(y_1)\wp'(y_2) - \wp(y_2)\wp'(y_1)}. \quad (3.2)$$

Обозначим через $D_2(y_1, y_2)$ якобиан этого преобразования. Можно проверить, что после сопряжения $\mathcal{H}_2 \rightarrow D_2^{-\beta/2} \mathcal{H}_2 D_2^{\beta/2}$ и замены (2.1) коэффициенты полученного оператора P_2 являются полиномами (см. приложение). Прямые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} P_2 = & \frac{1}{12} (12\{H_1, E_{01}\} + 12\{H_2, E_{01}\} - 12\{E_{02}, E_{21}\} - \{E_{12}, E_{12}\} + \\ & + 2g_2\{H_1, E_{10}\} + g_2\{H_2, E_{10}\} - g_2\{E_{12}, E_{20}\} - 12g_2\{E_{21}, E_{21}\} + \\ & + 3g_3\{E_{10}, E_{10}\} + 36g_3\{E_{20}, E_{21}\} - g_2^2\{E_{20}, E_{20}\}), \end{aligned}$$

где операторы E_{ij} и H_i определены формулами (2.2), (2.4).

Формулы, приведенные выше, фактически совпадают с формулами из работы [2]. Новым является только антикоммутаторное представление для P_2 .

3.2. Случай $N = 3$. Сначала мы находим полиномиальную форму P_3 методом неопределенных коэффициентов, предполагая, что она является линейной комбинацией антикоммутаторов операторов (2.2), (2.4). Приравнивая в соотношении $\mathcal{H}_3 = D_3^{\beta/2} P_3 D_3^{-\beta/2}$ коэффициенты при производных и разлагая полученные соотношения в ряды по $y_1, \dots, y_3$, определяем неизвестные постоянные в линейной

комбинации антикоммутаторов. В результате получаем

$$\begin{aligned}
P_3 = & \frac{1}{48} \left((72\{H_1, E_{01}\} + \{H_1, E_{13}\} + 96\{H_2, E_{01}\} - \{H_2, E_{13}\} - 6\{H_3, E_{13}\} + \right. \\
& + 24\{E_{02}, E_{21}\} - 144\{E_{02}, E_{32}\} - 3\{E_{03}, E_{10}\} - \{E_{03}, E_{31}\} - \\
& - 6\{E_{12}, E_{12}\} - \{E_{12}, E_{23}\} - 2\{E_{23}, E_{23}\}) + \\
& + g_2(10\{H_1, E_{10}\} - 24\{H_1, E_{31}\} + 8\{H_2, E_{10}\} + 24\{H_2, E_{31}\} - \\
& - 48\{H_3, E_{31}\} - 24\{E_{01}, E_{30}\} + 2\{E_{12}, E_{20}\} - 10\{E_{13}, E_{30}\} - \\
& - 48\{E_{21}, E_{21}\} - 72\{E_{21}, E_{32}\} - 72\{E_{32}, E_{32}\}) + \\
& + g_3(72\{H_1, E_{30}\} + 72\{H_3, E_{30}\} + 12\{E_{10}, E_{10}\} - 144\{E_{10}, E_{31}\} + \\
& + 144\{E_{20}, E_{21}\} + 144\{E_{20}, E_{32}\} + 864\{E_{31}, E_{31}\}) + \\
& \left. + g_2^2(8\{E_{10}, E_{30}\} - 4\{E_{20}, E_{20}\} - 96\{E_{30}, E_{31}\}) + 72g_2g_3\{E_{30}, E_{30}\} \right).
\end{aligned}$$

Для доказательства равенства $\mathcal{H}_3 = D_3^{-\beta/2} P_3 D_3^{\beta/2}$ мы записываем все коэффициенты левой и правой части в каноническом виде с помощью теорем сложения:

$$\begin{aligned}
& k_1\wp'(y_1)\wp'(y_2)\wp'(y_3) + k_2\wp'(y_1)\wp'(y_2) + k_3\wp'(y_1)\wp'(y_3) + k_4\wp'(y_2)\wp'(y_3) + \\
& + k_5\wp'(y_1) + k_6\wp'(y_2) + k_7\wp'(y_3) + k_8,
\end{aligned}$$

где k_i – рациональные функции переменных $\wp(y_1)$, $\wp(y_2)$, $\wp(y_3)$. После этого указанное равенство становится тождеством. Явный вид коэффициентов оператора P_3 приведен в приложении.

4. КОММУТАТИВНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ В $U(gl_3)$ И $U(gl_4)$

Рассмотрим универсальную обертывающую алгебру $U(gl_3)$, порожденную элементами e_{ij} и соотношениями $e_{ij}e_{kl} - e_{kl}e_{ij} = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{il}e_{kj}$. Оказывается, что элемент

$$H = h_0 + h_1g_2 + h_2g_2^2 + h_3g_3, \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned}
h_0 &= 12e_{12}e_{11} - 12e_{32}e_{13} - 12e_{33}e_{12} - e_{23}^2, \\
h_1 &= -e_{21} + 2e_{21}e_{11} - e_{22}e_{21} - e_{31}e_{23} - 12e_{32}^2 - e_{33}e_{21}, \\
h_2 &= -e_{31}^2, \quad h_3 = 36e_{32}e_{31} + 3e_{21}^2,
\end{aligned}$$

обладает нетривиальным централизатором. Кроме подалгебры, порожденной H и элементами Казимира, он коммутирует со следующими элементами третьего порядка:

$$K = K_0 + K_1g_2 + K_2g_3, \quad L = L_0 + L_1g_2 + L_2g_3 + L_3g_2^2 + L_4g_2g_3 + L_5g_3^2 + L_6g_2^3,$$

где

$$\begin{aligned}
K_0 = & -e_{23} + 2e_{21}e_{13} - e_{23}e_{22} - 36e_{32}e_{12} + e_{33}e_{23} - e_{21}e_{13}e_{11} - e_{22}e_{21}e_{13} + e_{23}e_{11}^2 + \\
& + 2e_{23}e_{21}e_{12} - e_{23}e_{22}e_{11} + 12e_{31}e_{12}^2 - e_{31}e_{23}e_{13} - 12e_{32}e_{12}e_{11} - e_{32}e_{23}^2 - \\
& - 12e_{32}^2e_{13} + 2e_{33}e_{21}e_{13} - e_{33}e_{23}e_{11} + e_{33}e_{23}e_{22} + 12e_{33}e_{32}e_{12},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1 &= 3e_{31}e_{11} - 3e_{31}e_{22} - 2e_{32}e_{21} + e_{31}e_{21}e_{12} + e_{31}e_{22}e_{11} - e_{31}e_{22}^2 + e_{31}^2e_{13} - \\
&\quad - 2e_{32}e_{21}e_{11} + e_{32}e_{22}e_{21} - 2e_{32}e_{31}e_{23} - e_{33}e_{31}e_{11} + e_{33}e_{31}e_{22} + e_{33}e_{32}e_{21}, \\
K_2 &= 3(2e_{31}e_{21} + e_{31}e_{22}e_{21} + e_{31}^2e_{23} - e_{32}e_{21}^2 - e_{33}e_{31}e_{21}); \\
L_0 &= 2(12e_{13}e_{11} - 6e_{22}e_{13} - 6e_{33}e_{13} - 12e_{13}e_{11}^2 - 6e_{22}e_{13}e_{11} + 6e_{22}^2e_{13} + \\
&\quad + 18e_{23}e_{12}e_{11} - 18e_{23}e_{22}e_{12} + e_{23}^3 - 216e_{32}e_{12}^2 + 18e_{32}e_{23}e_{13} + \\
&\quad + 30e_{33}e_{13}e_{11} - 6e_{33}e_{22}e_{13} - 12e_{33}^2e_{13}), \\
L_1 &= -3(2e_{23}e_{21} - 36e_{31}e_{12} + 20e_{32}e_{11} - 28e_{32}e_{22} + 8e_{33}e_{32} - 4e_{23}e_{21}e_{11} + \\
&\quad + 2e_{23}e_{22}e_{21} - 12e_{31}e_{12}e_{11} - e_{31}e_{23}^2 + 8e_{32}e_{11}^2 + 36e_{32}e_{21}e_{12} + \\
&\quad + 4e_{32}e_{22}e_{11} - 4e_{32}e_{22}^2 - 24e_{32}e_{31}e_{13} - 12e_{32}^2e_{23} + 2e_{33}e_{23}e_{21} + \\
&\quad + 12e_{33}e_{31}e_{12} - 20e_{33}e_{32}e_{11} + 4e_{33}e_{32}e_{22} + 8e_{33}^2e_{32}), \\
L_2 &= -18(4e_{31}e_{11} - 2e_{31}e_{22} - 2e_{33}e_{31} - e_{23}e_{21}^2 - 2e_{31}e_{11}^2 - 6e_{31}e_{21}e_{12} + \\
&\quad + 2e_{31}e_{22}e_{11} - 2e_{31}e_{22}^2 + 6e_{31}^2e_{13} + 6e_{32}e_{22}e_{21} + 24e_{32}^3 + \\
&\quad + 2e_{33}e_{31}e_{11} + 2e_{33}e_{31}e_{22} - 6e_{33}e_{32}e_{21} - 2e_{33}^2e_{31}), \\
L_3 &= -3(2e_{31}e_{21} - 2e_{31}e_{21}e_{11} + e_{31}e_{22}e_{21} + e_{31}^2e_{23} - 24e_{32}^2e_{31} + e_{33}e_{31}e_{21}), \\
L_4 &= 9(e_{31}e_{21}^2 - 12e_{32}e_{31}^2), \quad L_5 = 108e_{31}^3, \quad L_6 = -2e_{31}^3.
\end{aligned}$$

Можно проверить, что элементы K и L коммутируют между собой и что нетривиальных элементов порядка 4, коммутирующих с H , не существует.

Отметим, что при представлении алгебры $U(gl_3)$ матрицами из Mat_3 элементы H , K и L переходят в нулевую матрицу.

Различные представления алгебры $U(gl_3)$ дифференциальными, разностными и q -разностными операторами приводят к парам коммутирующих операторов. Однородные коммутирующие дифференциальные операторы с тремя независимыми переменными возникают, например, из представления алгебры $U(gl_3)$ операторами

$$E_{ij} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

(см. раздел 5). Такое представление имеет ядро, которому, в частности, принадлежит K .

Можно проверить, что H , K и L принадлежат подалгебре в $U(gl_3)$, порожденной элементами

$$e_{ij}, \quad i \neq j, \quad h_1 = \frac{1}{3}(e_{22} + e_{33} - 2e_{11}), \quad h_2 = e_{11} - e_{22}.$$

Оказывается, что при представлении $e_{ij} \rightarrow E_{ij}$, $h_i \rightarrow H_i$ операторами (2.2), (2.4) элемент H переходит (с точностью до числового множителя) в полиномиальную форму (3.2), элемент L – в полиномиальную форму оператора третьего порядка, коммутирующего с (3.1), а элемент K – в ноль. Интересно отметить, что константа связи β , фигурирующая в (1.1) и в коэффициентах полиномиальной формы P_2 (см. приложение), отсутствует в коэффициентах элемента H , но является параметром представления (2.2), (2.4).

Рассмотрим теперь случай $N = 3$. Оказывается, что P_3 из п. 3.2, как элемент алгебры $U(gl_4)$, не коммутирует с нетривиальными элементами третьего порядка. Однако к нему можно добавить элемент ядра представления алгебры $U(gl_4)$ операторами (2.2), (2.4). Из-за наличия этого ядра общий элемент из $U(gl_4)$, переходящий в дифференциальный оператор P_3 , содержит около двадцати произвольных постоянных, и задача состоит в том, чтобы найти значения постоянных, при которых этот элемент обладает нетривиальным централизатором в $U(gl_4)$.

После тяжелых нетривиальных вычислений находим, что элемент

$$H = h_0 + h_1 g_2 + h_2 g_3 + h_3 g_2^2 + h_4 g_2 g_3, \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} h_0 &= 36e_{12}e_{11} + 12e_{22}e_{12} - 3e_{23}^2 - e_{24}e_{11} - e_{24}e_{22} - 24e_{32}e_{13} - 12e_{33}e_{12} - e_{33}e_{24} - \\ &\quad - 2e_{34}e_{23} - e_{34}^2 - 24e_{42}e_{14} - 72e_{43}e_{13} - 36e_{44}e_{12} + 3e_{44}e_{24}, \\ h_1 &= -4e_{21} + 5e_{21}e_{11} - e_{22}e_{21} - 2e_{31}e_{23} - 24e_{32}^2 - e_{33}e_{21} - 2e_{41}e_{24} - 24e_{42}e_{11} + \\ &\quad + 24e_{42}e_{22} - 24e_{42}e_{33} - 48e_{43}e_{32} - 36e_{43}^2 - 3e_{44}e_{21} + 24e_{44}e_{42}, \\ h_2 &= 6(e_{21}^2 + 12e_{32}e_{31} + 6e_{41}e_{11} - 6e_{41}e_{22} + 6e_{41}e_{33} - \\ &\quad - 12e_{42}e_{21} + 72e_{42}^2 + 12e_{43}e_{31} - 6e_{44}e_{41}), \\ h_3 &= -2(e_{31}^2 - 2e_{41}e_{21} + 24e_{42}e_{41}), \quad h_4 = 36e_{41}^2, \end{aligned}$$

коммутирует с двумя нетривиальными элементами третьего порядка, один из которых при представлении (2.2) переходит в ноль, а другой – в дифференциальный оператор третьего порядка, коммутирующий с P_3 . Элемент H может быть записан как линейная комбинация антикоммутаторов образующих алгебры sl_4 , однако его антикоммутаторная форма отличается от приведенной в п. 3.2 на ненулевой элемент ядра представления. По-видимому, существует также элемент четвертого порядка, коммутирующий с H . К сожалению, попытка найти его методом неопределенных коэффициентов наталкивается на серьезные вычислительные трудности.

5. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ГАМИЛЬТониАНЫ

Рассмотрим представление алгебры $U(gl_{N+1})$ с помощью дифференциальных операторов $E_{ij} = x_i(\partial/\partial x_j)$. Пусть $N = 2$. Тогда элемент H , заданный формулой (4.1), переходит в дифференциальный оператор с тремя независимыми переменными, имеющий вид

$$H_2 = \sum_{i \geq j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -2g_2x_1x_2 - 3g_3x_2^2 + g_2^2x_3^2, & a_{22} &= 12g_2x_3^2, & a_{33} &= x_2^2, \\ a_{21} &= -12x_1^2 + g_2x_2^2 - 36g_3x_3^2, & a_{31} &= 2g_2x_2x_3, & a_{32} &= 24x_1x_3, \end{aligned}$$

а элемент L – в оператор

$$L_2 = \sum_{i \geq j \geq k} b_{ijk} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k},$$

где

$$\begin{aligned}
 b_{333} &= 2(x_2^3 - 12x_1x_3^2), & b_{332} &= 24x_3(x_1x_2 - g_2x_3^2), & b_{331} &= 3x_3(20x_1^2 - g_2x_2^2 + 12g_3x_3^2), \\
 b_{322} &= -24x_2(x_1x_2 - g_2x_3^2), & b_{321} &= 6(4x_1^2x_2 - g_2x_2^3 + 16g_2x_1x_3^2 + 12g_3x_2x_3^2), \\
 b_{311} &= -6(4x_1^3 - 2g_2x_1x_2^2 - 3g_3x_2^3 + 24g_3x_1x_3^2 + g_2^2x_2x_3^2), \\
 b_{222} &= -12x_3(36x_1^2 - g_2x_2^2 + 36g_3x_3^2), & b_{221} &= 24x_3(-5g_2x_1x_2 - 3g_3x_2^2 + 3g_2^2x_3^2), \\
 b_{211} &= -3x_3(-4g_2x_1^2 - 24g_3x_1x_2 + g_2^2x_2^2 + 36g_2g_3x_3^2), \\
 b_{111} &= x_3(36g_3x_1^2 + 6g_2^2x_1x_2 + 9g_2g_3x_2^2 - 2g_2^3x_3^2 + 108g_3^2x_3^2).
 \end{aligned}$$

Интересно отметить, что и в H_2 , и в L_2 отсутствуют слагаемые низшего порядка.

В классическом пределе эти операторы превращаются в функции

$$I_2 = \sum_{i \geq j} a_{ij} p_i p_j, \quad I_3 = \sum_{i \geq j \geq k} b_{ijk} p_i p_j p_k,$$

коммутирующие относительно стандартной скобки Пуассона. Поскольку имеется еще один тривиальный интеграл движения $I_1 = \sum x_i p_i$, квадратичный по моментам, гамильтониан I_2 интегрируем по Лиувиллю.

Аналогично, элемент (4.2) приводит к некоторому интегрируемому гамильтониану с четырьмя степенями свободы. Хотя эти гамильтонианы так или иначе должны быть связаны с классическими эллиптическими гамильтонианами Калоджеро–Мозера, они обладают рядом любопытных свойств и могут быть интересны специалистам по интегрируемым случаям в гамильтоновой механике.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Полиномиальные формы

Будем использовать обозначения $x = u_1, y = u_2, z = u_3$. Тогда полиномиальная форма P_1 имеет вид

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \left(-2x + \frac{g_2}{2}x^3 + \frac{g_3}{2}x^4 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \\
 &\quad - (2\beta + 1) \left(1 - \frac{3g_2}{4}x^2 - g_3x^3 \right) \frac{\partial}{\partial x} + \beta(2\beta + 1) \left(\frac{g_2}{2}x + g_3x^2 \right).
 \end{aligned}$$

Полиномиальная форма P_2 задается формулами

$$\begin{aligned}
 P_2 &= a_{11}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (a_{12}(x, y) + a_{21}(x, y)) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \\
 &\quad + (1 + 3\beta) \left(b_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right) + 3\beta(1 + 3\beta)c_0(x, y),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{11}(x, y) &= -2x + \frac{1}{2}g_2x^3 - 2g_2y^2 + \frac{1}{2}g_3x^4 - 6g_3xy^2 - \frac{1}{6}g_2^2x^2y^2, \\
 a_{12}(x, y) &= a_{21}(x, y) = -3y + \frac{7}{12}g_2x^2y - 3g_3y^3 + \frac{1}{2}g_3x^3y - \frac{1}{6}g_2^2xy^3, \\
 a_{22}(x, y) &= -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}g_2xy^2 + \frac{1}{2}g_3x^2y^2 - \frac{1}{6}g_2^2y^4,
 \end{aligned}$$

$$b_1(x, y) = -2 + \frac{5}{6}g_2x^2 + g_3x^3 - 6g_3y^2 - \frac{1}{3}g_2^2xy^2,$$

$$b_2(x, y) = g_2xy + g_3x^2y - \frac{1}{3}g_2^2y^3,$$

$$c_0(x, y) = \frac{1}{3}g_2x + \frac{1}{2}g_3x^2 - \frac{1}{6}g_2^2y^2.$$

Полиномиальная форма P_3 имеет вид

$$\begin{aligned} P_3 = & a_{11}(x, y, z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22}(x, y, z) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{33}(x, y, z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \\ & + (a_{12}(x, y, z) + a_{21}(x, y, z)) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (a_{13}(x, y, z) + a_{31}(x, y, z)) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \\ & + (a_{23}(x, y, z) + a_{32}(x, y, z)) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \\ & + (1 + 4\beta) \left(b_1(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + b_2(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + b_3(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z} \right) + 4\beta(1 + 4\beta)c_0(x, y, z), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}(x, y, z) = & -2x + \frac{g_2}{2}x^3 + 4g_2xz - 2g_2y^2 + 36g_3z^2 - 6g_3xy^2 + 12g_3x^2z + \frac{g_3}{2}x^4 + \\ & + 4g_2^2xz^2 - \frac{g_2^2}{6}x^2y^2 + \frac{g_2^2}{3}x^3z + 3g_2g_3x^2z^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22}(x, y, z) = & -\frac{1}{4}x^2 - 6z - 3g_2z^2 + \frac{2g_2}{3}y^2x + \frac{g_3}{2}y^2x^2 - 6g_3y^2z + \\ & + \frac{g_2^2}{3}xy^2z - \frac{g_2^2}{6}y^4 + 3g_2g_3y^2z^2, \end{aligned}$$

$$a_{33}(x, y, z) = -\frac{1}{12}y^2 + \frac{1}{3}xz + \frac{5g_2}{6}xz^2 + 6g_3z^3 + \frac{g_3}{2}x^2z^2 - \frac{g_2^2}{6}y^2z^2 + \frac{g_2^2}{3}xz^3 + 3g_2g_3z^4,$$

$$\begin{aligned} a_{12}(x, y, z) = a_{21}(x, y, z) = & -3y + \frac{7g_2}{12}x^2y - 2g_2zy + 3g_3xyz - 3g_3y^3 + \frac{g_3}{2}x^3y + \\ & + 2g_2^2yz^2 + \frac{g_2^2}{3}x^2yz - \frac{g_2^2}{6}xy^3 + 3g_2g_3xyz^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{13}(x, y, z) = a_{31}(x, y, z) = & -4z + 2g_2z^2 + \frac{2g_2}{3}x^2z + 9g_3xz^2 + \frac{g_3}{2}x^3z - 3g_3y^2z + \\ & + 2g_2^2z^3 - \frac{g_2^2}{6}xy^2z + \frac{g_2^2}{3}x^2z^2 + 3g_2g_3xz^3, \end{aligned}$$

$$a_{23}(x, y, z) = a_{32}(x, y, z) = -\frac{1}{12}xy + \frac{3g_2}{4}xyz + \frac{g_3}{2}x^2yz + \frac{g_2^2}{3}xyz^2 - \frac{g_2^2}{6}y^3z + 3g_2g_3yz^3,$$

$$\begin{aligned} b_1(x, y, z) = & -3 + \frac{11}{12}g_2x^2 + 2g_2z - 6g_3y^2 + 15g_3xz + g_3x^3 + 4g_2^2z^2 - \\ & - \frac{1}{3}g_2^2xy^2 + \frac{2}{3}g_2^2x^2z + 6g_2g_3xz^2, \end{aligned}$$

$$b_2(x, y, z) = \frac{13g_2}{12}xy - 3g_3yz + g_3x^2y + \frac{2g_2^2}{3}xyz - \frac{g_2^2}{3}y^3 + 6g_2g_3yz^2,$$

$$b_3(x, y, z) = \frac{1}{12}x + \frac{5g_2}{4}xz + 9g_3z^2 + g_3x^2z + \frac{2g_2^2}{3}xz^2 - \frac{g_2^2}{3}y^2z + 6g_2g_3z^3,$$

$$c_0(x, y, z) = \frac{5g_2}{12}x + \frac{g_3}{2}x^2 + 3g_3z - \frac{g_2^2}{6}y^2 + \frac{g_2^2}{3}xz + 3g_2g_3z^2.$$

Благодарности. Авторы благодарны А. Варченко, В. Горбунову, В. Дринфельду и А. Турбинеру за полезные обсуждения. В. В. Соколов благодарит Институт Макса Планка (Бонн) за гостеприимство.

Список литературы

- [1] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, т. 2, Физматлит, М., 1963.
- [2] V. V. Sokolov, A. V. Turbiner, “Quasi-exact-solvability of the A_2/G_2 elliptic model: algebraic form, $sl(3)/g^{(2)}$ hidden algebra, and polynomial eigenfunctions”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:15 (2015), 155201, 15 pp., arXiv: 1409.7439.
- [3] W. Rühl, A. V. Turbiner, “Exact solvability of the Calogero and Sutherland models”, *Modern Phys. Lett. A*, **10**:29 (1995), 2213–2222.
- [4] G. Post, N. van den Hijligenberg, “ $gl(\lambda)$ and differential operators preserving polynomials”, *Acta Appl. Math.*, **44**:1–2 (1996), 257–268.
- [5] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, v. 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [6] H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake, J. Shiraishi, “Collective field theory, Calogero–Sutherland model and generalized matrix models”, *Phys. Lett. B*, **347**:1 (1995), 49–55.
- [7] A. N. Sergeev, A. P. Veselov, “Dunkl operators at infinity and Calogero–Moser systems”, *Internat. Math. Res. Notices*, **2015**:21, 10959–10986, arXiv: 1311.0853.

Поступила в редакцию 5.04.2016