Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Погребков, Коммутаторные тождества на ассоциативных алгебрах, разностное неабелево уравнение Хироты и его редукции, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 3, 433–446

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9204>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:18:10

© 2016 г.

А. К. Погребков*

КОММУТАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА НА АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ, РАЗНОСТНОЕ НЕАБЕЛЕВО УРАВНЕНИЕ ХИРОТЫ И ЕГО РЕДУКЦИИ

Показано, что неабелево разностное уравнение Хироты непосредственно связано с коммутаторным тождеством на ассоциативной алгебре. Уравнения эволюции, порождаемые преобразованиями подобия элементов этой алгебры, приводят к линейному разностному уравнению. Построена специальная процедура одевания, дающая интегрируемое неабелево разностное уравнение Хироты. Предложены две регулярные процедуры редукции, приводящие к некоторым известным уравнениям, абелевым и неабелевым, равно как и к некоторым новым интегрируемым уравнениям.

Ключевые слова: интегрируемые уравнения, коммутаторные тождества, редукции.

DOI: 10.4213/tmf9204

С наилучшими пожеланиями Игорю Викторовичу Тютину

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема описания линейных дифференциальных (или разностных) уравнений, допускающих в качестве обобщения интегрируемые нелинейные уравнения, известна в течение многих десятилетий. В работе [1] было показано, что интегрируемость нелинейного уравнения непосредственно связана с вырожденностью закона дисперсии линейной дифференциальной части нелинейного уравнения. В работах [2]–[4] мы доказали, что такая вырожденность является следствием коммутаторных тождеств на ассоциативных алгебрах. Более того, мы разработали процедуру одевания коммутаторных соотношений, позволяющую вывести как пары Лакса, так и сами интегрируемые уравнения. В настоящей работе мы обобщаем этот подход на случай неабелевых нелинейных уравнений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: pogreb@mi.ras.ru

Начнем со следующего наблюдения. Пусть имеется некоторая ассоциативная неабелева алгебра и пусть $A_1, \dots, A_n, A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1}$ (здесь верхний индекс -1 пока что представляет собой просто обозначение) суть $2n$ коммутирующих элементов этой алгебры. Для произвольного элемента B алгебры положим

$$S_B(1, \dots, n) = A_1 A_2 B A_1^{-1} A_2^{-1} (A_1 - A_2) + (A_2 - A_n) A_1 B A_1^{-1} + \text{цикл}(1, \dots, n). \quad (1.1)$$

В силу коммутативности набора $A_1, \dots, A_n, A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1}$ и ассоциативности алгебры получаем, что

$$S_B(1, 2) = 0, \quad (1.2)$$

$$S_B(1, 2, 3, 4) = S_B(1, 2, 3) + S_B(1, 3, 4), \quad (1.3)$$

и аналогично для больших n . Полагая теперь, что ассоциативная алгебра содержит единичный элемент I и что A_i^{-1} — обратный элемент к A_i , получаем также, что

$$S_B(1, 2, 3) \equiv A_1 A_2 B A_1^{-1} A_2^{-1} (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) A_1 B A_1^{-1} + \text{цикл}(1, 2, 3) = 0 \quad (1.4)$$

снова для произвольного набора коммутирующих обратимых элементов A_1, A_2, A_3 и любого элемента B . Тогда в силу равенства (1.3) все $S_B(1, \dots, n)$ с $n \geq 3$ последовательно становятся равными нулю.

Фиксируем операторы A_j и B и введем зависимость B от трех дискретных переменных $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$ посредством равенства

$$B(m) \equiv B(m_1, m_2, m_3) = \left(\prod_{n=1}^3 A_n^{m_n} \right) B \left(\prod_{n=1}^3 A_n^{m_n} \right)^{-1}. \quad (1.5)$$

Ниже мы используем специальное обозначение для операций сдвига этих переменных:

$$B^{(1)}(m) = B(m_1 + 1, m_2, m_3), \quad B^{(2)}(m) = B(m_1, m_2 + 1, m_3), \quad (1.6)$$

$$B^{(-1)}(m) = B(m_1 - 1, m_2, m_3), \quad B^{(1,2)}(m) = B(m_1 + 1, m_2 + 1, m_3) \quad (1.7)$$

и т. д. Понятно, что эти операции взаимно коммутируют ввиду взаимной коммутативности операторов A_j , например, $B^{(1,2)} \equiv (B^{(1)})^{(2)} \equiv (B^{(2)})^{(1)}$. В этих терминах тождество (1.4) может быть записано в виде

$$B^{(1,2)}(A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) B^{(1)} + \text{цикл}(1, 2, 3) = 0. \quad (1.8)$$

Чтобы это соотношение можно было рассматривать как линейное разностное уравнение для функции $B(m)$ трех дискретных переменных, следует наложить условие, что все разности операторов $A_i - A_j$ суть постоянные параметры. Итак, мы полагаем

$$A_i = A - a_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.9)$$

где A , a_1 , a_2 и a_3 – взаимно коммутирующие элементы рассматриваемой алгебры. Теперь соотношения (1.5) и (1.6) дают

$$B^{(j)} = (A - a_j)B(A - a_j)^{-1}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.10)$$

а равенство (1.8) принимает вид

$$B^{(1,2)}a_{12} + a_{23}B^{(1)} + \text{цикл}(1, 2, 3) = 0, \quad (1.11)$$

где

$$a_{ij} = a_i - a_j. \quad (1.12)$$

Необходимо отметить, что когда какая-то из этих разностей обращается в ноль, уравнение (1.11) становится плохо определенным. Если, скажем, $a_1 = a_2 \neq a_3$, то уравнение решается тривиально: $B(m) = B_1(m_1, m_2) + B_2(m_1 + m_2, m_3)$, где B_1 и B_2 – произвольные функции своих аргументов. Мы видим, что задача Коши по одной из переменных m_j не определена, если совпадают два параметра. Чтобы избежать таких вырожденных ситуаций, мы полагаем, что все три параметра a_j различны, а предельные случаи рассматриваем в разделе 3.

В разделе 2 мы строим процедуру одевания, основанную на $\bar{\partial}$ -проблеме, где оператор $B(m)$ играет роль данных, удовлетворяющих уравнениям эволюции (1.10). Мы вводим оператор одевания и его уравнения эволюции, совместные по построению в силу совместности уравнений (1.10). В результате мы получаем пару Лакса и выводим нелинейное уравнение, которое оказывается неабелевым разностным уравнением Хироты. Мы показываем, что (1.11) – его линейаризованная версия. Таким образом, простое коммутаторное соотношение (1.4) дает еще один способ вывести это знаменитое уравнение [5], [6] (известное также как дискретное уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП) и обобщенная иерархия КП), являющееся предметом многочисленных публикаций. Детальный обзор этого уравнения дан в работах [7], [8] (см. также цитированную в этих статьях литературу).

Разностное уравнение Хироты и близко связанное с ним уравнение Хироты–Мивы [9] известны тем, что они порождают многие интегрируемые уравнения. Скажем, уравнения КдФ, КП, мКдФ, мКП, двумеризованная цепочка Тоды, уравнения синус–Гордон, Бенджамина–Оно и т. д. появляются как специальные (непрерывные) пределы разностного уравнения Хироты. В силу этого оно часто рассматривается как фундаментальная интегрируемая система. Ее интегрируемость рассматривалась в работах [10] и [11], где была исследована связь обратной задачи с τ -функциональным подходом, и в работах [12], [13], где некоторые решения этого уравнения были получены в терминах квазидетерминантов. В статье [14] была установлена и исследована связь этого уравнения с отображениями Дезарга. Отметим, наконец, что это классическое интегрируемое уравнение имеет непосредственное отношение к квантовым интегрируемым моделям [15].

Дифференциально-разностные и дифференциальные интегрируемые уравнения, вытекающие из уравнения Хироты, возникают лишь при сингулярных значениях параметров a_j в (1.11), т. е. когда некоторые $a_j \rightarrow \infty$ или когда некоторые из них совпадают, как указывалось выше. В разделе 3 мы предлагаем регулярную процедуру вывода этих интегрируемых уравнений из (1.11); некоторые из которых характерны для неабелева случая.

2. ПРОЦЕДУРА ОДЕВАНИЯ

2.1. Расширенные операторы. Пусть задана некоторая ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ с единицей I над полем $\mathbb{C}$. Фиксируем взаимно коммутирующие элементы $A, a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$ такие, что существуют обратные операторы $(A - a_j)^{-1}$, $j = 1, 2, 3$. Для произвольного элемента $F \in \mathcal{A}$ введем зависимость F от дискретной переменной m_1 (ср. с соотношением (1.5)):

$$F(m_1) = (A - a_1)^{m_1} F(A - a_1)^{-m_1}, \quad m_1 \in \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

Это преобразование подобия задает автоморфизм алгебры $\mathcal{A}$. Поэтому естественно рассмотреть представление данной алгебры как множества операторов, действующих в некотором векторном пространстве представления с векторами, являющимися бесконечными последовательностями $\{f(m_1)\}_{m_1 \in \mathbb{Z}}$.

Мы определим действие операторов посредством их символов $\tilde{F}(m_1, z)$ по аналогии с псевдодифференциальными операторами:

$$(Ff)(m_1, z) = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \oint_{|\zeta|=1} d\zeta \frac{\zeta^{m_1 - n_1}}{2\pi i \zeta} \tilde{F}(m_1, z\zeta) f(n_1), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2.2)$$

где символ $\tilde{F}(m, z)$ принадлежит представлению алгебры $\mathcal{A}$. Мы рассматриваем те операторы и символы, для которых суммирование и интегрирование в правой части (2.2) имеют смысл в пространстве представления по крайней мере в терминах обобщенных функций. Пусть F и G – операторы с символами $\tilde{F}(m_1, z)$ и $\tilde{G}(m_1, z)$, тогда в соответствии с (2.2) символ их произведения задается как

$$\widetilde{FG}(m_1, z) = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \oint_{|\zeta|=1} d\zeta \frac{\zeta^{m_1 - n_1}}{2\pi i \zeta} \tilde{F}(m_1, z\zeta) \tilde{G}(n_1, z). \quad (2.3)$$

Чтобы пояснить эти определения, рассмотрим для примера две (бесконечные) матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ с элементами, принадлежащими представлению алгебры $\mathcal{A}$. Пусть операторы F и G задаются символами

$$\tilde{F}(m_1, z) = \sum_{n_1} z^{n_1} \mathcal{F}_{m_1, m_1 + n_1}, \quad \tilde{G}(m_1, z) = \sum_{n_1} z^{n_1} \mathcal{G}_{m_1, m_1 + n_1}, \quad (2.4)$$

так что, скажем,

$$\mathcal{F}_{m_1, n_1} = \oint_{|z|=1} dz \frac{z^{m_1 - n_1}}{2\pi i z} \tilde{F}(m_1, z).$$

Применяя это равенство к (2.3), мы получаем стандартную формулу для умножения матриц: $(\mathcal{FG})_{m_1, n_1} = \sum_{l_1 \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_{m_1, l_1} \mathcal{G}_{l_1, n_1}$. В этом смысле введенные в (2.2) операторы задают расширение пространства (бесконечных) матриц с элементами, принадлежащими представлению алгебры $\mathcal{A}$. В общем случае нет оснований ожидать, что символы наших операторов удовлетворяют какому-либо свойству аналитичности по комплексному параметру z . Таким образом, введение данного расширения операторов делает возможным $\bar{\partial}$ -дифференцирование по переменной z : для любого оператора F с символом $\tilde{F}(m_1, z)$ мы вводим новый оператор $\bar{\partial}F$ с символом

$$(\bar{\partial}\tilde{F})(m_1, z) = \frac{\partial \tilde{F}(m_1, z)}{\partial \bar{z}}, \quad (2.5)$$

контролирующий отклонение F от аналитического оператора.

Символ единичного оператора $\tilde{I}(m, z)$ является не зависящей от z единицей представления. Пусть T_1 означает оператор с символом

$$T_1(m_1, z) = z \quad (2.6)$$

(ср. с формулой (2.4)). С учетом равенства (2.3) мы имеем

$$\widetilde{T_1 F} = z \widetilde{F^{(1)}}, \quad \widetilde{F T_1} = z \widetilde{F}, \quad (2.7)$$

где в первом равенстве мы воспользовались обозначением (1.6). Таким образом, определение (2.2) задает операторы F через “нормальное” произведение: все операторы T_1 сдвинуты направо, как это следует из (2.4).

По аналогии с (2.7) из соотношений (2.3) и (2.6) имеем, что для любого F

$$T_1 F T_1^{-1} = F^{(1)}, \quad (2.8)$$

и, учитывая определение (2.1), полагаем

$$A = T_1 + a_1. \quad (2.9)$$

В силу соотношений (2.5) и (2.6) справедливо крайне важное для дальнейших рассуждений свойство:

$$\bar{\partial} T_1 = 0. \quad (2.10)$$

В частности, вследствие равенства (2.8) имеем, что для любого оператора F

$$\bar{\partial}(T_1 F T_1^{-1}) = T_1(\bar{\partial} F) T_1^{-1}. \quad (2.11)$$

Мы называем операторы, введенные в (2.2), *расширенными*, следуя терминологии, использованной в работах [16] и [17] для дифференциальных операторов.

2.2. Старшие времена и процедура одевания. Эволюция оператора B задается уравнением (1.10). Это означает, что его символ $\tilde{B}(m_1, m_2, m_3, z)$ является функцией трех дискретных переменных и переменной $z \in \mathbb{C}$. В силу (2.9) мы имеем

$$\begin{aligned} B^{(1)} &= T_1 B T_1^{-1}, \\ B^{(2)} &= (T_1 + a_{12}) B (T_1 + a_{12})^{-1}, \\ B^{(3)} &= (T_1 + a_{13}) B (T_1 + a_{13})^{-1}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где первое равенство представляет собой стандартное свойство расширенных операторов и где было использовано обозначение (1.12).

Для получения нелинейного обобщения уравнения (1.11) введем оператор одевания K с символом $\tilde{K}(m, z) \equiv \tilde{K}(m_1, m_2, m_3, z)$ как решение следующей $\bar{\partial}$ -задачи:

$$\bar{\partial} K = K B, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{K}(m, z) = I, \quad (2.13)$$

где I – единичный оператор. В дальнейшем мы предполагаем, что эта задача однозначно разрешима. Зависимость оператора K от m задается посредством равенств

$$\bar{\partial} K^{(j)} = K^{(j)} B^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.14)$$

поэтому с учетом первого равенства в (2.12) и соотношения (2.11)

$$K^{(1)} = T_1 K T_1^{-1}, \quad (2.15)$$

как и должно быть для каждого рассматриваемого оператора.

Для описания эволюции по m_2 и m_3 следует конкретизировать условие нормировки в (2.13), введя обозначение для члена порядка $1/z$ разложения символа $\tilde{K}(m, z)$ на бесконечности:

$$\tilde{K}(m, z) = I + \frac{\tilde{u}(m)}{z_1} + \dots$$

Благодаря (2.7) последнее равенство можно записать в операторной форме:

$$K = I + u T_1^{-1} + \dots, \quad (2.16)$$

где многоточие означает члены с символами, убывающими быстрее, чем $1/z$, и где символ оператора u не зависит от z . В силу (2.2) такие операторы действуют как (неабелевы) операторы умножения: $(uf)(m, z) = \tilde{u}(m)f(m_1)$. С учетом уравнения (2.10), второго равенства в (2.12) и условия (2.14) для $j = 2$ получаем, что $\bar{\partial}(K^{(2)}(T_1 + a_{12})) = (K^{(2)}(T_1 + a_{12}))B$. Это означает, что произведение $K^{(2)}(T_1 + a_{12})$ удовлетворяет тому же $\bar{\partial}$ -уравнению (2.13), но асимптотически оно ведет себя как $K^{(2)}(T_1 + a_{12}) = T_1 + a_{12} + u^{(2)} + \dots$ убывающие в силу (2.16) члены.

Таким образом, существует оператор умножения (т.е. оператор с не зависящим от z символом) X такой, что $K^{(2)}(T_1 + a_{12}) = (T_1 + a_{12} + X)K$. Снова вследствие (2.16) неубывающая часть асимптотики $(T_1 + a_{12} + X)K$ равна $T_1 + a_{12} + X + u^{(1)}$, где мы воспользовались тем, что $T_1 u T_1^{-1} = u^{(1)}$. Итак, $X = u^{(2)} - u^{(1)}$, и мы окончательно получаем

$$K^{(2)}(T_1 + a_{12}) = (T_1 + a_{12} + u^{(2)} - u^{(1)})K. \quad (2.17)$$

Аналогично выводится формула

$$K^{(3)}(T_1 + a_{13}) = (T_1 + a_{13} + u^{(3)} - u^{(1)})K. \quad (2.18)$$

Введем теперь функцию трех дискретных и одной комплексной переменных со значениями в представлении алгебры $\mathcal{A}$:

$$\varphi(m, z) = \tilde{K}(m, z)E(m, z), \quad (2.19)$$

где

$$E(m, z) = z^{m_1}(z + a_{12})^{m_2}(z + a_{13})^{m_3}. \quad (2.20)$$

В силу соотношений (2.15), (2.17) и (2.18) эта функция удовлетворяет уравнениям

$$\varphi^{(2)} = \varphi^{(1)} + (u^{(2)} - u^{(1)} + a_{12})\varphi, \quad (2.21)$$

$$\varphi^{(3)} = \varphi^{(2)} + (u^{(3)} - u^{(2)} + a_{23})\varphi, \quad (2.22)$$

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(3)} + (u^{(1)} - u^{(3)} + a_{31})\varphi, \quad (2.23)$$

где третье уравнение приведено для симметрии (сумма уравнений равна нулю). В рамках нашего подхода потоки по m_1 , m_2 и m_3 коммутируют по построению,

и это означает, что все три уравнения совместны. Как результат совместности любых двух из них мы получаем

$$u^{(1,2)}(u^{(1)} - u^{(2)} - a_{12}) - a_{12}u^{(3)} + \text{цикл}(1, 2, 3) = 0, \quad (2.24)$$

где $u^{(1,2)}$ определено в (1.7). Пусть

$$v(m) = u(m) - m_1a_1 - m_2a_2 - m_3a_3, \quad (2.25)$$

тогда мы можем исключить a_i из уравнений (2.21)–(2.23), получив систему

$$\varphi^{(2)} = \varphi^{(1)} + (v^{(2)} - v^{(1)})\varphi, \quad (2.26)$$

$$\varphi^{(3)} = \varphi^{(2)} + (v^{(3)} - v^{(2)})\varphi, \quad (2.27)$$

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(3)} + (v^{(1)} - v^{(3)})\varphi, \quad (2.28)$$

и свести (2.24) к уравнению

$$v^{(1,2)}(v^{(1)} - v^{(2)}) + \text{цикл}(1, 2, 3) = 0, \quad (2.29)$$

которое является неабелевым разностным уравнением Хироты. При этом любые два уравнения из (2.26)–(2.28) дают его пару Лакса. Однако следует помнить, что v имеет линейное асимптотическое поведение, определяющееся равенством (2.25), где естественно ожидать, что $u(m)$ убывает.

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Во введении мы указывали, что уравнение (1.11) становится тривиальным в пределе, когда совпадают два из трех параметров a_j . Другой тип тривиальных случаев отвечает стремлению одного из этих параметров к бесконечности. Поэтому следует рассмотреть первый неисчезающий порядок соответствующего асимптотического разложения, что приводит к новым коммутаторным тождествам, а затем к другим интегрируемым уравнениям. В обоих указанных пределах мы получаем, что преобразования подобия типа (1.10) переходят в коммутаторы в алгебраическом смысле. В терминах уравнений это означает, что вместо разностного уравнения (1.11) мы приходим к дифференциально-разностным или дифференциальным уравнениям.

Более явно, рассмотрим предел $a_j \rightarrow a_i$ для некоторых $i \neq j$. Пусть

$$a_j = a_i + xb_{ij}, \quad (3.1)$$

где b_{ij} – оператор, коммутирующий с T_1 и всеми a_k , а x – числовой параметр. Тогда в пределе $x \rightarrow 0$ мы имеем

$$(A - a_j)B(A - a_j)^{-1} = (A - a_i)(B - x[b_{ij}(A - a_i)^{-1}, B])(A - a_i)^{-1} + o(x), \quad (3.2)$$

и это означает, что можно ввести непрерывную переменную (скажем, t_{ij}) посредством коммутаторного соотношения

$$\partial_{t_{ij}} B = [b_{ij}(A - a_i)^{-1}, B] \quad (3.3)$$

и записать (3.2) как

$$B^{(j)} = B^{(i)} - xB_{t_{ij}}^{(i)} + o(x). \quad (3.4)$$

Чтобы рассмотреть предел $a_k \rightarrow \infty$, подставим $a_k \rightarrow xa_k$, где x – числовой параметр, и предположим, что оператор a_k обратим. Тогда имеем

$$B^{(k)} = a_k \left(B - \frac{1}{x} B_{t_k} \right) a_k^{-1} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty, \quad (3.5)$$

где

$$B_{t_k} = [Aa_k^{-1}, B]. \quad (3.6)$$

Комбинации этих предельных процедур приводят к другим интегрируемым уравнениям. Таким способом мы получаем уравнения, которые вытекают из неабелева разностного уравнения Хироты. Поскольку эти пределы – единственные особенности уравнения (1.11), можно получить полный список таких уравнений. Каждый из рассмотренных выше предельных переходов приводит к замене одной из разностных переменных на непрерывную. Последний шаг от дифференциально-разностного уравнения (с одной дискретной переменной) к дифференциальному представляет собой подстановку e^{xD} вместо T_1 , где D – оператор дифференцирования по некоторой новой переменной, и разложение по степеням параметра x . Эти предельные процедуры можно выполнить в терминах коммутаторных соотношений и линейных уравнений относительно B с последующей процедурой одевания. Как показано ниже на примерах, такой порядок действий намного проще по сравнению с теми же предельными переходами непосредственно в самом нелинейном уравнении Хироты.

3.1. Предел $a_3 \rightarrow \infty$. Начнем со случая $k = 3$ в (3.5). Подставляя $B^{(3)}$ из выражения (3.5) в (1.8), видим, что в нулевом порядке по x возникает тривиальное равенство, а члены порядка $1/x$ дают уравнение

$$\begin{aligned} B^{(12)} a_{12} + a_3 (B^{(2)} - B^{(1)})_{t_3} + a_2 B^{(1)} - a_1 B^{(2)} + \\ + a_3 B^{(2)} a_3^{-1} a_2 - a_3 B^{(1)} a_3^{-1} a_1 + a_{12} a_3 B a_3^{-1} = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$B^{(1)} = T_1 B T_1^{-1}, \quad B^{(2)} = (T_1 + a_{12}) B (T_1 + a_{12})^{-1}, \quad B_{t_3} = [(T_1 + a_1) a_3^{-1}, B]. \quad (3.8)$$

Таким образом, теперь символ оператора B зависит от m_1, m_2, t_3 и z . Конечно, он может зависеть от других разностных переменных, однако нас здесь эта зависимость не интересует. Посредством этого оператора мы определяем оператор одевания K как решение задачи (2.13). Благодаря первым двум равенствам в (3.8) и условию (2.16) мы снова получаем (2.17). Чтобы найти эволюцию оператора одевания по t_3 , продифференцируем уравнение (2.13), что в силу третьего равенства в (3.8) дает $\bar{\partial}_1(K_{t_3} + K(T_1 + a_1) a_3^{-1}) = (K_{t_3} + K(T_1 + a_1) a_3^{-1}) B$. Это означает, что $K_{t_3} + K(T_1 + a_1) a_3^{-1}$ удовлетворяет тому же $\bar{\partial}$ -уравнению, но с другим условием нормировки.

В результате, снова принимая во внимание (2.16), мы выводим уравнение

$$K_{t_3} + K(T_1 + a_1)a_3^{-1} = a_3^{-1}(T_1 + a_3ua_3^{-1} - u^{(1)} + a_1)K. \quad (3.9)$$

Определение решения Йоста теперь модифицируется по сравнению с (2.19):

$$\varphi(m_1, m_2, t_3) = \tilde{K}(m_1, m_2, t_3, z)z^{m_1}(z + a_{12})^{m_2}e^{t_3(z+a_1)a_3^{-1}}. \quad (3.10)$$

Далее, из равенства (2.17) мы получаем уравнение (2.21), в то время как (3.10) дает второе уравнение пары Лакса:

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} &= \varphi^{(1)} + (u^{(2)} - u^{(1)} + a_{12})\varphi, \\ a_3\varphi_{t_3} &= \varphi^{(1)} + (a_3ua_3^{-1} - u^{(1)} + a_1)\varphi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Чтобы упростить это уравнение, введем оператор (ср. с (2.25))

$$v(m_1, m_2, t_3) = u(m_1, m_2, t_3) - m_1a_1 - m_2a_2 \quad (3.12)$$

и заметим, что без потери общности можно выбрать $a_3 = 1$, поскольку можно сделать масштабирование

$$v(m, t_3) \mapsto a_3^{m_1+m_2+1}v(m, t_3)a_3^{-m_1-m_2}, \quad \varphi(m, t_3) \mapsto a_3^{m_1+m_2+1}\varphi(m, t_3). \quad (3.13)$$

Тогда пара Лакса и уравнение движения принимают вид

$$\varphi^{(2)} = \varphi^{(1)} + (v^{(2)} - v^{(1)})\varphi, \quad (3.14)$$

$$\varphi_{t_3} = \varphi^{(1)} - (v^{(1)} - v)\varphi \quad (3.15)$$

и

$$(v^{(2)} - v^{(1)})_{t_3} + (v^{(1,2)} + v)(v^{(2)} - v^{(1)}) + v^{(1)2} - v^{(2)2} = 0. \quad (3.16)$$

В абелевом случае эти уравнения можно упростить.

3.2. Предел $a_2 \rightarrow \infty$. Рассмотрим предельную процедуру (3.5) для $k = 2$. Подставляя $B^{(2)}$ из (3.5) в (3.7), мы получаем в первом порядке по $1/x$ уравнение

$$\begin{aligned} (a_2Ba_2^{-1} - a_3Ba_3^{-1})^{(1)}a_1 + (a_2B_{t_2} - a_3B_{t_3})^{(1)} - \\ - a_2a_3B_{t_2}a_3^{-1} + a_3a_2B_{t_3}a_2^{-1} - a_1a_2Ba_2^{-1} + a_1a_3Ba_3^{-1} = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь

$$B^{(1)} = T_1BT_1^{-1}, \quad B_{t_2} = [(T_1 + a_1)a_2^{-1}, B], \quad B_{t_3} = [(T_1 + a_1)a_3^{-1}, B] \quad (3.18)$$

(ср. с (3.8)), где теперь символ оператора B зависит от одной дискретной переменной m_1 , двух непрерывных переменных t_2 и t_3 и одного комплексного параметра z . Такой же является зависимость символа оператора одевания K . Повторяя процедуру одевания, описанную выше, мы получаем уравнения пары Лакса:

$$K_{t_2} + K(T_1 + a_1)a_2^{-1} = a_2^{-1}(T_1 + a_2ua_2^{-1} - u^{(1)} + a_1)K, \quad (3.19)$$

$$K_{t_3} + K(T_1 + a_1)a_3^{-1} = a_3^{-1}(T_1 + a_3ua_3^{-1} - u^{(1)} + a_1)K, \quad (3.20)$$

где второе уравнение – это в точности уравнение (3.9), а первое выводится по аналогии. Теперь мы положим

$$\varphi(m_1, t_2, t_3, z) = \tilde{K}(m_1, t_2, t_3, z) z^{m_1} e^{t_2(z+a_1)a_2^{-1} + t_3(z+a_1)a_3^{-1}}. \quad (3.21)$$

Для простоты введем обозначение (ср. с (3.12))

$$v(m_1, m_2, t_3) = u(m_1, m_2, t_3) - m_1 a_1 \quad (3.22)$$

и произведем масштабирование

$$\begin{aligned} v(m, t) &\mapsto (a_2 a_3)^{(m_1+m_2+1)/2} v(m, t) (a_2 a_3)^{-(m_1+m_2)/2}, \\ \varphi(m, t, z) &\mapsto (a_2 a_3)^{(m_1+m_2+1)/2} \varphi(m, t, z). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Пусть постоянный оператор α удовлетворяет уравнению

$$\alpha^2 = a_2 a_3^{-1}, \quad (3.24)$$

тогда пара Лакса принимает вид

$$\alpha \varphi_{t_2} = \varphi^{(1)} + (\alpha v \alpha^{-1} - v^{(1)}) \varphi, \quad (3.25)$$

$$\alpha^{-1} \varphi_{t_3} = \varphi^{(1)} + (\alpha^{-1} v \alpha - v^{(1)}) \varphi, \quad (3.26)$$

а уравнение совместности есть

$$(v\alpha - \alpha v^{(1)})_{t_2} - (v\alpha^{-1} - \alpha^{-1} v^{(1)})_{t_3} + [v\alpha - \alpha v^{(1)}, v\alpha^{-1} - \alpha^{-1} v^{(1)}] = 0. \quad (3.27)$$

Интересно отметить, что это нелинейное уравнение становится линейным, если α коммутирует с v (т.е. в абелевом случае) или если α^{-1} пропорционален α с комплексным коэффициентом.

3.3. Предел $a_1 \rightarrow \infty$. Наконец, в асимптотике (3.5) при $k = 1$ мы возвращаемся к системе, симметричной по трем непрерывным временам t_j , $j = 1, 2, 3$. Предел (3.17) имеет вид

$$a_1 \partial_{t_1} (a_2 B a_2^{-1} - a_3 B a_3^{-1}) + \text{цикл}(1, 2, 3) = 0. \quad (3.28)$$

Опуская рассуждения, близкие к предыдущим, получим, что пара Лакса дается любыми двумя уравнениями системы

$$\begin{aligned} a_1 \varphi_{t_1} &= a_2 \varphi_{t_2} + (a_1 u a_1^{-1} - a_2 u a_2^{-1}) \varphi, \\ a_2 \varphi_{t_2} &= a_3 \varphi_{t_3} + (a_2 u a_2^{-1} - a_3 u a_3^{-1}) \varphi, \\ a_3 \varphi_{t_3} &= a_1 \varphi_{t_1} + (a_3 u a_3^{-1} - a_1 u a_1^{-1}) \varphi, \end{aligned} \quad (3.29)$$

а уравнение совместности имеет вид

$$a_1 (a_3 u a_3^{-1} - a_2 u a_2^{-1})_{t_1} + a_2 a_3 u a_2^{-1} a_3^{-1} (a_3 u a_3^{-1} - a_2 u a_2^{-1}) + \text{цикл}(1, 2, 3) = 0. \quad (3.30)$$

3.4. Предел $a_3 \rightarrow a_1$. Следуя соотношениям (3.1)–(3.4), положим $a_3 = a_1 + xb_3$, где x – параметр и b_3 (или b_{13} в обозначениях (3.1)) – постоянный оператор, коммутирующий с T_1 , a_1 и a_2 . Тогда в соответствии с (3.4) $B^{(3)} = B^{(1)} - xB_{t_3}^{(1)} + o(x)$ при $x \rightarrow 0$, где снова для упрощения обозначений t_{31} обозначено как t_3 (отличное от t_3 в (3.8)). Подставляя $B^{(3)}$ в (1.11), мы получаем в первом порядке по x уравнение

$$B_{t_3}^{(12)}a_{12} - a_{12}B_{t_3}^{(1)} - (B^{(12)} - B^{(11)})b_3 + b_3(B^{(2)} - B^{(1)}) = 0, \quad (3.31)$$

где

$$B^{(1)} = T_1BT_1^{-1}, \quad B^{(2)} = (T_1 + a_{12})B(T_1 + a_{12})^{-1}, \quad B_{t_3} = [b_3T_1^{-1}, B]. \quad (3.32)$$

Таким образом, символ оператора B снова зависит от двух дискретных переменных m_1 и m_2 , одной непрерывной переменной t_3 и от комплексного параметра z . Принимая во внимание равенство (3.32), следует рассмотреть $\bar{\partial}$ -производную от $K_{t_3} = [b_3T_1^{-1}, K]$, но, чтобы избежать сингулярности, мы умножим это выражение справа на T_1 . По аналогии с предыдущими рассуждениями мы с учетом (2.13) имеем

$$\bar{\partial}_1(K_{t_3}T_1 - b_3K^{(-1)} + Kb_3) = (K_{t_3}T_1 - b_3K^{(-1)} + Kb_3)B^{(-1)}$$

(см. обозначение (1.7)). Оператор $K_{t_3}T_1 - b_3K^{(-1)} + Kb_3$ стремится к u_{t_3} , в результате мы получаем $K_{t_3}T_1 - b_3K^{(-1)} + Kb_3 = u_{t_3}K^{(-1)}$, или, эквивалентно,

$$K_{t_3} + Kb_3T_1^{-1} = (u_{t_3} + b_3)K^{(-1)}T_1^{-1}. \quad (3.33)$$

В соответствии с формулами (3.32) положим

$$\varphi(m_1, m_2, t_3, z) = \tilde{K}(m_1, m_2, t_3, z)z^{m_1}(z + a_{12})^{m_2}e^{t_3b_3/z}, \quad (3.34)$$

так что пара Лакса задается уравнением (2.21) (как это следует из первого и второго равенств в (3.32)) и следствием из уравнения (3.33):

$$K^{(2)} = K^{(1)} + (u^{(2)} - u^{(1)} + a_{12})K, \quad (3.35)$$

$$K_{t_3} = (u_{t_3} + b_3)K^{(-1)}. \quad (3.36)$$

Вводя

$$v(m_1, m_2, t_3) = u(m_1, m_2, t_3) - a_1m_1 - a_2m_2 + b_3t_3, \quad (3.37)$$

получаем окончательно

$$\varphi^{(2)} = \varphi^{(1)} + (v^{(2)} - v^{(1)})\varphi, \quad (3.38)$$

$$\varphi_{t_3} = v_{t_3}\varphi^{(-1)}. \quad (3.39)$$

Нелинейное уравнение есть условие совместности этих уравнений:

$$(v^{(2)} - v^{(1)})^{(1)}v_{t_3}^{(1)} - v_{t_3}^{(12)}(v^{(2)} - v^{(1)}) = 0. \quad (3.40)$$

3.5. Предел $a_2 \rightarrow a_1$. Положим $a_2 = a_1 + xb_2$, где b_2 – оператор, коммутирующий с T_1 , a_1 , b_3 , а $b_2 \neq b_3$, и рассмотрим предел $x \rightarrow 0$ так же, как в п. 3.4. В первом порядке по x получаем из (3.31) уравнение

$$(B^{(1)}b_3 - b_3B)_{t_2} = (B^{(1)}b_2 - b_2B)_{t_3}, \quad (3.41)$$

где производная по t_3 определена в (3.32), и аналогично

$$B_{t_2} = [b_2T_1^{-1}, B]. \quad (3.42)$$

Опуская детали, приведем пару Лакса

$$\varphi_{t_2} = v_{t_2}\varphi^{(-1)}, \quad \varphi_{t_3} = v_{t_3}\varphi^{(-1)} \quad (3.43)$$

и результирующее нелинейное уравнение

$$v_{t_2}^{(1)}v_{t_3} = v_{t_3}^{(1)}v_{t_2}, \quad (3.44)$$

где

$$v(m_1, t_2, t_3) = u(m_1, t_2, t_3) - a_1m_1 + b_2t_2 + b_3t_3. \quad (3.45)$$

3.6. Последовательные пределы $a_3 \rightarrow \infty$ и $a_2 \rightarrow a_1$. Неабелева цепочка Тоды. Мы уже отмечали, что можно комбинировать предельные процедуры (3.5) и (3.3), чтобы вывести другие интегрируемые уравнения. В качестве примера рассмотрим два последовательных предела $a_3 \rightarrow \infty$ и $a_2 \rightarrow a_1$.

Начнем с (3.7) и положим $a_2 = a_1 + xb_2$, где b_2 – некоторый постоянный оператор. Тогда с учетом соотношений (3.1)–(3.4) и (3.42) мы получаем зависимость от t_2 ,

$$B^{(2)} = B^{(1)} - xB_{t_2}^{(1)} + o(x), \quad x \rightarrow 0. \quad (3.46)$$

Следовательно,

$$B^{(1)} = T_1BT_1^{-1}, \quad B_{t_2} = [b_2T_1^{-1}, B], \quad B_{t_3} = [(T_1 + a_1)a_3^{-1}, B]. \quad (3.47)$$

При подстановке формулы (3.46) нулевой по x порядок равенства (3.7) оказывается тривиальным, а в первом порядке мы получаем уравнение

$$B^{(1)}b_2 + a_3B_{t_2t_3} - b_2B - a_1B_{t_2} + a_3B_{t_2}a_3^{-1}a_1 - a_3Ba_3^{-1}b_2 + b_2a_3B^{(-1)}a_3^{-1} = 0. \quad (3.48)$$

Тем же способом, что и выше, мы выводим уравнения для оператора одевания:

$$\begin{aligned} K^{(1)} &= T_1KT_1^{-1}, \\ K_{t_2} + Kb_2T_1^{-1} &= (u_{t_2} + b_2)K^{(-1)}T_1^{-1}, \\ K_{t_3} + K(T_1 + a_1)a_3^{-1} &= a_3^{-1}(T_1 + a_3ua_3^{-1} - u^{(1)} + a_1)K, \end{aligned} \quad (3.49)$$

где последнее уравнение есть в точности (3.9). Теперь введем

$$v(m_1, t_2, t_3) = u(m_1, t_2, t_3) - m_1a_1 + b_2t_2, \quad (3.50)$$

$$\varphi(m_1, t_2, t_3, z) = \tilde{K}(m_1, t_2, t_3, z)z^{m_1}e^{t_2b_2z^{-1} + t_3(z+a_1)a_3^{-1}} \quad (3.51)$$

и, используя (3.49), получим пару Лакса

$$\varphi_{t_2} = v_{t_2} \varphi^{(-1)}, \quad \varphi_{t_3} = a_3^{-1} \varphi^{(1)} - (a_3^{-1} v^{(1)} - v a_3^{-1}) \varphi. \quad (3.52)$$

Видно, что без потери общности можно выбрать

$$a_1 = 0, \quad b_2 = a_3 = 1, \quad (3.53)$$

что упрощает пару Лакса до

$$\varphi_{t_2} = v_{t_2} \varphi^{(-1)}, \quad \varphi_{t_3} = \varphi^{(1)} - (v^{(1)} - v) \varphi \quad (3.54)$$

и дает нелинейное уравнение, т. е. условие совместности, в виде

$$v_{t_2 t_3} + v_{t_2} (v^{(-1)} - v) + (v^{(1)} - v) v_{t_2} = 0, \quad (3.55)$$

где в асимптотике

$$v(m_1, t_2, t_3) \sim t_2. \quad (3.56)$$

Уравнение (3.55) – это хорошо известная неабелева двумеризованная цепочка Тоды [18]. Чтобы доказать это, введем обратимый оператор $g(m_1, t_2, t_3)$ такой, что

$$v_{t_2} = g(g^{(-1)})^{-1}. \quad (3.57)$$

Подставляя этот оператор в уравнение (3.55), а затем умножая результат слева на g^{-1} и справа на $g^{(-1)}$, получаем равенство

$$g^{-1} g_{t_3} + g^{-1} (v^{(1)} - v) g = (g^{-1} g_{t_3} + g^{-1} (v^{(1)} - v) g)^{(-1)}. \quad (3.58)$$

В силу асимптотики (3.56) и формулы (3.57) можно положить, что на бесконечности $v^{(1)} \rightarrow v$, а g стремится к постоянному обратимому оператору. Тогда из (3.58) получаем равенство

$$v^{(1)} - v = -g_{t_3} g^{-1}, \quad (3.59)$$

при этом условие совместности равенств (3.57) и (3.59) дает неабелеву двумеризованную цепочку Тоды, рассмотренную в работе [18].

Список литературы

- [1] V. E. Zakharov, E. I. Schulman, *Phys. D*, **1**:2 (1980), 192–202.
- [2] А. К. Погребков, *ТМФ*, **154**:3 (2008), 477–491.
- [3] A. K. Pogrebkov, “2D Toda chain and associated commutator identity”, *Geometry, Topology, and Mathematical Physics. S. P. Novikov’s Seminar: 2006–2007*, American Mathematical Society Translations: Series 2, **224**, eds. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, AMS, Providence, RI, 2008, 261–270.
- [4] А. К. Погребков, *Алгебра и анализ*, **22**:3 (2010), 191–205.
- [5] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan*, **43**:6 (1977), 2074–2078.
- [6] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan*, **50**:11 (1981), 3785–3791.
- [7] А. В. Забродин, *ТМФ*, **113**:2 (1997), 179–230.
- [8] А. В. Забродин, *ТМФ*, **155**:1 (2008), 74–93.
- [9] T. Miwa, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **58**:1 (1982), 9–12.
- [10] L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko, *J. Math. Phys.*, **39**:9 (1998), 4683–4700.

- [11] L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko, *J. Math. Phys.*, **39**:9 (1998), 4701–4728.
- [12] J. J. C. Nimmo, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:18 (2006), 5053–5065.
- [13] C. R. Gibson, J. J. C. Nimmo, Y. Ohta, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**:19 (2007), 12607–12617.
- [14] A. Doliwa, *Phys. Lett. A*, **375**:9 (2011), 1219–1224, arXiv:1006.3380.
- [15] I. Krichever, O. Lipan, P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Commun. Math. Phys.*, **188**:2 (1997), 267–304, arXiv:hep-th/9604080.
- [16] М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, М. К. Поливанов, *ТМФ*, **93**:2 (1992), 181–210.
- [17] M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov, *J. Math. Phys.*, **35**:9 (1994), 4683–4718.
- [18] И. М. Кричевер, А. В. Забродин, *УМН*, **50**:6(306) (1995), 3–56.

Поступила в редакцию 11.04.2016