Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Зенчук, Многомерная линеаризуемая система уравнений типа n -волн, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 1, 48–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9205>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 07:37:42

© 2017 г.

А. И. Зенчук*

МНОГОМЕРНАЯ ЛИНЕАРИЗУЕМАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ТИПА n -ВОЛН

Предложена линеаризуемая версия многомерной системы уравнений в частных производных типа n -волн. Система получена с помощью спектрального представления ее решений с использованием метода, аналогичного методу одевания для нелинейных уравнений в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. Показана полная интегрируемость предложенной системы, а также построено ее частное решение.

Ключевые слова: уравнение n -волн, линеаризуемые уравнения, метод одевания, периодические решения.

DOI: 10.4213/tmf9205

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известное $(2 + 1)$ -мерное уравнение n -волн [1], [2]

$$[C^{(3)}, v_{t_2}] - [C^{(2)}, v_{t_3}] + C^{(2)}v_{t_1}C^{(3)} - C^{(3)}v_{t_1}C^{(2)} + [[C^{(3)}, v], [C^{(2)}, v]] = 0, \quad (1)$$

где $C^{(i)}$ – постоянные диагональные матрицы, интегрируемое методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [3]–[10], нашло широкое применение в математической физике. В частности, оно появляется в многомасштабных разложениях различных физических систем, где с помощью него описывается эволюция волновых пакетов. Уравнение (1) является бездиагональным $(N \times N)$ -матричным уравнением ($N \geq 3$) в частных производных первого порядка с квадратичной нелинейностью специального вида. Оно имеет $(N - 1)N/2 \geq 3$ различных производных $\sum_{i=1}^3 V_i^{(\alpha\beta)} \partial_{t_i}$ по направлению вдоль векторов $V^{(\alpha\beta)}$ с координатами

$$V_1^{(\alpha\beta)} = C_\alpha^{(2)}C_\beta^{(3)} - C_\alpha^{(3)}C_\beta^{(2)}, \quad V_2^{(\alpha\beta)} = C_\alpha^{(3)} - C_\beta^{(3)}, \quad V_3^{(\alpha\beta)} = C_\beta^{(2)} - C_\alpha^{(2)}. \quad (2)$$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 14-01-00389) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-9697.2016.2).

*Институт проблем химической физики РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия.
E-mail: zenchuk@itp.ac.ru

Однако его естественное многомерное обобщение неинтегрируемо. Пример (частично) интегрируемого многомерного обобщения уравнения (1) имеет существенно измененную структуру. Одна из версий такого обобщения, обладающая решением в виде периодически расположенных лампов, построена в работе [11].

Обсуждаемое в настоящей работе нелинейное уравнение в частных производных в покомпонентной записи имеет вид

$$\sum_{m=1}^3 Z_{\alpha\beta}^{(m)}(v_{\alpha\beta}^{(lj)})_{t_m} + \sum_{n=1}^2 T_{\alpha\beta}^{(n)}(v_{\alpha\beta}^{(lj)})_{x_n} - \sum_{k=1}^2 \sum_{\gamma=1}^N a_{\alpha\gamma\beta}^{(k)}(v_{\alpha\gamma}^{(lk)} v_{\gamma\beta}^{(0j)} - v_{\alpha\gamma}^{(l0)} v_{\gamma\beta}^{(kj)}) = 0, \quad (3)$$

где $l, j = 0, 1, 2$, $\alpha, \beta = 1, \dots, N$. Здесь $v^{(lj)}$ – $(N \times N)$ -матричные поля, а $Z_{\alpha\beta}^{(m)}$, $T_{\alpha\beta}^{(n)}$, $a_{\alpha\gamma\beta}^{(k)}$ – постоянные коэффициенты, имеющие специальный вид, заданный далее уравнениями (16)–(18). Структура уравнения (3) отличается от структуры $(2+1)$ -мерного уравнения n -волн (1). В частности, в него входят шесть матричных полей $v^{(lj)}$ вместо одного. Подобно уравнению (1) уравнение (3) имеет квадратичную нелинейность и $N(N-1)/2 \geq 3$ производных по направлению

$$\sum_{m=1}^3 Z_{\alpha\beta}^{(m)} \partial_{t_i} + \sum_{n=1}^2 T_{\alpha\beta}^{(n)} \partial_{x_n}.$$

Поскольку наше пространство независимых переменных пятимерно, существует пять независимых производных по направлению.

Хотя структура уравнения (3) и допускает формальное отождествление различных полей $v^{(ij)}$ (точнее, возможна редукция $v^{(ij)} = C^{(i)} v^{(00)} C^{(j)}$ с некоторыми постоянными диагональными матрицами $C^{(i)}$, $i = 1, 2$), такая редукция кардинально “обрезает” пространство решений, уменьшая его размерность, так что редуцированная система теряет полную интегрируемость.

Характерной особенностью уравнения (3) является то, что ее линейный предел (при $v^{(ij)} \rightarrow w^{(ij)}$) имеет вид

$$\sum_{m=1}^3 Z_{\alpha\beta}^{(m)}(w_{\alpha\beta}^{(ij)})_{t_m} + \sum_{n=1}^2 T_{\alpha\beta}^{(n)}(w_{\alpha\beta}^{(ij)})_{x_n} = 0, \quad i, j = 0, 1, 2, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, N, \quad (4)$$

одинаковый для всех i, j . Поскольку уравнение (3) линеаризуемо [12]–[14], его решения формально связаны с решениями соответствующей системы линейных уравнений в частных производных (4). В качестве вспомогательной техники при выводе этой связи используется спектральное представление решения и строится спектральная функция $\Psi(\lambda, \mu)$ двух спектральных параметров. Алгоритм построения полей $v^{(ij)}$ с помощью связанной с ними спектральной функции Ψ будем называть методом одевания по аналогии с методом одевания для уравнений, интегрируемых с помощью МОЗР [6]–[9].

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 излагается частный метод одевания, используемый далее для вывода системы нелинейных уравнений в частных производных (3). Дополнительные алгебро-дифференциальные связи, накладываемые на поля этой системы, получены в разделе 3. Пространство решений для системы (3) обсуждается в разделе 4, где приводится пример частного решения. Основные результаты обсуждаются в разделе 5.

2. МЕТОД ОДЕВАНИЯ

2.1. Вывод спектрального уравнения. Рассмотрим $(N \times N)$ -матричную функцию $R(x; \lambda, \mu)$, зависящую от двух спектральных параметров λ и μ и набора вспомогательных параметров $x = (x_1, x_2, \dots)$, которые являются независимыми переменными нелинейных уравнений в частных производных:

$$R(\lambda, \mu; x) = \exp\left(\sum_{j=1}^D s^{(j)}(\lambda)x_j + \sum_k S^{(k)}(\lambda)t_k\right) R_0(\lambda, \mu) \times \\ \times \exp\left(-\sum_{j=1}^D s^{(j)}(\mu)x_j - \sum_k S^{(k)}(\mu)t_k\right) + r(\lambda)q(\mu), \quad (5)$$

где $r(\lambda)$ и $q(\mu)$ – некоторые произвольные диагональные функции спектральных параметров, $s^{(i)}$ – независимые произвольные диагональные функции спектрального параметра, а $S^{(m)}$ – линейные комбинации функций $s^{(i)}$,

$$S^{(m)}(\lambda) = \sum_{i=1}^D A^{(mi)} s^{(i)}(\lambda), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

с постоянными диагональными матрицами $A^{(mi)}$. Матричная функция спектральных параметров R_0 в уравнении (5) такова, что оператор $R(\lambda, \mu)$ обратим. Функцию, обратную к R , будем называть спектральной функцией Ψ :

$$\int R(x, \lambda, \nu) \Psi(x; \nu, \mu) d\Omega(\nu) \equiv R * \Psi = I \delta(\lambda - \mu), \quad (7)$$

где $\Omega(\nu)$ – некоторая скалярная мера на плоскости комплексного спектрального параметра ν , I – единичная матрица размера $N \times N$. Дифференцируя функцию Ψ по x_m и учитывая ее определение (7), а также выражение (5) для R , получаем формулы

$$\Psi_{x_m}(\lambda, \mu) = -\Psi(\lambda, \mu) s^{(m)}(\mu) + s^{(m)}(\lambda) \Psi(\lambda, \mu) + \\ + (\Psi(\lambda, \nu) s^{(m)}(\nu)) * r(\nu) q(\tilde{\nu}) * \Psi(\tilde{\nu}, \mu) - \\ - \Psi(\lambda, \nu) * r(\nu) q(\tilde{\nu}) * (s^{(m)}(\tilde{\nu}) \Psi(\tilde{\nu}, \mu)), \quad m = 1, \dots, D, \quad (8)$$

$$\Psi_{t_m}(\lambda, \mu) = -\Psi(\lambda, \mu) S^{(m)}(\mu) + S^{(m)}(\lambda) \Psi(\lambda, \mu) + \\ + (\Psi(\lambda, \nu) S^{(m)}(\nu)) * r(\nu) q(\tilde{\nu}) * \Psi(\tilde{\nu}, \mu) - \\ - \Psi(\lambda, \nu) * r(\nu) q(\tilde{\nu}) * (S^{(m)}(\tilde{\nu}) \Psi(\tilde{\nu}, \mu)), \quad m = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Уравнения (8), (9) можно считать системой уравнений для спектральной функции Ψ .

2.2. Вывод системы нелинейных уравнений в частных производных (3). Применяя теперь операторы $(qs^{(i)})*$ и $*(s^{(j)}r)$, $i = 0, 1, 2$ (где $s^{(0)} = 1$), к уравнениям (8) и (9), приходим к системе нелинейных уравнений в частных производных для матричных полей

$$v^{(ij)} = (qs^{(i)}) * \Psi * (s^{(j)}r), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} v^{(in0j)} &= (qs^{(i)}s^{(n)}) * \Psi * (s^{(j)}r), & v^{(i0nj)} &= (qs^{(i)}) * \Psi * (s^{(n)}s^{(j)}r), \\ v^{(i00j)} &= v^{(i0j0)} = v^{(0i0j)} \equiv v^{(ij)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Эта система имеет следующий вид:

$$v_{x_m}^{(ij)} + v^{(i0mj)} - v^{(im0j)} - v^{(im)}v^{(0j)} + v^{(i0)}v^{(mj)} = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} v_{t_m}^{(ij)} + \sum_{k=1}^D (v^{(i0kj)}A^{(mk)} - A^{(mk)}v^{(ik0j)}) - \\ - \sum_{k=1}^D v^{(ik)}A^{(mk)}v^{(0j)} + v^{(i0)} \sum_{k=1}^D A^{(mk)}v^{(kj)} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя соответствующую комбинацию уравнений (12), (13), можно исключить поля $v^{(i0mj)}$ и $v^{(im0j)}$ и вывести систему для полей (10). Например, полагая $D = 2$, получаем (в покомпонентном виде) нелинейную систему

$$\begin{vmatrix} (e_{t_1}^{(ij)})_{\alpha\beta} & (e_{t_2}^{(ij)})_{\alpha\beta} & (e_{t_3}^{(ij)})_{\alpha\beta} & (e_{x_1}^{(ij)})_{\alpha\beta} & (e_{x_2}^{(ij)})_{\alpha\beta} \\ A_{\beta}^{(11)} & A_{\beta}^{(21)} & A_{\beta}^{(31)} & 1 & 0 \\ A_{\alpha}^{(11)} & A_{\alpha}^{(21)} & A_{\alpha}^{(31)} & 1 & 0 \\ A_{\beta}^{(12)} & A_{\beta}^{(22)} & A_{\beta}^{(32)} & 0 & 1 \\ A_{\alpha}^{(12)} & A_{\alpha}^{(22)} & A_{\alpha}^{(32)} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (14)$$

где используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} e_{x_m}^{(ij)} &:= v_{x_m}^{(ij)} - v^{(im)}v^{(0j)} + v^{(i0)}v^{(mj)}, \\ e_{t_m}^{(ij)} &:= v_{t_m}^{(ij)} - \sum_{k=1}^2 v^{(ik)}A^{(mk)}v^{(0j)} + v^{(i0)} \sum_{k=1}^2 A^{(mk)}v^{(kj)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что уравнение (14) можно представить в виде уравнения (3), в котором

$$Z_{\alpha\beta}^1 = \begin{vmatrix} A_{\beta}^{(21)} & A_{\beta}^{(31)} & 1 & 0 \\ A_{\alpha}^{(21)} & A_{\alpha}^{(31)} & 1 & 0 \\ A_{\beta}^{(22)} & A_{\beta}^{(32)} & 0 & 1 \\ A_{\alpha}^{(22)} & A_{\alpha}^{(32)} & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad Z_{\alpha\beta}^2 = - \begin{vmatrix} A_{\beta}^{(11)} & A_{\beta}^{(31)} & 1 & 0 \\ A_{\alpha}^{(11)} & A_{\alpha}^{(31)} & 1 & 0 \\ A_{\beta}^{(12)} & A_{\beta}^{(32)} & 0 & 1 \\ A_{\alpha}^{(12)} & A_{\alpha}^{(32)} & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (16)$$

$$Z_{\alpha\beta}^3 = \begin{vmatrix} A_{\beta}^{(11)} & A_{\beta}^{(21)} & 1 & 0 \\ A_{\alpha}^{(11)} & A_{\alpha}^{(21)} & 1 & 0 \\ A_{\beta}^{(12)} & A_{\beta}^{(22)} & 0 & 1 \\ A_{\alpha}^{(12)} & A_{\alpha}^{(22)} & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$T_{\alpha\beta}^1 = \begin{vmatrix} A_{\beta}^{(11)} & A_{\beta}^{(21)} & A_{\beta}^{(31)} & 0 \\ A_{\alpha}^{(11)} & A_{\alpha}^{(21)} & A_{\alpha}^{(31)} & 0 \\ A_{\beta}^{(12)} & A_{\beta}^{(22)} & A_{\beta}^{(32)} & 1 \\ A_{\alpha}^{(12)} & A_{\alpha}^{(22)} & A_{\alpha}^{(32)} & 1 \end{vmatrix}, \quad T_{\alpha\beta}^2 = \begin{vmatrix} A_{\beta}^{(11)} & A_{\beta}^{(21)} & A_{\beta}^{(31)} & 1 \\ A_{\alpha}^{(11)} & A_{\alpha}^{(21)} & A_{\alpha}^{(31)} & 1 \\ A_{\beta}^{(12)} & A_{\beta}^{(22)} & A_{\beta}^{(32)} & 0 \\ A_{\alpha}^{(12)} & A_{\alpha}^{(22)} & A_{\alpha}^{(32)} & 0 \end{vmatrix}, \quad (17)$$

$$a_{\alpha\gamma\beta}^{(k)} = \begin{vmatrix} A_{\gamma}^{(1k)} & A_{\gamma}^{(2k)} & A_{\gamma}^{(3k)} & \delta_{k1} & \delta_{k2} \\ A_{\beta}^{(11)} & A_{\beta}^{(21)} & A_{\beta}^{(31)} & 1 & 0 \\ A_{\alpha}^{(11)} & A_{\alpha}^{(21)} & A_{\alpha}^{(31)} & 1 & 0 \\ A_{\beta}^{(12)} & A_{\beta}^{(22)} & A_{\beta}^{(32)} & 0 & 1 \\ A_{\alpha}^{(12)} & A_{\alpha}^{(22)} & A_{\alpha}^{(32)} & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2. \quad (18)$$

Структура уравнения (3) аналогична структуре $(2+1)$ -мерного уравнения n -волн (1). В частности, оно тождественно равно нулю при $\alpha = \beta$ и допускает редукцию

$$\begin{aligned} x_n &= i\xi_n, & t_m &= i\tau_m, & (v^{(lj)})^+ &= v^{(jl)}, & i^2 &= -1, \\ n &= 1, 2, & m &= 1, 2, 3, & l, j &= 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (19)$$

После этой редукции система (3) принимает вид

$$\begin{aligned} i \sum_{m=1}^3 Z_{\alpha\beta}^{(m)}(v_{\alpha\beta}^{(lj)})_{\tau_m} + i \sum_{n=1}^2 T_{\alpha\beta}^{(n)}(v_{\alpha\beta}^{(lj)})_{\xi_n} + \sum_{k=1}^2 \sum_{\gamma=1}^N a_{\alpha\gamma\beta}^{(k)}(v_{\alpha\gamma}^{(lk)} v_{\gamma\beta}^{(0j)} - v_{\alpha\gamma}^{(l0)} v_{\gamma\beta}^{(kj)}) &= 0, \\ l, j &= 0, 1, 2, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (20)$$

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ $v^{(ij)}$

Согласно разделу 2 недиагональные элементы матричных полей $v^{(ij)}$, $i, j = 0, 1, 2$, удовлетворяют системе (3). В настоящем разделе мы покажем, что естественным образом возникают дополнительные алгебро-дифференциальные связи между этими матричными полями, включающие их диагональные элементы. Существует три семейства таких связей.

1. К *первому семейству* относятся уравнения систем (12), (13), в которых $i = j = 0$:

$$\begin{aligned} v_{x_m}^{(00)} + v^{(0m)} - v^{(m0)} - v^{(0m)} v^{(00)} + v^{(00)} v^{(m0)} &= 0, \\ v_{t_m}^{(00)} + \sum_{k=1}^2 (v^{(0k)} A^{(mk)} - A^{(mk)} v^{(k0)}) - \sum_{k=1}^2 v^{(0k)} A^{(mk)} v^{(00)} + v^{(00)} \sum_{k=1}^2 A^{(mk)} v^{(k0)} &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

2. Ко *второму семейству* относятся уравнения систем (12), (13), в которых $j = 0$. Исключая поля $v^{(im00)}$, представим это семейство в виде

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} (f_{t_k}^{(i0)})_{\alpha\beta} & (f_{x_1}^{(i0)})_{\alpha\beta} & (f_{x_2}^{(i0)})_{\alpha\beta} \\ A_{\alpha}^{(k1)} & 1 & 0 \\ A_{\alpha}^{(k2)} & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \\ f_{x_m}^{(i0)} &:= v_{x_m}^{(i0)} + v^{(im)} - v^{(im)} v^{(00)} + v^{(i0)} v^{(m0)}, \\ f_{t_m}^{(i0)} &:= v_{t_m}^{(i0)} + \sum_{k=1}^2 v^{(ik)} A^{(mk)} - \sum_{k=1}^2 v^{(ik)} A^{(mk)} v^{(00)} + v^{(i0)} \sum_{k=1}^2 A^{(mk)} v^{(k0)}. \end{aligned} \quad (22)$$

3. К *третьему семейству* относятся уравнения систем (12), (13), в которых $i = 0$. Исключая поля $v^{(00mj)}$, представим это семейство в виде

$$\begin{vmatrix} (f_{t_k}^{(0j)})_{\alpha\beta} & (f_{x_1}^{(0j)})_{\alpha\beta} & (f_{x_2}^{(0j)})_{\alpha\beta} \\ A_{\beta}^{(k1)} & 1 & 0 \\ A_{\beta}^{(k2)} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (23)$$

$$f_{x_m}^{(0j)} := v_{x_m}^{(0j)} - v^{(mj)} - v^{(0m)}v^{(0j)} + v^{(00)}v^{(mj)},$$

$$f_{t_m}^{(0j)} := v_{t_m}^{(0j)} - \sum_{k=1}^2 A^{(mk)}v^{(kj)} - \sum_{k=1}^2 v^{(0k)}A^{(mk)}v^{(0j)} + v^{(00)}\sum_{k=1}^2 A^{(mk)}v^{(kj)}.$$

Все соотношения (21)–(23) имеют диагональные части и включают диагональные элементы всех матричных полей $v^{(ij)}$, $i, j = 0, 1, 2$. Однако следует подчеркнуть, что наличие этих связей не разрушает полной интегрируемости системы (3). Мы поясним это утверждение в разделе 4.

4. ПРОСТРАНСТВО РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (3)

Прежде всего в данной главе мы покажем полную интегрируемость системы (3). Для этого снова обратимся к спектральному представлению и выведем спектральные функции Ψ и матричные поля $v^{(ij)}$ в явном виде.

4.1. Вывод явных формул для Ψ и $v^{(ij)}$. Чтобы получить Ψ в явном виде, следует обратить оператор R , т. е. решить интегральное уравнение (7) относительно Ψ . Важно то, что Ψ можно построить в явном виде с точностью до обратимости интегрального оператора R_0 , не зависящего от переменных x и t . Подставляя R из (5), перепишем уравнение (7) в виде

$$\int \widehat{R}_0(\lambda, \nu) \Psi(\nu, \mu) d\Omega(\nu) + r(\lambda) \chi(\mu) = \delta(\lambda - \mu), \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{R}_0(\lambda, \nu) = & \exp\left(\sum_{j=1}^D s^{(j)}(\lambda)x_j + \sum_k S^{(k)}(\lambda)t_k\right) R_0(\lambda, \mu) \times \\ & \times \exp\left(-\sum_{j=1}^D s^{(j)}(\mu)x_j - \sum_k S^{(k)}(\mu)t_k\right), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\chi(\mu) = \int q(\nu) \Psi(\nu, \mu) d\Omega(\nu). \quad (26)$$

Предполагая обратимость $R_0(\lambda, \mu)$, запишем выражение

$$\begin{aligned} \widehat{R}_0^{-1}(\lambda, \mu) = & \exp\left(\sum_{j=1}^D s^{(j)}(\lambda)x_j + \sum_k S^{(k)}(\lambda)t_k\right) R_0^{-1}(\lambda, \mu) \times \\ & \times \exp\left(-\sum_{j=1}^D s^{(j)}(\mu)x_j - \sum_k S^{(k)}(\mu)t_k\right), \end{aligned} \quad (27)$$

где $R_0(\lambda, \nu) * R_0^{-1}(\nu, \mu) = \delta(\lambda - \mu)$. Тогда, применяя $\widehat{R}_0^{-1}*$, найдем Ψ в виде

$$\Psi = \widehat{R}_0^{-1} - \widehat{R}_0^{-1} * r\chi. \quad (28)$$

Чтобы найти функцию χ в правой части этого уравнения, применим оператор $q*$ к уравнению (28) и решим полученное уравнение относительно χ . Получаем, что

$$\chi = (1 + w^{(00)})q * \widehat{R}_0^{-1}, \quad (29)$$

где используются следующие обозначения:

$$w^{(ij)} = (qs^{(i)}) * \widehat{R}_0^{-1} * (s^{(j)}r), \quad i, j = 0, 1, \dots, D, \quad s^{(0)} = I_N. \quad (30)$$

Применяя операторы $(qs^{(i)})*$ и $*(s^{(j)}r)$ к уравнению (28), приходим к выражению

$$v^{(ij)} = w^{(ij)} - w^{(i0)}(I + w^{(00)})^{-1}w^{(0j)}. \quad (31)$$

Очевидно, каждая из функций $w^{(ij)}$ является решением соответствующего линейного уравнения в частных производных (4). Решения $v^{(ij)}$ не имеют особенностей в том случае, если $\det(I + w^{(00)}) \neq 0$ для всех x_i и t_i внутри интересующей нас области.

Вывод о полной интегрируемости системы (3) следует из того факта, что функция R (25) произвольным образом зависит от $2D$ независимых функций спектральных параметров $s^{(i)}(\lambda)$ и $s^{(i)}(\mu)$, что определяет произвольные функции от $2D$ независимых переменных x_i и t_i . Это требование необходимо для полной интегрируемости системы $(2D + 1)$ -мерных уравнений в частных производных. Очевидно, число этих произвольных матричных функций от переменных (x, t) совпадает с числом полей $v^{(ij)}$ в системе (3). Действительно, эти произвольные функции есть не что иное, как поля $w^{(ij)}$ (30). По построению это независимые функции с произвольной зависимостью от $2D$ переменных x_i и t_i .

Кроме того, чтобы удовлетворить редукции (19), наложим следующие ограничения на функции спектральных параметров R_0 и s :

$$R_0(\lambda, \mu) = R_0^+(\mu^*, \lambda^*), \quad q(\lambda) = r^*(\lambda^*), \quad s^{(n)}(\lambda) = (s^{(n)})^*(\lambda^*), \quad (32)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение и учтена диагональность функций r , q и $s^{(n)}$.

4.2. Частные решения. В этом пункте рассматриваются частные решения $v^{(ij)}$ при наложении редукции (19) (т. е. решения уравнения (20)), построенные с помощью дискретных спектральных параметров $\lambda, \mu \in \{z_1, z_2, \dots, z_M\}$, где z_i — действительные числа. В качестве примера возьмем следующие функции R_0 , r , q и $s^{(n)}$, удовлетворяющие редукции (32):

$$\begin{aligned} (R_0(z_j, z_k))_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta}\delta_{jk} + \alpha^{z_j}\beta^{z_k}(1 - \delta_{jk}), & s_\alpha^{(n)}(z_j) &= (\alpha z_j)^n, \\ A_\alpha^{(mn)} &= (\alpha + n - 1)^m, & r_\alpha(z_j) &= q_\alpha(z_j) = \alpha^{z_j}, \\ n &= 1, 2, & m &= 1, 2, 3, & j, k &= 1, \dots, M, & \alpha, \beta &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (33)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. В этом случае поля $v^{(ij)}$ задаются формулой (31), в которой функции $w^{(ij)}$ определяются выражениями (30) и (25):

$$w^{(ij)} = \sum_{i,j=1}^M \alpha^{z_i} (\alpha z_i)^n e^{K_\alpha(x,t,z_i) - K_\beta(x,t,z_j)} (R_0^{-1})_{\alpha\beta}(z_i, z_j) (\beta z_j)^m \beta^{z_j}, \quad (34)$$

где

$$K_\alpha(x, t, z_i) = \sum_{j=1}^2 (\alpha z_i)^j x_j + \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^2 (\alpha + k - 1)^l (\alpha z_i)^k t_l, \quad (35)$$

а R_0^{-1} – оператор, обратный к R_0 :

$$\sum_{l=1}^M \sum_{\gamma=1}^N (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{il} + \alpha^{z_i} \gamma^{z_l} (1 - \delta_{il})) (R_0^{-1})_{\gamma\beta}(z_l, z_j) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij}. \quad (36)$$

На рис. 1 изображены модули некоторых матричных элементов полей $v^{(ij)}$ для случая $M = 2$ и $N = 4$ на плоскости (ξ_1, ξ_2) при $\tau_i = i$.

Как видно, все элементы матриц $v^{(ij)}$ можно разделить на три семейства. Модули матричных элементов первого семейства (элементов матриц $v^{(00)}$ и $v^{(10)}$, см. рис. 1а) имеют высокие пики, регулярно расположенные на плоскости (ξ_1, ξ_2) . Модули матричных элементов второго семейства (элементов матрицы $v^{(01)}$, см. рис. 1б) имеют пики, расположенные на осциллирующей платформе. Наконец, модули матричных элементов третьего семейства (элементов матрицы $v^{(11)}$, см. рис. 1в) не имеют острых пиков. Следовательно, такого рода уравнения типа n -волн могут быть связаны с формированием квазипериодических решений в виде лампов большой амплитуды.

5. ВЫВОДЫ

Построена полностью интегрируемая линеаризуемая версия пятимерного уравнения типа n -волн для матричных полей $v^{(ij)}$, $i, j = 0, 1, 2$. Его обобщение на случай размерности $2D + 1$, $D > 2$, очевидно. Показано, что элементы матричных полей $v^{(ij)}$ имеют разные формы. Некоторые из них имеют вид квазипериодически расположенных острых пиков и, следовательно, могут быть связаны с формированием волн-убийц.

Интересно отметить, что для вывода уравнения (3) была введена вспомогательная спектральная функция Ψ , поэтому поля $v^{(ij)}$ приобретают спектральное представление по аналогии с полями нелинейных уравнений в частных производных, интегрируемых с помощью МОЗР. Таким образом, метод одевания появляется здесь как средство объединения нелинейных уравнений в частных производных, интегрируемых различными методами. Аналогичное явление наблюдалось ранее в работах [15], [16], в которых рассмотрены комбинации нелинейных уравнений в частных производных, интегрируемых различными способами, такими как МОЗР, линеаризация подстановкой Хопфа, метод характеристик.

Рис. 1. Модули некоторых матричных элементов частного решения уравнения (20) при $\tau_i = i$, $i = 1, 2, 3$. Показаны три типичных случая: модули матричных элементов полей $v^{(00)}$ и $v^{(10)}$ имеют множество направленных вверх пиков, распределенных на плоскости (ξ_1, ξ_2) , в качестве примера приведен модуль $|v_{34}^{(00)}|$ (а); модули матричных элементов поля $v^{(01)}$ имеют множество направленных вверх пиков, распределенных на осциллирующей основе, в качестве примера приведен модуль $|v_{14}^{(01)}|$ (б); модули матричных элементов поля $v^{(11)}$ имеют осциллирующий вид без пиков, в качестве примера показан модуль $|v_{34}^{(11)}|$ (в).

Конечно, вместо ядра $\widehat{R}_0$ симметричного вида (25) можно использовать его несимметричную версию

$$\begin{aligned} \widehat{R}_0(\lambda, \nu) = & \exp\left(\sum_{j=1}^D s^{(j)}(\lambda)x_j + \sum_k S^{(k)}(\lambda)t_k\right) R_0(\lambda, \mu) \times \\ & \times \exp\left(\sum_{j=1}^D p^{(j)}(\mu)x_j + \sum_k P^{(k)}(\lambda)t_k\right). \end{aligned} \quad (37)$$

Тогда полученные нелинейные уравнения в частных производных содержат также и диагональную часть.

Список литературы

- [1] D. J. Kaup, “A method for solving the separable initial-value problem of the full three-dimensional three-wave interaction”, *Stud. Appl. Math.*, **62**:75–83 (1980).
- [2] D. J. Kaup, “The inverse scattering solution for the full three-dimensional three-wave resonant interaction”, *Phys. D*, **1**:45–67 (1980).
- [3] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura, “Method for solving the Korteweg–deVries equation”, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:19 (1967), 1095–1097.
- [4] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [5] M. J. Ablowitz, P. C. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **149**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [6] А. Б. Шабат, “Об уравнении Кортевега–де Фриза”, *Докл. АН СССР*, **211**:6 (1973), 1310–1313.
- [7] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I”, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53.
- [8] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II”, *Функц. анализ и его прил.*, **13**:3 (1979), 13–22.
- [9] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, “Построение многомерных нелинейных интегрируемых систем и их решений”, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:2 (1985), 11–25.
- [10] B. G. Konopelchenko, *Solitons in Multidimensions. Inverse Spectral Transform Method*, World Sci., Singapore, 1993.
- [11] A. I. Zenchuk, “On integration of a multidimensional version of n -wave type equation”, *J. Math. Phys.*, **55**:12 (2014), 121505, 30 pp.
- [12] V. E. Zakharov (ed.), *What is Integrability?*, Springer, Berlin, 1991.
- [13] F. Calogero, Ji Xiaoda, “ C -integrable nonlinear partial differentiation equations”, *J. Math. Phys.*, **32**:4 (1991), 875–887.
- [14] F. Calogero, Ji Xiaoda, “ C -integrable nonlinear PDEs. II”, *J. Math. Phys.*, **32**:10 (1991), 2703–2717.
- [15] A. I. Zenchuk, “A unified dressing method for C - and S -integrable hierarchies; the particular example of a $(3 + 1)$ -dimensional n -wave equation”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:25 (2004), 6557–6571.
- [16] A. I. Zenchuk, “On the relationship between nonlinear equations integrable by the method of characteristics and equations associated with commuting vector fields”, *J. Math. Phys.*, **50**:6 (2009), 063505, 18 pp.

Поступила в редакцию 1.04.2016,
после доработки 15.04.2016