Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, О преобразовании Беклунда, *ТМФ*,
2016, том 189, номер 3, 323–334

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9209>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 18:18:53

© 2016 г.

В. В. Жаринов*

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ БЕКЛУНДА

Преобразование Беклунда, т. е. пара дифференциальных уравнений с наложенной дифференциальной связью, описывается в координатной манере, пригодной для вычислений и приложений. Приводится ряд известных поясняющих примеров, включая преобразования Беклунда калибровочных полей в пространстве Минковского произвольной размерности.

Ключевые слова: полная производная, уравнение в частных производных, дифференциальная связь, констрейнт, преобразование Беклунда, калибровочное поле, тензор кривизны, ковариантная производная, поле Янга–Миллса.

DOI: 10.4213/tmf9209

1. ВВЕДЕНИЕ

Образно говоря, преобразование Беклунда есть дифференциальная связь между двумя дифференциальными уравнениями (т. е. между двумя системами нелинейных уравнений в частных производных). Первоначально такая конструкция появилась в работах А. В. Беклунда при изучении поверхностей постоянной кривизны. На языке дифференциальных уравнений она представляется как дифференциальная связь между двумя копиями уравнения $\sin$ -Гордон (подробнее см. пример 2 ниже и книгу [1]). С тех пор преобразования Беклунда имеют многочисленные приложения в физике, геометрии и дифференциальных уравнениях. С точки зрения алгебро-геометрического подхода к дифференциальным уравнениям (см., например, работу [2]) преобразования Беклунда суть весьма специальный случай систем со связями [3], и в силу своей специфики они заслуживают особого рассмотрения. Ранее [4] было представлено адекватное бескоординатное описание этой ситуации. Такое описание дает точное и ясное понимание преобразований Беклунда и их места в алгебро-геометрическом подходе, но оно плохо годится для конкретных вычислений и приложений. В настоящей статье ситуация описывается в фиксированной системе координат и иллюстрируется рядом полезных примеров. Все популярные

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: zharinov@mi.ras.ru

примеры преобразования Беклунда имеют дело с дифференциальными уравнениями с двумя независимыми переменными (как редкое исключение см. статью [5]). Чтобы увеличить число многомерных примеров, во второй части статьи приведено несколько преобразований Беклунда для калибровочных полей. Изложенная здесь техника может найти применение к различным моделям теоретической и математической физики (см., например, работы [6]–[10]).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Обозначения. Все конструкции в этой статье локальные. Так, фактически запись $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$ означает, что $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{F})$, где $\mathcal{O}$ – некоторая область в $\mathbb{R}^m$. По повторяющимся верхним и нижним индексам подразумевается суммирование. В общих построениях используются обозначения, принятые в формальной теории дифференциальных уравнений (см., например, книги [2], [11], [12]), в то время как в примерах и приложениях используются обозначения, принятые в математической и теоретической физике. В частности,

- $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}, m \in \mathbb{N};$
- $\mathbb{I} = \mathbb{Z}_+^m = \{i = (i^1, \dots, i^m) \mid i^\mu \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq \mu \leq m\},$
 $i + j = (i^1 + j^1, \dots, i^m + j^m), (1) = (1, 0, \dots), \dots, (m) = (0, \dots, 1);$
- $X = \mathbb{R}^m = \{x = (x^1, \dots, x^m) \mid x^\mu \in \mathbb{R}, 1 \leq \mu \leq m\};$
- $Z = \mathbb{R}^T = \{z = (z^\tau) \mid z^\tau \in \mathbb{R}, \tau \in T\}, T$ – множество индексов;
- $\pi_Z: XZ = X \times Z \rightarrow X, \quad \Gamma(\pi_Z) = C^\infty(X; Z);$
- $Z = \mathbb{R}_{\mathbb{I}}^T = \{z = (z_i^\tau) \mid z_i^\tau \in \mathbb{R}, \tau \in T, i \in \mathbb{I}\}, z^\tau = z_0^\tau;$
- $\pi_Z: XZ = X \times Z \rightarrow X, \quad \Gamma(\pi_Z) = C^\infty(X; Z);$
- $C^\infty(X; Y) \ni \rho \mapsto \text{graph } \rho = \{(x, y) \mid x \in X, y = \rho(x)\} \subset XY,$
 $Y = Z, Z;$
- $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu, 1 \leq \mu \leq m, \quad \partial_i = (\partial_1)^{i^1} \dots (\partial_m)^{i^m}, i \in \mathbb{I};$
- $\mathbf{j}: \Gamma(\pi_Z) \rightarrow \Gamma(\pi_Z), \quad \phi = (\phi^\tau(x)) \mapsto \boldsymbol{\phi} = \mathbf{j}\phi = (\phi_i^\tau(x)),$
 где $\phi_i^\tau(x) = \partial_i \phi^\tau(x), \tau \in T, i \in \mathbb{I};$
- $\mathcal{Z} = C_{\text{fin}}^\infty(XZ; \mathbb{F})$ – алгебра всех $\mathbb{F}$ -значных гладких функций на бесконечномерном пространстве XZ , зависящих от конечного числа аргументов $x^\mu, z_i^\tau,$
 $1 \leq \mu \leq m, \tau \in T, i \in \mathbb{I};$
- $\mathfrak{D}(\mathcal{Z})$ – алгебра Ли всех дифференцирований алгебры $\mathcal{Z}$, т. е. всех $\xi \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{Z})$, таких что $\xi(\phi\psi) = (\xi\phi)\psi + \phi(\xi\psi)$ для всех $\phi, \psi \in \mathcal{Z}$ (правило Лейбница).

2.2. Полные производные. Важную роль в формальной теории уравнений в частных производных играют *полные производные* $D_\mu \in \mathfrak{D}(\mathcal{Z}), 1 \leq \mu \leq m$, характеризующиеся правилом дифференцирования сложной функции:

- равенство

$$(D_\mu f)(x, \mathbf{z})|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\phi}(x)} = \partial_\mu (f(x, \mathbf{z})|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\phi}(x)}), \quad \boldsymbol{\phi} = (\phi_i^\tau) \in \Gamma(\pi_Z),$$

справедливо для всех $f \in \mathcal{Z}, 1 \leq \mu \leq m$, тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{j}\phi$, где $\phi = (\phi_0^\tau) \in \Gamma(\pi_Z);$

- $[D_\mu, D_\nu] = 0, 1 \leq \mu, \nu \leq m.$

Эти свойства дают явное представление:

$$D_\mu = \partial_\mu + z_{i+(\mu)}^\tau \partial_{z_i^\tau}, \quad 1 \leq \mu \leq m, \quad \partial_{z_i^\tau} = \frac{\partial}{\partial z_i^\tau}.$$

В частности, $D_\mu f = \partial_\mu f$ для всех $f \in C^\infty(X; \mathbb{F}) \subset C_{\text{fin}}^\infty(X\mathbf{Z}; \mathbb{F})$, $1 \leq \mu \leq m$. Ниже мы отождествляем D_μ и ∂_μ , когда это не может привести к недоразумению.

Далее,

- пара $(\mathcal{Z}, D)$ есть дифференциальная алгебра, где $D = (D_1, \dots, D_m)$ (см., например, книгу [2]);
- $D_i = (D_1)^{i^1} \dots (D_m)^{i^m}$, $i \in \mathbb{I}$;
- $\mathcal{Z}[D] = \{P(D) = \sum_i a^i D_i \mid a^i \in \mathcal{Z}, i \in \mathbb{I}\}$ есть алгебра всех дифференциальных многочленов от $D_1, \dots, D_m$ над $\mathcal{Z}$.

2.3. Дифференциальные уравнения. Нам понадобятся следующие элементарные понятия алгебро-геометрического подхода к дифференциальным уравнениям (подробнее см., например, книги [2], [11], [12]). Система уравнений в частных производных записывается как $H = 0$, где

$$\bullet H = (H^\varepsilon) \in \mathcal{Z}^E, \quad H^\varepsilon = H^\varepsilon(x, \mathbf{z}) \in \mathcal{Z}, \varepsilon \in E, (x, \mathbf{z}) \in X\mathbf{Z}$$

(E – множество индексов, $\mathcal{Z}^E = C_{\text{fin}}^\infty(X\mathbf{Z}; \mathbb{F}^E)$). Далее,

- $\text{Sol}(H) = \{(x, \mathbf{z}) \in X\mathbf{Z} \mid D_i H^\varepsilon(x, \mathbf{z}) = 0 \text{ для всех } i \in \mathbb{I}, \varepsilon \in E\}$
– *многообразие решений* системы $H = 0$;
- $\text{Sol}(H) = \{\phi \in \Gamma(\pi_{\mathbf{Z}}) \mid H(x, \mathbf{z})|_{\mathbf{z}=\mathbf{j}\phi(x)} = 0 \text{ для всех } x \in X\} =$
 $= \{\phi \in \Gamma(\pi_{\mathbf{Z}}) \mid \text{graph } \mathbf{j}\phi \subset \text{Sol}(H)\}$
– *множество решений* системы $H = 0$;
- $\mathcal{I}(H) = \{f = P_\varepsilon(D)H^\varepsilon \mid P(D) = (P_\varepsilon(D)) \in \mathcal{Z}_E[D]\}$ – идеал алгебры $\mathcal{Z}$, а пара $(\mathcal{I}(H), D)$ – дифференциальный идеал дифференциальной алгебры $(\mathcal{Z}, D)$; в частности, определена дифференциальная фактор-алгебра $(\overline{\mathcal{Z}}, \overline{D})$ (см., например, книгу [2]).

Очевидно, имеет место вложение $\mathcal{I}(H) \subset \{f \in \mathcal{Z} \mid f|_{\text{Sol}(H)} = 0\}$. Обратное вложение справедливо, если система $H = 0$ является *регулярной*, т. е. если множество $\text{Sol}(H)$ обладает структурой гладкого подмногообразия пространства $X\mathbf{Z}$.

Элементы фактор-алгебры $\overline{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}/\mathcal{I}(H)$ можно рассматривать как гладкие функции на многообразии решений $\text{Sol}(H)$. Это действительно так, если система $H = 0$ регулярная.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Определения и основные свойства. В приведенных выше обозначениях

- $Z = U, V, W$, где $U = \mathbb{R}^A$, $V = \mathbb{R}^B$, $W = UV = \mathbb{R}^{AB}$, $AB = A \times B$;
- $\mathbf{Z} = \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$;
- $\Pi_{\mathbf{Y}}: X\mathbf{W} \rightarrow X\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{U}, \mathbf{V}$;
- $\Pi_{\mathbf{Y}}^*: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{W}$, $f \mapsto \Pi_{\mathbf{Y}}^* f = f \circ \Pi_{\mathbf{Y}}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{U}, \mathbf{V}$, $\mathcal{Y} = \mathcal{U}, \mathcal{V}$.

В частности,

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \ni f(x, \mathbf{u}) &\mapsto (\Pi_{\mathbf{U}}^* f)(x, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(x, \mathbf{u}) \in \mathcal{W}, \\ \mathcal{V} \ni g(x, \mathbf{v}) &\mapsto (\Pi_{\mathbf{V}}^* g)(x, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(x, \mathbf{v}) \in \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Далее, здесь полные производные

- $D_\mu = \partial_\mu + u_{i+(\mu)}^\alpha \partial_{u_i^\alpha} + v_{i+(\mu)}^\beta \partial_{v_i^\beta} \in \mathfrak{D}(\mathcal{W})$;
- $D_\mu|_{\mathcal{U}} = \partial_\mu + u_{i+(\mu)}^\alpha \partial_{u_i^\alpha} \in \mathfrak{D}(\mathcal{U})$, $D_\mu|_{\mathcal{V}} = \partial_\mu + v_{i+(\mu)}^\beta \partial_{v_i^\beta} \in \mathfrak{D}(\mathcal{V})$;
- $(D_\mu \circ \Pi_Y^*)f = (\Pi_Y^* \circ D_\mu|_{\mathcal{Y}})f$, $\mathbf{Y} = \mathbf{U}, \mathbf{V}$, $f \in \mathcal{Y} = \mathcal{U}, \mathcal{V}$.

Принимая во внимание эти свойства, ниже мы будем использовать сокращения $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ и $D_\mu|_{\mathcal{Y}} = D_\mu$ для $1 \leq \mu \leq m$, $\mathcal{Y} = \mathcal{U}, \mathcal{V}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Тройка $FRG \subset \mathcal{W}^E$, где

$$F = (F^\kappa) \in \mathcal{U}^K \subset \mathcal{W}^K, \quad R = (R^\sigma) \in \mathcal{W}^S, \quad G = (G^\lambda) \in \mathcal{V}^L \subset \mathcal{W}^L,$$

$E = \text{KSL}$, называется *тройкой Беклунда*, если система $FRG = 0$ совместна (т. е. множество $\text{Sol}(FRG) \neq \emptyset$, в частности $\text{Sol}(H) \neq \emptyset$, $H = F, R, G$). В этом случае $F = 0$ и $G = 0$ суть изучаемые уравнения, а уравнение $R = 0$ – *дифференциальная связь* между уравнениями $F = 0$ и $G = 0$, т. е. $R = 0$ – *констрейнт* для системы FG .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Преобразование Беклунда*, ассоциированное с тройкой Беклунда FRG , есть многозначное отображение

$$\text{Sol}(F) \ni \phi \mapsto \text{Sol}(R_\phi G) \subset \text{Sol}(G),$$

где $R_\phi \in \mathcal{V}^S$, $R_\phi(x, \mathbf{v}) = R(x, \mathbf{u}, \mathbf{v})|_{\mathbf{u}=\mathbf{j}\phi(x)} = R(x, \mathbf{j}\phi(x), \mathbf{v})$ есть *редукция* дифференциальной связи $R(x, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ посредством функции ϕ . Иногда в определение тройки Беклунда включают требование $\text{Sol}(R_\phi G) \neq \emptyset$ для всех $\phi \in \text{Sol}(F)$ (см., например, книгу [11] и ссылки в ней).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть FRG – тройка Беклунда, $\phi \in \text{Sol}(F)$, $\psi \in \text{Sol}(R_\phi G)$. Тогда пара $\chi = (\phi, \psi) \in \text{Sol}(FRG)$. В частности, совместность системы $FRG = 0$ есть необходимое условие для того, чтобы преобразование Беклунда было определено хотя бы для некоторых $\phi \in \text{Sol}(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно внимательно прочитать определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Тройки Беклунда FRG и $F\tilde{R}G$, $\tilde{R} \in \mathcal{W}^{\tilde{S}}$, называются *эквивалентными*, $FRG \sim F\tilde{R}G$, если $\text{Sol}(FRG) = \text{Sol}(F\tilde{R}G)$, т. е. если их преобразования Беклунда совпадают.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Тройка Беклунда FRG называется *специальной*, если существуют дифференциальные многочлены

$$P(D) = (P_\sigma^\kappa(D)) \in \mathcal{W}_K^S[D]$$

и

$$Q(D) = (Q_\sigma^\lambda(D)) \in \mathcal{W}_L^S[D]$$

такие, что $F = P(D)R$ и $G = Q(D)R$ (подробнее, $F^\kappa = P_\sigma^\kappa(D)R^\sigma$ и $G^\lambda = Q_\sigma^\lambda(D)R^\sigma$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для каждой тройки Беклунда FRG существует эквивалентная специальная тройка Беклунда $F\tilde{R}G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, можно положить

$$\tilde{R} = (\tilde{R}^1 = F, \tilde{R}^2 = R, \tilde{R}^3 = G), \quad \tilde{S} = E, \quad \tilde{E} = K\tilde{S}L.$$

В этом случае $F = \tilde{R}^1$, $G = \tilde{R}^3$, $\text{Sol}(\tilde{R}_\phi G) = \text{Sol}(R_\phi GG) = \text{Sol}(R_\phi G)$ для всякой $\phi \in \text{Sol}(F)$.

Легко проверяются следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Тройка Беклунда FRG является специальной тогда и только тогда, когда $\mathcal{I}(F) \subset \mathcal{I}(R)$ и $\mathcal{I}(G) \subset \mathcal{I}(R)$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть FRG – специальная тройка Беклунда. Тогда равенства*

$$\begin{aligned} F(x, \mathbf{j}\phi(x)) &= P(x, \mathbf{j}\phi(x), \mathbf{j}\psi(x); \partial)R(x, \mathbf{j}\phi(x), \mathbf{j}\psi(x)), \\ G(x, \mathbf{j}\psi(x)) &= Q(x, \mathbf{j}\phi(x), \mathbf{j}\psi(x); \partial)R(x, \mathbf{j}\phi(x), \mathbf{j}\psi(x)) \end{aligned}$$

справедливы для всех $\phi \in \Gamma(\pi_U)$, $\psi \in \Gamma(\pi_V)$, где $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_m)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть FRG – специальная тройка Беклунда. Тогда $\phi \in \text{Sol}(F)$ и $\psi \in \text{Sol}(G)$ для любой пары $\chi = (\phi, \psi) \in \text{Sol}(R)$, т. е. $\text{Sol}(FRG) = \text{Sol}(R)$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть FRG – специальная тройка Беклунда и $\phi \in \text{Sol}(F)$. Тогда $\psi \in \text{Sol}(R_\phi)$ тогда и только тогда, когда $\chi = (\phi, \psi) \in \text{Sol}(R)$.*

3.2. Примеры.

ПРИМЕР 1. Система Коши–Римана является наиболее простым примером специальной тройки Беклунда. Здесь в комплексных обозначениях

$$z = x + iy, \quad w = u + iv, \quad \partial_{\bar{z}}w = 0,$$

а в вещественных обозначениях

$$F = u_{xx} + u_{yy}, \quad G = v_{xx} + v_{yy}, \quad R = \begin{cases} R^1 = u_x - v_y, \\ R^2 = u_y + v_x. \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$F = \partial_x R^1 + \partial_y R^2, \quad G = \partial_x R^2 - \partial_y R^1.$$

Следовательно, тройку FRG можно рассматривать как специальную тройку Беклунда, причем преобразование Беклунда сводится к вычислению всех гармонических функций $v = \psi(x, y)$, сопряженных данной гармонической функции $u = \phi(x, y)$.

ПРИМЕР 2. Уравнение $\sin$ -Гордон дает наиболее знаменитый пример специальной тройки Беклунда. Здесь

$$F = u_{xy} - \sin u, \quad G = v_{xy} - \sin v, \quad \begin{cases} R^1 = \frac{u_x - v_x}{2} + \sin \frac{u + v}{2}, \\ R^2 = \frac{u_y + v_y}{2} + \sin \frac{u - v}{2}. \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} F &= \left(\partial_y - \cos \frac{u-v}{2} \right) R^1 + \left(\partial_x - \cos \frac{u+v}{2} \right) R^2, \\ G &= \left(-\partial_y - \cos \frac{u-v}{2} \right) R^1 + \left(\partial_x + \cos \frac{u+v}{2} \right) R^2. \end{aligned}$$

Таким образом, FRG – специальная тройка Беклунда.

ПРИМЕР 3. *Тривиальная тройка Беклунда* есть тройка FRG , где системы $F \in \mathcal{U}^K$, $G \in \mathcal{V}^L$ – произвольные, а $R = (R^1 = F, R^2 = G) \in \mathcal{W}^S$, $S = KL$. Ассоциированное преобразование Беклунда

$$\text{Sol}(F) \ni \phi \mapsto \text{Sol}(R_\phi) = \text{Sol}(G), \quad \text{Sol}(G) \ni \psi \mapsto \text{Sol}(R_\psi) = \text{Sol}(F)$$

бесполезно с практической точки зрения.

ПРИМЕР 4. Каждое отображение Ли–Беклунда можно интерпретировать как преобразование Беклунда. Именно, пусть $\mathbf{h}: \text{Sol}(F) \rightarrow \text{Sol}(G)$, $(x, \mathbf{u}) \rightarrow (x, \mathbf{v})$, есть отображение Ли–Беклунда, где

$$F \in \mathcal{U}^K, \quad G \in \mathcal{V}^L, \quad \mathbf{h} = \mathbf{j}h, \quad h: XU \rightarrow XV, \quad \mathbf{v} = \mathbf{h}(x, \mathbf{u})$$

(подробнее, $\mathbf{u} = (u_i^\alpha)$, $u = (u^\alpha)$, $\mathbf{v} = (v_i^\beta)$, $v = (v^\beta = v_0^\beta)$, $\mathbf{h} = (h_i^\beta)$, $h_i^\beta(x, \mathbf{u}) = D_i h^\beta(x, \mathbf{u})$, $h = (h^\beta = h_0^\beta)$). Пусть $R = v - h(x, \mathbf{u}) \in \mathcal{W}^B$. Тройка FRG является тройкой Беклунда, если система $F = 0$ совместна. В данном случае преобразование Беклунда действует по правилу

$$\text{Sol}(F) \ni \phi(x) \mapsto \psi(x) = h(x, \mathbf{j}\phi(x)) \in \text{Sol}(G).$$

Оно однозначно и совпадает с преобразованием Ли–Беклунда, индуцированным исходным отображением Ли–Беклунда.

ПРИМЕР 5. Предыдущий пример имеет естественную модификацию. Именно, в нем вложение $(x, \mathbf{j}\phi(x)) \in \text{Sol}(F)$ влечет $(x, \mathbf{j}\psi(x)) \in \text{Sol}(G)$ с $\psi(x) = h(x, \mathbf{j}\phi(x))$. Заменим это свойство следующим:

$$G(x, \mathbf{h}(x, \mathbf{u})) = N(D)F(x, \mathbf{u}) \quad \text{с некоторым} \quad N(D) = N(x, \mathbf{u}; D) \in \mathcal{U}_L^K[D],$$

где отображение Ли–Беклунда $\mathbf{h}: XU \rightarrow XV$. В этом случае

$$G(x, \mathbf{j}\psi(x)) = n(x; \partial)F(x, \mathbf{j}\phi(x)), \quad \text{где} \quad n(x; \partial) = N(x, \mathbf{j}\phi(x); \partial)$$

для всех $\phi \in \Gamma(\pi_U)$ и $\psi(x) = h(x, \mathbf{j}\phi(x))$. Аналогично, легко проверить, что тройка FRG , где $R(x, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = v - h(x, \mathbf{u})$, является тройкой Беклунда, если система $F = 0$ совместна.

ПРИМЕР 6. Преобразование Миуры есть наиболее известный пример приведенной выше конструкции. В физических обозначениях

$$F(t, x, \mathbf{u}) = mKdV = u_t - 6u^2u_x + u_{xxx}, \quad G(t, x, \mathbf{v}) = KdV = v_t - 6vv_x + v_{xxx},$$

и, как можно проверить, справедливо равенство

$$G(x, \mathbf{h}(x, \mathbf{u})) = N(D)F(x, \mathbf{u}), \quad \text{где} \quad h = u^2 \pm u_x, \quad N(D) = 2u \pm D_x$$

(см., например, статью [13]).

ПРИМЕР 7. Преобразование Коула–Хопфа – другой пример приведенной выше конструкции. Здесь

$$F(t, x, \mathbf{u}) = u_t - u_{xx}, \quad G(t, x, \mathbf{v}) = v_t + vv_x - v_{xx},$$

причем справедливо равенство $G(x, \mathbf{h}(x, \mathbf{u})) = N(D)F(x, \mathbf{u})$, в котором $h = -2u_x u^{-1}$, $N(D) = 2(u_x u^{-2} - u^{-1} D_x)$ (см., например, статью [13]).

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕКЛУНДА КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

4.1. Обозначения. Введем следующие обозначения:

- пространство $X = \mathbb{R}^m$ снабжено метрикой Минковского g (в частности, $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$, $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$);
- $U = V = \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ – алгебра Ли группы Ли $\mathfrak{G}$ (мы считаем, что $\mathfrak{G}$ – матричная группа, т. е. $\mathfrak{G} \subset \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$, где V есть $\mathbb{F}$ -линейное пространство);
- $\mathfrak{A}_m = \{u = (u_\mu) \mid u_\mu \in \mathfrak{A}, 1 \leq \mu \leq m\}$;
- $\mathfrak{A}_{m, \mathbb{I}} = \{u = (u_{\mu, i}) \mid u_{\mu, i} \in \mathfrak{A}, 1 \leq \mu \leq m, i \in \mathbb{I}\}$;
- $\mathcal{C}^\infty(X; \mathbb{F})$, $\mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(X\mathfrak{A}_{m, \mathbb{I}}; \mathbb{F})$ – алгебры с поточечными операциями;
- $\mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{G})$ – группа с поточечными операциями;
- $\mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A})$, $\mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(X\mathfrak{A}_{m, \mathbb{I}}; \mathfrak{A})$ – алгебры Ли с поточечными операциями;
- $\mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}_m)$, $\mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(X\mathfrak{A}_{m, \mathbb{I}}; \mathfrak{A}_m)$ – модули над алгеброй Ли $\mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A})$ с поточечными операциями.

4.2. Калибровочные поля. Нам понадобятся следующие базисные понятия калибровочной теории (подробнее см., например, работы [14] и [15]). Элементы пространства $\mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}_m)$ называются *калибровочными полями* (или *связностями*). Два калибровочных поля $A = (A_\mu)$, $\tilde{A} = (\tilde{A}_\mu) \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}_m)$ называются *эквивалентными*, $A \sim \tilde{A}$, если

$$\tilde{A}_\mu = S \cdot A_\mu \cdot S^{-1} - \partial_\mu S \cdot S^{-1}, \quad \text{где } S \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{G}).$$

Можно проверить, что это действительно отношение эквивалентности. Соответствующее фактор-пространство $\mathcal{M} = \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}_m) / \sim$ называется *пространством модулей калибровочных полей*.

Для каждого калибровочного поля $A = (A_\mu) \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}_m)$ определен *тензор кривизны* $F = F(A) = (F_{\mu\nu}(A)) \in \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(X\mathfrak{A}_{m, \mathbb{I}}; \mathfrak{A}_{m \wedge m})$, где

$$F_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad 1 \leq \mu, \nu \leq m.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Справедливы следующие утверждения:*

- $F_{\mu\nu}(\tilde{A}) = S \cdot F_{\mu\nu}(A) \cdot S^{-1}$ для всех $S \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{G})$, $1 \leq \mu, \nu \leq m$;
- $\text{Sol}(F) = \{A_\mu = -\partial_\mu S \cdot S^{-1} \mid S \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{G})\} \sim 0$, т. е. $A \sim 0$ для любого $A \in \text{Sol}(F)$.

Далее, с каждым калибровочным полем $A = (A_\mu) \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}_m)$ ассоциирована *ковариантная производная*

$$\begin{aligned} \nabla(A) &= (\nabla_\mu(A)) \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}); \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}_m)), \\ \nabla_\mu(A)\Phi &= \partial_\mu \Phi + [A_\mu, \Phi] \quad \text{для всех } 1 \leq \mu \leq m, \quad \Phi \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $A \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}_m)$, $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A})$, $S \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{G})$, тогда

$$\nabla_\mu(\tilde{A})\tilde{\Phi} = \partial_\mu\tilde{\Phi} + [\tilde{A}_\mu, \tilde{\Phi}] = S \cdot \nabla_\mu(A)\Phi \cdot S^{-1} \quad \text{для всех } 1 \leq \mu \leq m,$$

где $\tilde{A}_\mu = S \cdot A_\mu \cdot S^{-1} - \partial_\mu S \cdot S^{-1}$, $\tilde{\Phi} = S \cdot \Phi \cdot S^{-1}$.

Система уравнений Янга–Миллса записывается как $\nabla F(A) = 0$, где

- $\nabla F(A) = (\nabla F_\mu(A)) \in \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(X\mathfrak{A}_{m,\mathbb{I}}; \mathfrak{A}_m)$,
- $\nabla F_\mu(A) = \nabla^\nu(A)F_{\nu\mu}(A) = \partial^\nu F_{\nu\mu}(A) + [A^\nu, F_{\nu\mu}(A)]$.

Решения этой системы называются *полями Янга–Миллса*. Можно проверить, что

$$\nabla F_\mu(\tilde{A}) = S \cdot \nabla F_\mu(A) \cdot S^{-1} \quad \text{для всех } S \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{G}), \quad 1 \leq \mu \leq m.$$

В частности, множество полей Янга–Миллса расслаивается на классы эквивалентности, возникающее фактор-пространство $\text{Sol}(\nabla F(A))/\sim$ называется *пространством модулей полей Янга–Миллса*.

4.3. Преобразование Беклунда тензоров кривизны. Пусть даны два тензорных поля $F = F(A)$, $G = G(B) \in \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(X\mathfrak{A}_{m,\mathbb{I}}; \mathfrak{A}_{m \wedge m})$, где

- $F_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$, $A = (A_\mu) \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}_m)$,
- $G_{\mu\nu}(B) = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu]$, $B = (B_\mu) \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}_m)$.

Рассмотрим тензорные поля $f = f(A)$, $g = g(B) \in \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(X\mathfrak{A}_{m,\mathbb{I}}; \mathfrak{A}_{m \cdot m})$, где

- $f_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{2}[A_\mu, A_\nu]$, $g_{\mu\nu}(B) = \partial_\mu B_\nu + \frac{1}{2}[B_\mu, B_\nu]$,

так что

- $F_{\mu\nu}(A) = f_{\mu\nu}(A) - f_{\nu\mu}(A)$, $G_{\mu\nu}(B) = g_{\mu\nu}(B) - g_{\nu\mu}(B)$.

Далее, рассмотрим систему $R = 0$, где

- $R = R(A, B) = (R_{\mu\nu}^1(A, B), R_{\mu\nu}^2(A, B)) \in \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(X\mathfrak{A}_{m,\mathbb{I}}^2; \mathfrak{A}_{m \cdot m}^2)$,
- $R_{\mu\nu}^1(A, B) = f_{\mu\nu}(A) + g_{\nu\mu}(B)$, $R_{\mu\nu}^2(A, B) = f_{\nu\mu}(A) + g_{\mu\nu}(B)$.

Очевидно,

$$F_{\mu\nu}(A) = R_{\mu\nu}^1(A, B) - R_{\mu\nu}^2(A, B), \quad G_{\mu\nu}(B) = R_{\nu\mu}^1(A, B) - R_{\mu\nu}^2(A, B).$$

Следовательно, тройка FRG есть специальная тройка Беклунда (заметим, что эта тройка совместна: например, пара $(0, 0) \in \text{Sol}(R)$).

Чтобы изучить ситуацию подробнее, заметим, что здесь

- $f_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu + F_{\mu\nu}(A))$, $g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu B_\nu + \partial_\nu B_\mu + G_{\mu\nu}(B))$,
- $R_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{2}(\tilde{R}_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}(A) - G_{\mu\nu}(B))$, $R_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2}(\tilde{R}_{\mu\nu} - F_{\mu\nu}(A) - G_{\mu\nu}(B))$,

где

- $\tilde{R} = (\tilde{R}_{\mu\nu}) \in \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(X\mathfrak{A}_{m,\mathbb{I}}^2; \mathfrak{A}_{m \cdot m})$, $\tilde{R}_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu + B_\nu) + \partial_\nu(A_\mu + B_\mu)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. В изложенной выше ситуации тройки FRG и $F\tilde{R}G$ эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить определения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Множество всех решений системы $\tilde{R} = 0$ есть

$$\text{Sol}(\tilde{R}) = \{(A, B) \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}_m^2) \mid A_\mu + B_\mu = \chi_\mu \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A})\},$$

где $\chi_\mu = c_{\mu\nu}x^\nu + e_\mu$, $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$, $e_\mu \in \mathfrak{A} \subset \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A})$, $1 \leq \mu, \nu \leq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится индукцией по $m = \dim X$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть пара $(A, B) \in \text{Sol}(FRG)$. Тогда

$$[A_\mu, A_\nu] + [B_\mu, B_\nu] = 2c_{\mu\nu}, \quad c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu} \in \mathfrak{A}, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, здесь $A_\mu + B_\mu = \chi_\mu = c_{\mu\nu}x^\nu + e_\mu$, так что

$$\begin{aligned} [A_\mu, A_\nu] + [B_\mu, B_\nu] &= (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) + (\partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu) = \\ &= \partial_\nu(A_\mu + B_\mu) - \partial_\mu(A_\nu + B_\nu) = c_{\mu\nu} - c_{\nu\mu} = 2c_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Справедливо следующее представление:

$$\text{Sol}(FRG) \simeq \{(S, T) \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{G}^2) \mid \partial_\mu S \cdot S^{-1} + \partial_\mu T \cdot T^{-1} + \chi_\mu = 0\},$$

где изоморфизм задается правилом $A_\mu = -\partial_\mu S \cdot S^{-1}$, $B_\mu = -\partial_\mu T \cdot T^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. предложения 7 и 10.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть R_A – редукция (см. определение 2) дифференциальной связи R посредством $A \in \text{Sol}(F)$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Sol}(R_A G) &= \{B \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}_m) \mid B = \chi - A, G(\chi - A) = 0\}, \\ G_{\mu\nu}(\chi - A) &= [A_\mu, A_\nu] + [\chi_\mu - A_\mu, \chi_\nu - A_\nu] - 2c_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

где $\chi_\mu = c_{\mu\nu}x^\nu + e_\mu$, $1 \leq \mu, \nu \leq m$. Преобразование Беклунда задается правилом $A \mapsto B = \chi - A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(\chi - A) &= \partial_\mu(\chi_\nu - A_\nu) - \partial_\nu(\chi_\mu - A_\mu) + [\chi_\mu - A_\mu, \chi_\nu - A_\nu] = \\ &= (\partial_\mu \chi_\nu - \partial_\nu \chi_\mu) - (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + [\chi_\mu - A_\mu, \chi_\nu - A_\nu] = \\ &= -2c_{\mu\nu} + [A_\mu, A_\nu] + [\chi_\mu - A_\mu, \chi_\nu - A_\nu]. \end{aligned}$$

Рассмотрим несколько полезных примеров.

ПРИМЕР 8. Пусть $A \in \text{Sol}(F)|_{\mathfrak{C}} = \text{Sol}(F) \cap \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{C}_m)$, где $\mathfrak{C}$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{C} = \text{cen } \mathfrak{A} = \{\xi \in \mathfrak{A} \mid [\xi, \eta] = 0 \text{ для всех } \eta \in \mathfrak{A}\}$. Согласно предложению 12 в этом случае

$$\text{Sol}(R_A G) = \{B \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}_m) \mid B = \chi - A, [\chi_\mu, \chi_\nu] - 2c_{\mu\nu} = 0\}.$$

ПРИМЕР 9. Пусть $A \in \text{Sol}(F)|_{\mathfrak{B}}$, $B \in \text{Sol}(G)|_{\mathfrak{B}}$, где $\mathfrak{B}$ – коммутативная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{A}$. Тогда $\chi = A + B \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{B}_m)$, в то время как согласно предложению 12 $G_{\mu\nu}(B) = -2c_{\mu\nu} = 0$, так что $\chi = e \in \mathfrak{B}_m \subset \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{B}_m)$. Следовательно, в этом случае

$$\text{Sol}(FRG)|_{\mathfrak{B}} = \{A \in \text{Sol}(F)|_{\mathfrak{B}}, B \in \text{Sol}(G)|_{\mathfrak{B}} \mid A + B = e \in \mathfrak{B}_m\}.$$

Более того, пусть $A \in \text{Sol}(F)|_{\mathfrak{B}}$, тогда

$$\text{Sol}(R_AG)|_{\mathfrak{B}} = \{B \in \text{Sol}(G)|_{\mathfrak{B}} \mid A + B = e \in \mathfrak{B}_m\}.$$

ПРИМЕР 10. Пусть $A \in \text{Sol}(F)|_{\mathfrak{B}}$, где $\mathfrak{B}$ – коммутативная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{A}$. Тогда согласно предложению 12

$$\text{Sol}(R_AG) = \{B \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}_m) \mid B = \chi - A, [\chi_\mu - A_\mu, \chi_\nu - A_\nu] = 2c_{\mu\nu}\}.$$

4.4. Преобразование Беклунда полей Янга–Миллса 1. Рассмотрим тройку $\nabla F \nabla R \nabla G = \nabla F(A) \nabla R(A, B) \nabla G(B)$, где

- $\nabla F_\mu = \nabla F_\mu(A) = \nabla^\nu(A) F_{\nu\mu}(A)$, $\nabla G_\mu = \nabla G_\mu(B) = \nabla^\nu(B) G_{\nu\mu}(B)$,
- $\nabla_\mu(A)\Phi = \partial_\mu\Phi + [A_\mu, \Phi]$, $\nabla_\mu(B)\Phi = \partial_\mu\Phi + [B_\mu, \Phi]$, $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A})$,
- $F = F(A)$, $G = G(B)$ определены в предыдущем пункте,
- $\nabla R = \nabla R(A, B) = (\nabla R_\mu^\alpha(A, B)) \in \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(X \mathfrak{A}_{m, \mathbb{I}}^2; \mathfrak{A}_m^4)$, где

$$\nabla R_\mu^1 = \nabla^\nu(A) R_{\nu\mu}^1(A, B) = \frac{1}{2}(\widetilde{\nabla R}_\mu^1 + \nabla F_\mu - \nabla G_\mu),$$

$$\nabla R_\mu^2 = \nabla^\nu(A) R_{\nu\mu}^2(A, B) = \frac{1}{2}(\widetilde{\nabla R}_\mu^1 - \nabla F_\mu - \nabla G_\mu),$$

$$\nabla R_\mu^3 = \nabla^\nu(B) R_{\nu\mu}^1(A, B) = \frac{1}{2}(\widetilde{\nabla R}_\mu^2 - \nabla F_\mu + \nabla G_\mu),$$

$$\nabla R_\mu^4 = \nabla^\nu(B) R_{\nu\mu}^2(A, B) = \frac{1}{2}(\widetilde{\nabla R}_\mu^2 - \nabla F_\mu - \nabla G_\mu).$$

Здесь

- $R_{\nu\mu}^1(A, B)$, $R_{\nu\mu}^2(A, B)$ определены в предыдущем пункте,
- $\widetilde{\nabla R}_\mu^1 = \nabla^\nu(A) \widetilde{R}_{\nu\mu} - [A^\nu - B^\nu, G_{\nu\mu}(B)]$,
 $\widetilde{\nabla R}_\mu^2 = \nabla^\nu(B) \widetilde{R}_{\nu\mu} - [A^\nu - B^\nu, F_{\nu\mu}(A)]$,
- $\widetilde{R}_{\nu\mu} = \widetilde{R}_{\nu\mu}(A, B)$ определены в предыдущем пункте.

По построению

$$\nabla F_\mu(A) = \nabla R_\mu^1 - \nabla R_\mu^2, \quad \nabla G_\mu(B) = \nabla R_\mu^3 - \nabla R_\mu^4, \quad 1 \leq \mu \leq m,$$

следовательно, тройка $\nabla F \nabla R \nabla G = \nabla F(A) \nabla R(A, B) \nabla G(B)$ есть специальная тройка Беклунда (заметим, что пара $(0, 0) \in \text{Sol}(\nabla R)$). Более того, эта тройка эквивалентна тройке $\nabla F \widetilde{\nabla R} \nabla G$, где $\widetilde{\nabla R} = (\widetilde{\nabla R}_\mu^\alpha(A, B)) \in \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(X \mathfrak{A}_{m, \mathbb{I}}^2; \mathfrak{A}_m^2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Справедливы равенства $\widetilde{\nabla R}_\mu^1 - \widetilde{\nabla R}_\mu^2 = I_\mu$, $1 \leq \mu \leq m$, где

$$I_\mu = I_\mu(A, B) = [A^\nu - B^\nu, \widetilde{R}_{\nu\mu}(A, B) + F_{\nu\mu}(A) - G_{\nu\mu}(B)].$$

В частности, $I_\mu(A, B) = 0$ для любой пары $(A, B) \in \text{Sol}(\widetilde{\nabla R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что $(\nabla^\nu(A) - \nabla^\nu(B))\Phi = [A^\nu - B^\nu, \Phi]$ для всех $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A})$.

4.5. Преобразование Беклунда полей Янга–Миллса 2. Рассмотрим здесь тройку $\nabla F \nabla R \nabla G = \nabla F(A) \nabla R(A, B) \nabla G(B)$, где $\nabla F(A)$ и $\nabla G(B)$ определены в предыдущем пункте, а дифференциальная связь $\nabla R(A, B) \in \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(X \mathfrak{A}_{m, \mathbb{I}}^2; \mathfrak{A}_m^4)$ с компонентами

$$\nabla R_\mu^1 = \frac{1}{2} \nabla^\nu(A) (F_{\nu\mu}(A) + G_{\nu\mu}(B)) = \frac{1}{2} (\nabla F_\mu(A) + \nabla G_\mu(B) + \widetilde{\nabla R}_\mu^1),$$

$$\nabla R_\mu^2 = \frac{1}{2} \nabla^\nu(A) (F_{\nu\mu}(A) - G_{\nu\mu}(B)) = \frac{1}{2} (\nabla F_\mu(A) - \nabla G_\mu(B) - \widetilde{\nabla R}_\mu^1),$$

$$\nabla R_\mu^3 = \frac{1}{2} \nabla^\nu(B) (F_{\nu\mu}(A) + G_{\nu\mu}(B)) = \frac{1}{2} (\nabla F_\mu(A) + \nabla G_\mu(B) - \widetilde{\nabla R}_\mu^2),$$

$$\nabla R_\mu^4 = \frac{1}{2} \nabla^\nu(B) (F_{\nu\mu}(A) - G_{\nu\mu}(B)) = \frac{1}{2} (\nabla F_\mu(A) - \nabla G_\mu(B) - \widetilde{\nabla R}_\mu^2),$$

где $\widetilde{\nabla R} = (\widetilde{\nabla R}_\mu^\alpha(A, B)) \in \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(X \mathfrak{A}_{m, \mathbb{I}}^2; \mathfrak{A}_m^2)$,

$$\widetilde{\nabla R}_\mu^1 = [A^\nu - B^\nu, G_{\nu\mu}(B)], \quad \widetilde{\nabla R}_\mu^2 = [A^\nu - B^\nu, F_{\nu\mu}(A)], \quad 1 \leq \mu \leq m.$$

По построению

$$\nabla F_\mu(A) = \nabla R_\mu^1 + \nabla R_\mu^2, \quad \nabla G_\mu(B) = \nabla R_\mu^3 - \nabla R_\mu^4, \quad 1 \leq \mu \leq m,$$

так что тройка $\nabla F \nabla R \nabla G = \nabla F(A) \nabla R(A, B) \nabla G(B)$ есть специальная тройка Беклунда (отметим, что пара $(0, 0) \in \text{Sol}(\nabla R)$). Более того, эта тройка эквивалентна тройке $\nabla F \widetilde{\nabla R} \nabla G$.

Пары $(A, B), (\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{A}_m^2)$ называются *эквивалентными*, $(A, B) \sim (\tilde{A}, \tilde{B})$, если

$$\tilde{A}_\mu = S \cdot A_\mu \cdot S^{-1} - \partial_\mu S \cdot S^{-1}, \quad \tilde{B}_\mu = S \cdot B_\mu \cdot S^{-1} - \partial_\mu S \cdot S^{-1}, \quad 1 \leq \mu \leq m,$$

где $S \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathfrak{G})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Пусть $(\tilde{A}, \tilde{B}) \sim (A, B) \in \text{Sol}(\nabla F \nabla R \nabla G)$. Тогда справедливо включение $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \text{Sol}(\nabla F \nabla R \nabla G)$. В частности, множество $\text{Sol}(\nabla F \nabla R \nabla G)$ расслаивается на классы эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться предложениями 7 и 8. Напримр,

$$\tilde{A}^\nu - \tilde{B}^\nu = S \cdot A^\nu \cdot S^{-1} - \partial^\nu S \cdot S^{-1} - S \cdot B^\nu \cdot S^{-1} + \partial^\nu S \cdot S^{-1} = S \cdot (A^\nu - B^\nu) \cdot S^{-1}.$$

Список литературы

- [1] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.
- [2] V. V. Zharinov, *Lecture Notes on Geometrical Aspects of Partial Differential Equations*, Series on Soviet and East European Mathematics, **9**, World Sci., Singapore, 1992.
- [3] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **185**:2 (2015), 227–251.
- [4] В. В. Жаринов, *Матем. сб.*, **136(178)**:2(6) (1988), 274–291.
- [5] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **147**:1 (2006), 3–13.
- [6] A. G. Sergeev, *Mathematics*, **3**:1 (2015), 47–75.
- [7] А. А. Славнов, *ТМФ*, **183**:2 (2015), 163–176.
- [8] I. V. Volovich, *P-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **7**:1 (2015), 56–70.

- [9] M. O. Katanaev, *Phys. Lett. A*, **379**:24–25 (2015), 1544–1548.
- [10] М. О. Катанаев, *Тр. МИАН*, **290** (2015), 149–153.
- [11] W. M. Seiler, *Involution. The Formal Theory of Differential Equations and its Applications in Computer Algebra*, Algorithms and Computation in Mathematics, **24**, Springer, Berlin, 2010.
- [12] J.-F. Pommaret, *Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [13] F. Gesztesy, H. Holden, “The Cole–Hopf and Miura transformations revisited”, *Mathematical Physics and Stochastic Analysis. Essays in Honour of Ludwig Streit* (Lisbon, Portugal, October 1998), eds. S. Albeverio, Ph. Blanchard, L. Ferreira, T. Hida, Y. Kondratiev, R. Vilela Mendes, World Sci., Singapore, 2000, 198–214, arXiv: solv-int/9812025.
- [14] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **180**:2 (2014), 217–233.
- [15] K. B. Marathe, G. Martucci, *The Mathematical Foundations of Gauge Theories*, Studies in Mathematical Physics, **5**, Elsevier, Amsterdam, 1992.

Поступила в редакцию 14.04.2016