Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ч. Жуковский, И. В. Мамсуров, Однопетлевое эффективное действие для калибровочного поля в искривленном пространстве-времени, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 1, 123–129

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf921>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 18:04:19

© 1998 г.

В. Ч. Жуковский*, И. В. Мамсуров*

ОДНОПЕТЛЕВОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ КАЛИБРОВОЧНОГО ПОЛЯ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Рассмотрен однопетлевой вклад глюонных флуктуаций в эффективное действие калибровочного поля на фоне постоянного и однородного абелевоподобного внешнего поля в пространстве с отличной от нуля кривизной. Вычислены действительная и мнимая части эффективного действия. Показано, что несмотря на наличие конечной кривизны пространства хромомагнитный вакуум остается нестабильным.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было показано существование отличного от нуля минимума эффективного потенциала в присутствии постоянного абелевоподобного калибровочного поля магнитного типа в неабелевых калибровочных теориях, что свидетельствовало о возможности формирования пертурбативного вакуума в таких теориях. Эта модель получила название хромомагнитного вакуума. При этом, однако, возникающие в спектре глюонов мнимые значения энергии (тахинные моды) при суммировании приводили к существованию мнимой части эффективного лагранжиана. Вакуум, таким образом, оказывался нестабильным, поскольку присутствие мнимой части в эффективном лагранжиане равносильно экспоненциальному убыванию оператора эволюции [2, 3]. Чтобы устранить указанную нестабильность, предлагались различные модификации модели хромомагнитного вакуума. Так, в работах [4, 5] речь шла о кварк-глюонной плазме при конечной температуре. При этом, помимо фонового хромомагнитного поля, здесь вводилась еще отличная от нуля четвертая компонента векторного потенциала. В статье [6] было показано, что стабилизация возможна лишь в случае таких калибровочных групп и полей, для которых число независимых инвариантов поля превышает единицу, а также, когда размерность пространства-времени больше четырех.

Ниже мы рассмотрим модель хромомагнитного вакуума, связанную с наличием отличной от нуля кривизны в пространственно-временном континууме. Данная модель была впервые рассмотрена в работе [7], где четырехмерное пространство, в частности, представлялось как прямое произведение двумерной сферы и двумерной плоскости.

*Московский государственный университет, Москва, Россия

Авторы работы [7] утверждали, что с увеличением кривизны мнимая часть лагранжиана уменьшается и при определенном значении радиуса сферы обращается в нуль. Нами были получены выражения для действительной и мнимой частей эффективного лагранжиана в двух предельных случаях малой и большой кривизн. В отличие от [7] наше исследование показало, что даже с учетом конечной кривизны мнимая часть принципиально не может обратиться в нуль. Кроме того, как в мнимой, так и в действительной частях для больших значений радиуса кривизны возникают поправки, по-видимому, не учтенные в статье [7].

2. ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ

Рассмотрим производящий функционал модели глюодинамики в случае калибровочной группы $SU(2)$ в пространстве-времени $S^2 \times R^2$:

$$Z[\bar{A}, j] = \int da_\mu^a d\chi d\bar{\chi} \exp \left[- \int d^4x \sqrt{g} (L + j^{\alpha\mu} a_\mu^a) \right], \quad (1)$$

где лагранжиан калибровочного поля A_μ в присутствии внешнего (фонового) поля имеет вид

$$L = \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2\xi} (\bar{D}_\mu^{ab} a^{b\mu})^2 + \bar{\chi}_a (\bar{D}^2)_{ab} \chi_b. \quad (2)$$

Здесь $F_{\mu\nu}^a = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu - ig(T^a)^{bc} A_\mu^b A_\nu^c$, $\bar{D}_\mu^{ab} = \delta^{ab} \nabla_\mu - ig(T^c)^{ab} \bar{A}_\mu^c$, $A_\mu^a = \bar{A}_\mu^a + a_\mu^a$, где $\bar{A}_\mu^a$ – фоновое поле, a_μ^a – квантовые флуктуации глюонного поля, χ , $\bar{\chi}$ – поля духов.

Проведем разложение лагранжиана, учитывая члены, квадратичные по a_μ^a , что соответствует однопетлевому приближению, после чего континуальный интеграл примет гауссов вид. Как известно [8], такой интеграл по глюонным флуктуациям выражается через определитель стоящего под знаком экспоненты оператора в степени $-1/2$, а интеграл по полям духов равен самому определителю. Принимая во внимание то, что эффективное действие Γ связано с Z соотношением $Z = \exp(\Gamma)$, а также то, что логарифм определителя равен следу от логарифма, получим, что в однопетлевом приближении для эффективного действия [9]

$$\Gamma^{(1)}[\bar{A}] = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln[\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}] - \text{Tr} \ln[(-\bar{D}^2)^{ab}], \quad (3)$$

где первое слагаемое отвечает глюонному вкладу, а второе – вкладу духов. При этом оператор Θ выражается следующим образом:

$$\Theta_{\mu\nu}^{ab} = -g_{\mu\nu} (\bar{D}_\lambda \bar{D}^\lambda)^{ab} + 2ig(T^c)^{ab} \bar{F}_{\mu\nu}^c + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) (\bar{D}_\mu \bar{D}_\nu)^{ab} - \delta^{ab} R_{\mu\nu}. \quad (4)$$

Здесь T^a – генераторы группы $SU(2)$, взятые в присоединенном представлении. Положим в дальнейшем $\xi = 1$, таким образом, третий член в (4) исчезнет. Зададим потенциалы внешнего поля абелевоподобным образом:

$$\bar{A}_\mu^a = n^a \bar{A}_\mu, \quad \bar{F}_{\mu\nu}^a = n^a \bar{F}_{\mu\nu}, \quad (5)$$

где n^a — единичный вектор вдоль определенного направления в цветовом пространстве. В этом случае

$$\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} = -g_{\mu\nu} [\nabla_\lambda - ig(n^c T^c) \bar{A}_\lambda]^{2^{ab}} + ig(n^c T^c)^{ab} \bar{F}_{\mu\nu} - \delta^{ab} R_{\mu\nu}. \quad (6)$$

Диагонализуем оператор по цветовым индексам. Собственные значения цветовых матриц $(n^c T^c)$ обозначим через ν^a ($a = 1, 2, 3$). Определяя их, получим $|\nu^a| = \{1, 1, 0\}$. Тогда оператор (6) примет вид

$$\bar{\Theta}_{\mu\nu}^a = -g_{\mu\nu} (\nabla_\lambda - ig\nu^a \bar{A}_\lambda)^2 + ig\nu^a \bar{F}_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}, \quad a = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Теперь зададим фоновое хромоманнитное поле. Мы потребуем, чтобы оно было ковариантно-постоянным: $\nabla_\mu \bar{A}^\mu = 0$. Упорядочив координаты в нашем пространстве следующим образом: θ, ϕ, x_1, x_2 , найдем, что этому условию удовлетворяет, например, потенциал в калибровке

$$\bar{A}_\mu = \left(0, 0, -\frac{1}{2}x_2 H, \frac{1}{2}x_1 H\right), \quad H = \text{const}, \quad (8)$$

задающий постоянное и однородное хромоманнитное поле H . Тогда получим

$$\begin{aligned} \Delta^a &\equiv (\nabla_\lambda - ig\nu^a \bar{A}_\lambda)^2 = \nabla^2 + ig\nu^a H(x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1) - g^2(\nu^a)^2 H^2(x_1^2 + x_2^2), \\ \nabla^2 &= \nabla_{s^2}^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2. \end{aligned} \quad (9)$$

3. СПЕКТР

Спектр оператора (9) найти достаточно просто. Очевидно, что он будет равен сумме спектра ротатора и спектра гармонического осциллятора с частотой

$$\omega^2 \equiv gH|\nu^a|. \quad (10)$$

Таким образом, получаем, что

$$\Delta^a = \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 2\omega^a \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbf{N}, \quad l \in \mathbf{N}. \quad (11)$$

Проведем диагонализацию по пространственно-временным индексам. Учитывая, что

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \text{diag}(g_{\theta\theta}, g_{\phi\phi}, 1, 1), \\ R_{\mu\nu} &= \begin{cases} \frac{1}{\rho^2} g_{\mu\nu}, & \mu, \nu \in S^2, \\ 0, & \mu, \nu \in R^2, \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

в согласии с формулой (7) получаем следующий результат:

$$\bar{\Theta}_{\mu\nu}^a = \text{diag}\left(-g_{\theta\theta}\left(\Delta^a + \frac{1}{\rho^2}\right), -g_{\phi\phi}\left(\Delta^a + \frac{1}{\rho^2}\right), -\Delta^a + 2g|\nu^a|H, -\Delta^a - 2g|\nu^a|H\right). \quad (13)$$

Соотношение (13) можно переписать в общем виде следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{\Theta}_\mu^a &\equiv -g_{\mu\mu}(\Delta^a + m_\mu^a), \\ m_\theta^a &\equiv m_\phi^a = \frac{1}{\rho^2}, \quad m_1^a = -m_2^a = -2\omega^a.\end{aligned}\quad (14)$$

Собственные значения оператора, стоящего в круглых скобках, имеют вид

$$\frac{1}{\rho^2}l(l+1) + 2\omega^a\left(n + \frac{1}{2}\right) - m_\mu^a \equiv \Lambda_\mu^a(n, l), \quad n \in \mathbf{N}, \quad l \in \mathbf{N}, \quad (15)$$

причем кратность вырождения $d_l = 2l + 1$. После проведения вышеуказанных преобразований получаем окончательную формулу для эффективного действия

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)}[\bar{A}] &= \frac{\Omega}{2\pi(4\pi^2\rho^2)} \sum_a \omega^a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \times \\ &\times \left(\frac{1}{2} \sum_{\mu=\theta, \phi, 1, 2} \ln[\Lambda_\mu^a(n, l)] - \ln[\Lambda^a(n, l)] \right),\end{aligned}\quad (16)$$

где

$$\Lambda^a(n, l) = \frac{1}{\rho^2}l(l+1) + 2\omega^a\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

и

$$\Omega \equiv \int \sqrt{g} d^4x = 4\pi\rho^2 \int dx_1 dx_2$$

есть пространственно-временной объем. Выражение (16) зависит от некоторого безразмерного параметра χ^a , представляющего собой произведение двух размерных величин ω^a и ρ^2 :

$$\chi^a = \omega^a \rho^2. \quad (17)$$

Мы рассмотрим случаи больших и малых значений параметра (17), когда можно получить простой конечный результат.

4. СЛУЧАЙ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРА

В дальнейшем воспользуемся представлением (оно справедливо с учетом вычитания на нижнем пределе)

$$\ln A = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-sA}, \quad \operatorname{Re} A > 0. \quad (18)$$

Положим $\chi \gg 1$. В соответствии с формулами (18) и (15) можно написать, что

$$\ln \Lambda_\mu^a = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp \left\{ -s \left(\frac{1}{\rho^2}l(l+1) + 2\omega^a\left(n + \frac{1}{2}\right) - m_\mu^a \right) \right\}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (16) и внося сумму по n под знак интеграла, получаем для $\mu \neq 2$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp \left\{ -s \left(\frac{l(l+1)}{\rho^2} - m_\mu^a \right) \right\} \sum_{n=0}^\infty e^{-2s\omega^a(n+1/2)} = \\ = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{\exp \left\{ -s \left(\frac{l(l+1)}{\rho^2} - m_\mu^a \right) \right\}}{\text{sh}(s\omega^a)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Если же $\mu = 2$, то для первых нескольких значений l при $n = 0$ аргумент логарифма будет отрицательным. Это даст вклад в мнимую часть

$$\frac{\Omega}{8\pi^2\rho^2} \sum_a \omega_a(-i\pi) \sum_{l=0}^{L-1} (2l+1), \quad (21)$$

где L — целое число, удовлетворяющее неравенствам $L(L-1) < \chi < L(L+1)$. Выделяя целую $p = [\sqrt{\chi}]$ и дробную $\epsilon = \sqrt{\chi} - p$ части параметра, получаем

$$\begin{aligned} \text{Im } \Gamma^{(1)}[\bar{A}] = -\frac{\Omega}{8\pi} (gH)^2 \left(1 - \frac{2}{p} \alpha \right), \\ \alpha = \begin{cases} -\epsilon, & \epsilon < \frac{1}{2}, \\ 1 - \epsilon, & \epsilon > \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь рассмотрим действительную часть. Проведем суммирование по l , используя формулу Эйлера–Маклорена [10]. Это оправдано, поскольку в интеграле по s из-за быстрого убывания экспоненты существенна лишь та область значений переменной, где $s/\rho^2 < 1$. Рассмотрим сначала те члены суммы (16), где величина, стоящая под знаком логарифма, положительна:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^\infty (2l+1) \exp \left\{ -\frac{sl(l+1)}{\rho^2} \right\} &= \int_0^\infty dl (2l+1) \exp \left\{ -\frac{sl(l+1)}{\rho^2} \right\} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \frac{s}{\rho^2} + \dots = \\ &= \frac{\rho^2}{s} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \frac{s}{\rho^2} + \dots, \quad \mu \neq 2, \\ \sum_{l=L}^\infty (2l+1) \exp \left\{ -\frac{sl(l+1)}{\rho^2} \right\} &= \frac{\rho^2}{s} \exp \left\{ -\frac{sL(L+1)}{\rho^2} \right\} + \\ &+ \left(L + \frac{1}{3} \right) \exp \left\{ \frac{-sL(L+1)}{\rho^2} \right\}, \quad \mu = 2. \end{aligned} \quad (23)$$

К этому следует добавить вклад от первых L слагаемых при $\mu = 2$, который одновременно дает и рассмотренную нами мнимую часть, поскольку $\ln A = -i\pi + \ln(-A)$, если $A < 0$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{L-1} (2l+1) \exp \left\{ \frac{sl(l+1)}{\rho^2} \right\} &= \frac{\rho^2}{s} \left(\exp \left\{ \frac{sL(L-1)}{\rho^2} \right\} - 1 \right) + \\ &+ \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3} + L \right) \exp \left\{ \frac{sL(L-1)}{\rho^2} \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя формулы (23) и (24) в выражение (16) и используя формулу (20), окончательно получаем для регуляризованной действительной части эффективного действия следующее представление:

$$\frac{\Gamma^{R(1)}[\bar{A}]}{\Omega} = \frac{1}{4\pi^2} (gH)^2 \left\{ \frac{11}{12} \left(\ln \frac{gH}{\mu^2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\gamma - 1}{p} \right\}.$$

Здесь γ – постоянная Эйлера, $p = [\sqrt{\rho^2 gH}]$, а μ – точка нормировки.

Теперь обсудим полученные результаты. В отношении мнимой части следует подчеркнуть, что она не может обратиться в нуль, поскольку $2a/p$ всегда меньше 1. Этот вывод отличен от результата, полученного в работе [7]. Результат для действительной части также отличается от приведенного в цитируемой работе. Первая поправка к лагранжиану для случая плоского пространства, когда $\rho \rightarrow \infty$, оказывается (если считать, что при больших значениях параметра целую часть можно заменить самим параметром) пропорциональной $(\rho^2 gH)^{-1/2}$, в то время как в статье [7] она пропорциональна $(\rho^2 gH)^{-1}$. Причина этого заключается в следующем. Используя формулу Эйлера–Маклорена, мы заменяем сумму по дискретным значениям квантовых чисел интегралом по непрерывному спектру с поправками, зависящими от степеней входящего в экспоненту параметра начиная с нулевой (значение самого интеграла пропорционально параметру в степени минус единица). При вычислении действительной части, как было показано, для $\mu = 2$ вклад первых L слагаемых до верхнего предела $l = L - 1$ берется отдельно. Оставшийся вклад – это сумма всех остальных слагаемых начиная с $l = L$, где L – целое число, лежащее в интервале

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\chi^a + \frac{1}{4}} < L < \frac{1}{2} + \sqrt{\chi^a + \frac{1}{4}}.$$

Как следует из сравнения формул (23) и (24), когда мы суммируем эти вклады, из-за того, что в показатель экспоненты входит в одном случае число $L(L - 1)$, а в другом – число $L(L + 1)$ (интервал между этими числами возрастает с ростом χ^a), члены, пропорциональные $\sqrt{\chi^a}$, не сокращаются, что и приводит к вышеозначенной поправке.

5. СЛУЧАЙ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРА

Пусть теперь значение параметра $\chi^a \ll 1$. Мы ограничимся нулевым приближением (т.е. основным членом разложения по этому параметру) для действительной и мнимой частей. Все соображения в отношении применимости формулы Эйлера–Маклорена, приведенные для предыдущего случая, остаются в силе. Однако теперь отрицательная величина под знаком логарифма появляется в слагаемых, соответствующих $\mu = \theta, \phi$, когда $l = 0$, а n изменяется от 0 до $N - 1$, где N удовлетворяет условию

$$2\omega^a \left(N - \frac{1}{2} \right) < \frac{1}{\rho^2} < 2\omega^a \left(N + \frac{1}{2} \right).$$

Кроме того, единственное слагаемое, соответствующее значению $\mu = 2$ (при этом $l = 0$ и $n = 0$), будет содержать под знаком логарифма величину $-\omega^a$. Однако в нулевом приближении этим слагаемым надо пренебречь. Число N тогда можно положить равным $1/\chi^a$. Учитывая все это, для действительной части регуляризованного действия получаем

$$\operatorname{Re} \Gamma^{(1)}[\bar{A}] = \frac{\Omega}{8\pi^2} (gH)^2 \left\{ \frac{1}{\rho^2 gH} \ln \frac{\mu^2}{gH} - \frac{23}{12} \ln \frac{\mu^2}{gH} - \ln(\rho^2 gH) \right\}.$$

Мнимая же часть не зависит от gH в нулевом приближении:

$$\operatorname{Im} \Gamma^{(1)}[\bar{A}] = -i \frac{\Omega}{4\pi\rho^4}.$$

Из этих результатов видно, что ни при малых, ни при больших значениях параметра нельзя ожидать обращения в нуль мнимой части эффективного действия. Более того, из общей формулы (16) видно, что мнимая часть пропорциональна сумме некоторого числа слагаемых, равных $-i\pi$. Легко установить, с другой стороны, что при $1 < \chi^a < 2$ минимальное значение этого числа равно 1. Таким образом, в рамках рассматриваемой модели вакуум остается неустойчивым.

Список литературы

- [1] *G. K. Savvidy.* Phys. Lett. B. 1977. V. 71. P. 133.
- [2] *N. K. Nielsen, P. Olesen.* Nucl. Phys. B. 1976. V. 144. P. 376.
- [3] *А. А. Соколов, И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, А. В. Борисов.* Калибровочные поля. М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [4] *D. Ebert, V. Ch. Zhukovskii, A. S. Vshivtsev.* Thermodynamic potential with condensate fields in an SU(2) model of QCD. DESY 96-102, June 1996.
- [5] *A. O. Starinets, A. S. Vshivtsev, V. Ch. Zhukovskii.* Phys. Lett. B. 1994. V. 322. P. 403.
- [6] *G. Avramidy.* J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 4. P. 1557.
- [7] *E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo.* Phys. Rev. D. 1996. V. 54. № 6. P. 4152.
- [8] *А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев.* Введение в теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
- [9] *I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, I. L. Shapiro.* Effective Action in Quantum Gravity. Bristol: IOP, 1992.
- [10] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 19.V.1998 г.