Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Славнов, Мультикоммутационные соотношения
в моделях с $\mathfrak{gl}(2|1)$ -симметрией, *ТМФ*, 2016, том 189, но-
мер 2, 256–278

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9210>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:52:54

© 2016 г.

Н. А. Славнов*

МУЛЬТИКОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ В МОДЕЛЯХ С $\mathfrak{gl}(2|1)$ -СИММЕТРИЕЙ

Рассматриваются квантовые интегрируемые модели с $\mathfrak{gl}(2|1)$ -симметрией. Получен набор мультикоммутационных соотношений между матричными элементами матрицы монодромии. Данные мультикоммутационные соотношения позволяют получить различные представления для векторов Бете.

Ключевые слова: анзац Бете, матрица монодромии, коммутационные соотношения.

DOI: 10.4213/tmf9210

1. ВВЕДЕНИЕ

Алгебраический анзац Бете является эффективным методом нахождения спектров квантовых гамильтонианов [1]–[3]. Известно также, что этот метод хорошо приспособлен к вычислению корреляционных функций квантовых моделей [4]–[7]. В рамках алгебраического анзаца Бете последняя проблема сводится к вычислению скалярных произведений векторов Бете. В свою очередь, упомянутые скалярные произведения являются частным случаем мультикоммутационных соотношений (МКС) для матричных элементов матрицы монодромии. Темой настоящей статьи являются МКС в моделях, основанных на алгебре $\mathfrak{gl}(2|1)$.

В основе моделей, которые решаются с помощью алгебраического анзаца Бете, лежит RTT -соотношение

$$R(u, v) \cdot (T(u) \otimes \mathbb{I}) \cdot (\mathbb{I} \otimes T(v)) = (\mathbb{I} \otimes T(v)) \cdot (T(u) \otimes \mathbb{I}) \cdot R(u, v). \quad (1.1)$$

Здесь $R(u, v)$ – R -матрица, действующая в тензорном произведении $V \otimes V$ вспомогательных векторных пространств V . Матрица монодромии $T(u)$ действует в пространстве $V \otimes \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство квантовой модели. Соотношение (1.1) выполнено в тензорном произведении $V \otimes V \otimes \mathcal{H}$. Оно задает коммутационные соотношения между матричными элементами $T_{ij}(u)$ матрицы монодромии $T(u)$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: nslavnov@mi.ras.ru

В то же время для вычисления скалярных произведений и формфакторов необходимо знать, чему равен коммутатор вида

$$[T_{ij}(u_1) \dots T_{ij}(u_n), T_{kl}(v_1) \dots T_{kl}(v_m)]. \quad (1.2)$$

С формальной точки зрения, зная $[T_{ij}(u), T_{kl}(v)]$, коммутатор в (1.2) можно вычислить. Однако прямолинейное использование RTT -соотношения приводит в данном случае к крайне сложным выражениям, которые едва ли можно использовать для дальнейшего анализа.

В $\mathfrak{gl}(2)$ -инвариантных моделях и их q -деформациях МКС хорошо известны [5], [8], [9]. Некоторые обобщения на модели с $\mathfrak{gl}(3)$ -инвариантной R -матрицей рассматривались в работе [10]. В настоящей работе мы имеем дело с моделями, основанными на супералгебре $\mathfrak{gl}(2|1)$. Среди моделей, описываемых этой алгеброй, наиболее известной является суперсимметричная t - J модель, играющая важную роль в физике твердого тела [11], [12]. Алгебраическая структура этой модели, а также применение к ней алгебраического анзаца Бете рассматривались в статьях [13]–[18].

Как уже объяснялось выше, МКС необходимы для вычисления скалярных произведений векторов Бете. Однако в моделях с высоким рангом симметрии даже построение векторов Бете является нетривиальной задачей. Эта проблема рассматривалась с помощью различных методов в работах [10], [19]–[23]. В работе [24] было получено обобщение следовой формулы для векторов Бете [23] на случай супералгебр $\mathfrak{gl}(m|n)$. Недавно в работе [25] были найдены явные представления для векторов Бете в моделях с $\mathfrak{gl}(2|1)$ - и $\mathfrak{gl}(1|2)$ -симметриями. В настоящей работе мы используем метод МКС и доказываем эквивалентность различных представлений для $\mathfrak{gl}(2|1)$ -векторов Бете, а кроме того, получаем для них новые формулы.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы вводим модель, которую собираемся рассматривать, и описываем необходимые обозначения. Раздел 3 посвящен простейшим МКС. В разделе 4 формулируются более сложные МКС, с помощью которых в разделе 5 доказываются различные представления для векторов Бете. В разделах 6, 7 мы доказываем МКС, сформулированные в разделе 4. В приложениях А и Б собраны некоторые тождества, необходимые для доказательств.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для моделей, основанных на алгебре $\mathfrak{gl}(2|1)$, вспомогательное векторное пространство V является $\mathbb{Z}_2$ -градуированным пространством $\mathbb{C}^{2|1}$ с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$. Мы будем называть векторы e_1, e_2 четными, а вектор e_3 – нечетным. В соответствии с этим мы вводим функцию четности, определенную на наборе индексов: $[1] = [2] = 0$ и $[3] = 1$.

R -матрица, фигурирующая в соотношении (1.1), имеет вид

$$R(u, v) = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + g(u, v)\mathbb{P}, \quad g(u, v) = \frac{c}{u - v}, \quad (2.1)$$

где c – некоторая константа, а $\mathbb{P}$ – градуированная матрица перестановки [26]. Тензорное произведение в равенстве (1.1) также является градуированным и приводит к набору коммутационных соотношений между матричными элементами T_{ij} матрицы монодромии:

$$[T_{ij}(u), T_{kl}(v)] = (-1)^{[i]([k]+[l])+[k][l]} g(u, v) (T_{kj}(v)T_{il}(u) - T_{kj}(u)T_{il}(v)), \quad (2.2)$$

где мы ввели градуированный коммутатор

$$[T_{ij}(u), T_{kl}(v)] = T_{ij}(u)T_{kl}(v) - (-1)^{([i]+[j])([k]+[l])} T_{kl}(v)T_{ij}(u). \quad (2.3)$$

Переобозначая в формуле (2.2) индексы как $i \leftrightarrow k$, $j \leftrightarrow l$ и проводя замену $u \leftrightarrow v$, мы получаем еще одно коммутационное соотношение

$$[T_{ij}(u), T_{kl}(v)] = (-1)^{[l]([i]+[j])+[i][j]} g(u, v) (T_{il}(u)T_{kj}(v) - T_{il}(v)T_{kj}(u)). \quad (2.4)$$

Формулы (2.2), (2.4) являются отправной точкой нашего исследования.

Перейдем теперь к описанию обозначений, которыми мы будем пользоваться далее. В основном мы будем придерживаться тех же обозначений, которые мы использовали в статьях о моделях с $\mathfrak{gl}(3)$ -симметрией (см., например, [10]). Помимо функции $g(x, y)$ мы также вводим две функции

$$f(x, y) = 1 + g(x, y) = \frac{x - y + c}{x - y}, \quad h(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{x - y + c}{c}. \quad (2.5)$$

Введенные функции обладают следующими очевидными свойствами:

$$g(x, y) = -g(y, x), \quad h(x, y) = \frac{1}{g(x, y - c)}, \quad f(x - c, y) = \frac{1}{f(y, x)}. \quad (2.6)$$

Распространив $\mathbb{Z}_2$ -градуировку на операторы T_{ij} с помощью соотношения

$$[T_{ij}(u)] = [i] + [j] \pmod{2}, \quad (2.7)$$

в дальнейшем будем различать четные (т. е. $[T_{ij}(u)] = 0$) и нечетные (т. е. $[T_{ij}(u)] = 1$) операторы. Из коммутационных соотношений (2.2), (2.4) следует, что четные операторы $T_{ij}(u)$ коммутируют сами с собой при произвольных значениях аргумента u . С другой стороны, для нечетных операторов $T_{ij}(u)$ мы имеем

$$\begin{aligned} h(v_1, v_2)T_{j3}(v_1)T_{j3}(v_2) &= h(v_2, v_1)T_{j3}(v_2)T_{j3}(v_1), \\ h(v_2, v_1)T_{3j}(v_1)T_{3j}(v_2) &= h(v_1, v_2)T_{3j}(v_2)T_{3j}(v_1), \end{aligned} \quad j = 1, 2. \quad (2.8)$$

поэтому удобно ввести симметричные произведения нечетных операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\bar{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Определим

$$\mathbb{T}_{j3}(\bar{v}) = \frac{T_{j3}(v_1) \dots T_{j3}(v_n)}{\prod_{n \geq \ell > m \geq 1} h(v_\ell, v_m)}, \quad j = 1, 2, \quad (2.9)$$

и

$$\mathbb{T}_{3k}(\bar{v}) = \frac{T_{3k}(v_1) \dots T_{3k}(v_n)}{\prod_{n \geq \ell > m \geq 1} h(v_m, v_\ell)}, \quad k = 1, 2. \quad (2.10)$$

Очевидно, что введенные операторные произведения являются симметричными по параметрам $\bar{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Сформулируем теперь соглашение об обозначениях. Наборы переменных будут обозначаться чертой сверху: $\bar{w}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ и т. п. Из соображений общности мы будем иногда использовать это обозначение даже в тех случаях, когда набор состоит из

одного элемента. Отдельные элементы наборов будут обозначаться латинскими индексами: w_j , u_k и т. п. Подмножества, дополняющие отдельный элемент до полного набора, обозначаются как $\bar{u}_k$: $\bar{u}_k = \bar{u} \setminus u_k$. Как правило, количество элементов в наборах не будет явно задаваться в формулах, однако мы будем их указывать в специальных комментариях к формулам. Запись $\bar{u} \pm c$ означает, что каждый элемент множества $\bar{u}$ сдвинут на $\pm c$: $\bar{u} \pm c = \{u_1 \pm c, \dots, u_n \pm c\}$.

Подмножества (включая подмножества, состоящие из одного элемента) обозначаются греческими индексами: $\bar{u}_\alpha$, $\bar{v}_\sigma$, $\bar{w}_\beta$ и т. п. Для обозначения объединения двух множеств мы будем использовать фигурные скобки: $\bar{w} = \{\bar{u}, \bar{v}\}$. Подмножество, дополнительное к подмножеству $\bar{u}_\alpha$, обозначается как $\bar{u}_{\bar{\alpha}}$: $\bar{u}_{\bar{\alpha}} = \bar{u} \setminus \bar{u}_\alpha$. Запись $\bar{u} \Rightarrow \{\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}\}$ означает, что набор $\bar{u}$ разбит на два подмножества $\bar{u}_\alpha$ и $\bar{u}_{\bar{\alpha}}$. Аналогично запись $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_\beta, \bar{v}_\gamma\}$ означает, что набор $\bar{v}$ разбит на три подмножества. При этом $\{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_\beta\} = \bar{v}_{\bar{\gamma}}$, $\{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_\gamma\} = \bar{v}_{\bar{\beta}}$ и $\{\bar{v}_\gamma, \bar{v}_\beta\} = \bar{v}_{\bar{\alpha}}$. Мы предполагаем, что элементы в каждом наборе переменных упорядочены таким образом, что последовательность их индексов является строго возрастающей. Такое упорядочение будем называть естественным порядком.

Во избежание слишком громоздких формул мы используем сокращенные обозначения для произведения коммутирующих операторов. Аналогично формулам (2.9), (2.10) мы вводим

$$T_{ij}(\bar{u}) = \prod_{u_k \in \bar{u}} T_{ij}(u_k) \quad \text{для} \quad [i] + [j] = 0 \pmod{2}. \quad (2.11)$$

Такое же соглашение будет действовать для произведений функций g , f , h . А именно, если такая функция зависит от набора переменных, это означает, что следует взять произведение по соответствующему набору. Например,

$$\begin{aligned} h(v, \bar{u}) &= \prod_{u_j \in \bar{u}} h(v, u_j), & f(\bar{u}, \bar{v}) &= \prod_{u_j \in \bar{u}} \prod_{v_k \in \bar{v}} f(u_j, v_k), \\ g(\bar{v}_\alpha, \bar{v}_{\bar{\alpha}}) &= \prod_{v_j \in \bar{v}_\alpha} \prod_{v_k \in \bar{v}_{\bar{\alpha}}} g(v_j, v_k). \end{aligned} \quad (2.12)$$

В заключение этого раздела мы введем статистическую сумму $K(\bar{u}|\bar{v})$ шести-вершинной модели с граничным условием доменной стенки (ССДС) [27], [28]. Эта функция играет очень важную роль в МКС. Она зависит от двух наборов переменных $\bar{u}$ и $\bar{v}$ таких, что $\# \bar{u} = \# \bar{v}$. По определению $K(\emptyset|\emptyset) = 1$. В противном случае, если $\# \bar{u} = \# \bar{v} = n$, $n > 0$, функция $K(\bar{u}|\bar{v})$ имеет следующее представление в виде определителя:

$$K(\bar{u}|\bar{v}) = \Delta'_n(\bar{u}) \Delta_n(\bar{v}) h(\bar{u}, \bar{v}) \det_n \left(\frac{g(u_j, v_k)}{h(u_j, v_k)} \right), \quad (2.13)$$

где $\Delta'_n(\bar{u})$ и $\Delta_n(\bar{v})$ суть

$$\Delta'_n(\bar{u}) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} g(u_j, u_k), \quad \Delta_n(\bar{v}) = \prod_{n \geq j > k \geq 1} g(v_j, v_k). \quad (2.14)$$

Легко видеть, что функция $K(\bar{u}|\bar{v})$ симметрична по $\bar{u}$ и симметрична по $\bar{v}$, но $K(\bar{u}|\bar{v}) \neq K(\bar{v}|\bar{u})$. В приложении А приведены некоторые полезные свойства ССДС.

3. МКС ОПЕРАТОРОВ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ОДНОЙ СТРОКЕ ИЛИ ОДНОМУ СТОЛБЦУ

В этом разделе мы рассматриваем относительно простые МКС. Они возникают, когда операторы T_{ij} и T_{kl} принадлежат одной и той же строке или одному и тому же столбцу матрицы монодромии, т. е. либо $i = k$, либо $j = l$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\# \bar{u} = n$, $\# \bar{v} = m$ и $\{\bar{u}, \bar{v}\} = \bar{w}$. Тогда при $i, j, k < 3$

$$T_{ij}(\bar{u})T_{ik}(\bar{v}) = (-1)^n \sum K(\bar{w}_\alpha | \bar{u} + c) f(\bar{w}_\alpha, \bar{w}_\alpha) T_{ik}(\bar{w}_\alpha) T_{ij}(\bar{w}_\alpha). \quad (3.1)$$

При $i, j < 3$

$$\mathbb{T}_{i3}(\bar{u})\mathbb{T}_{j3}(\bar{v}) = (-1)^n h(\bar{v}, \bar{u}) \sum K(\bar{u} | \bar{w}_\alpha + c) g(\bar{w}_\alpha, \bar{w}_\alpha) \mathbb{T}_{j3}(\bar{w}_\alpha) \mathbb{T}_{i3}(\bar{w}_\alpha), \quad (3.2)$$

$$T_{ij}(\bar{u})\mathbb{T}_{i3}(\bar{v}) = \sum h(\bar{w}_\alpha, \bar{u}) g(\bar{w}_\alpha, \bar{w}_\alpha) \mathbb{T}_{i3}(\bar{w}_\alpha) T_{ij}(\bar{w}_\alpha), \quad (3.3)$$

$$\mathbb{T}_{i3}(\bar{u})T_{ij}(\bar{v}) = \sum h(\bar{v}, \bar{w}_\alpha) g(\bar{w}_\alpha, \bar{w}_\alpha) T_{ij}(\bar{w}_\alpha) \mathbb{T}_{i3}(\bar{w}_\alpha). \quad (3.4)$$

При $i < 3$

$$T_{33}(\bar{u})\mathbb{T}_{3i}(\bar{v}) = \sum h(\bar{u}, \bar{w}_\alpha) g(\bar{w}_\alpha, \bar{w}_\alpha) \mathbb{T}_{3i}(\bar{w}_\alpha) T_{33}(\bar{w}_\alpha), \quad (3.5)$$

$$\mathbb{T}_{3i}(\bar{u})T_{33}(\bar{v}) = \sum h(\bar{w}_\alpha, \bar{v}) g(\bar{w}_\alpha, \bar{w}_\alpha) T_{33}(\bar{w}_\alpha) \mathbb{T}_{3i}(\bar{w}_\alpha). \quad (3.6)$$

В этих формулах все суммы берутся по разбиениям $\bar{w} \Rightarrow \{\bar{w}_\alpha, \bar{w}_\alpha\}$ при условиях $\# \bar{w}_\alpha = n$ и $\# \bar{w}_\alpha = m$.

Предложение 3.1 задает коммутационные соотношения для операторов из одной строки матрицы монодромии. Чтобы получить коммутационные соотношения для операторов из одного столбца, достаточно воспользоваться следующим антиморфизмом алгебры (1.1) [25]:

$$\begin{aligned} \psi(T_{ij}(u)) &= (-1)^{[i][j]+[i]} T_{ji}(u), \\ \psi(T_{ij}(u)T_{kl}(v)) &= (-1)^{[T_{ij}][T_{kl}]} \psi(T_{kl}(v))\psi(T_{ji}(u)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ясно, что при действии антиморфизма ψ на соотношения (3.1)–(3.6) возникают МКС для операторов, принадлежащих одному и тому же столбцу матрицы монодромии.

Все доказательства соотношений (3.1)–(3.5) аналогичны друг другу. Они проводятся с помощью индукции по количеству операторов, а также с использованием лемм суммирования Б.1, Б.2. Доказательство соотношения (3.1) (основанное на лемме Б.2) было дано в работе [10]. Чтобы продемонстрировать, как работает лемма Б.1, мы рассмотрим доказательство соотношения (3.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из коммутационных соотношений (2.4) следует, что

$$T_{ij}(u)T_{i3}(v) = f(v, u)T_{i3}(v)T_{ij}(u) + g(u, v)T_{i3}(u)T_{ij}(v). \quad (3.8)$$

Легко видеть, что эта формула совпадает с соотношением (3.3) при $n = m = 1$. Далее можно воспользоваться двойной индукцией по n и m . Однако в случаях $n = 1$ или $m = 1$ лучше применить стандартную схему алгебраического анзаца

Бете. Пусть для определенности $n = 1$ и $m > 1$. Тогда, пронося оператор $T_{ij}(u)$ через произведение $\mathbb{T}_{i3}(\bar{v})$, мы получаем следующий результат:

$$T_{ij}(u)\mathbb{T}_{i3}(\bar{v}) = \Lambda\mathbb{T}_{i3}(\bar{v})T_{ij}(u) + \sum_{k=1}^m \Lambda_k \mathbb{T}_{i3}(\{\bar{v}_k, u\})T_{ij}(v_k). \quad (3.9)$$

Здесь Λ и Λ_k суть некоторые рациональные коэффициенты, подлежащие определению, и мы напоминаем, что $\bar{v}_k = \bar{v} \setminus v_k$. Очевидно, что для получения слагаемого, пропорционального Λ , оператор $T_{ij}(u)$ должен двигаться направо, сохраняя свой исходный аргумент. Отсюда немедленно получаем, что

$$\Lambda = f(\bar{v}, u). \quad (3.10)$$

Найдем теперь Λ_1 . Произведение $\mathbb{T}_{i3}(\{\bar{v}_1, u\})T_{ij}(v_1)$ возникает тогда и только тогда, когда операторы $T_{ij}(u)$ и $T_{i3}(v_1)$ обмениваются своим аргументами:

$$T_{ij}(u)\mathbb{T}_{i3}(\bar{v}) = T_{ij}(u)T_{i3}(v_1)\frac{\mathbb{T}_{i3}(\bar{v}_1)}{h(\bar{v}_1, v_1)} = g(u, v_1)T_{i3}(u)T_{ij}(v_1)\frac{\mathbb{T}_{i3}(\bar{v}_1)}{h(\bar{v}_1, v_1)} + \text{UWT}, \quad (3.11)$$

где UWT означает *нежелательные слагаемые*. Вообще говоря, мы называем нежелательным слагаемое, которое не дает вклада в искомым коэффициент. В рассматриваемом случае слагаемое, пропорциональное $T_{i3}(v_1)T_{ij}(u)$, является нежелательным, поскольку, двигая оператор $T_{ij}(u)$ через произведение $\mathbb{T}_{i3}(\bar{v}_1)$, мы не можем получить $T_{ij}(v_1)$ в крайнем правом положении.

Теперь, когда оператор $T_{ij}(v_1)$ движется направо, он должен сохранять свой аргумент v_1 . Это дает

$$T_{ij}(u)\mathbb{T}_{i3}(\bar{v}) = g(u, v_1)g(\bar{v}_1, v_1)T_{i3}(u)\mathbb{T}_{i3}(\bar{v}_1)T_{ij}(v_1) + \text{UWT}, \quad (3.12)$$

где мы воспользовались соотношением $g(\bar{v}_1, v_1) = f(\bar{v}_1, v_1)/h(\bar{v}_1, v_1)$. Остается преобразовать произведение $T_{i3}(u)\mathbb{T}_{i3}(\bar{v}_1)$ в произведение $\mathbb{T}_{i3}(\{\bar{v}_1, u\})$, и мы окончательно получаем

$$\Lambda_1 = g(u, v_1)g(\bar{v}_1, v_1)h(\bar{v}_1, u). \quad (3.13)$$

В силу симметрии произведения $\mathbb{T}_{i3}(\bar{v})$ по параметрам $\bar{v}$ мы заключаем, что

$$\Lambda_k = g(u, v_k)g(\bar{v}_k, v_k)h(\bar{v}_k, u). \quad (3.14)$$

Таким образом,

$$T_{ij}(u)\mathbb{T}_{i3}(\bar{v}) = f(\bar{v}, u)\mathbb{T}_{i3}(\bar{v})T_{ij}(u) + \sum_{k=1}^m g(u, v_k)g(\bar{v}_k, v_k)h(\bar{v}_k, u)\mathbb{T}_{i3}(\{\bar{v}_k, u\})T_{ij}(v_k).$$

Сравнивая это равенство с (3.3) при $n = 1$, мы видим, что первое слагаемое в правой части соответствует разбиению на подмножества $\bar{w}_\alpha = u$ и $\bar{w}_{\bar{\alpha}} = \bar{v}$. Остальные слагаемые появляются, если $\bar{w}_\alpha = v_k$ и $\bar{w}_{\bar{\alpha}} = \{\bar{v}_k, u\}$. Таким образом, соотношение (3.3) доказано для $n = 1$ и произвольного m .

Обобщение на случай $n > 1$ совершается с помощью индукции по n . Предположим, что равенство (3.3) выполнено для некоторого $n - 1$. Тогда, действуя последовательно операторами $T_{ij}(\bar{u}_n)$ и $T_{ij}(u_n)$ на произведение $\mathbb{T}_{i3}(\bar{v})$, мы получаем

$$T_{ij}(u_n)T_{ij}(\bar{u}_n)\mathbb{T}_{i3}(\bar{v}) = \sum h(\bar{w}_{\bar{\alpha}}, \bar{u}_n)g(\bar{w}_{\bar{\alpha}}, \bar{w}_{\alpha})h(\bar{w}_{\sigma}, u_n)g(\bar{w}_{\sigma}, \bar{w}_{\rho})\mathbb{T}_{i3}(\bar{w}_{\sigma})T_{ij}(\bar{w}_{\rho})T_{ij}(\bar{w}_{\alpha}). \quad (3.15)$$

Здесь на первом этапе мы имеем разбиения набора $\{\bar{u}_n, \bar{v}\}$ на подмножества $\bar{w}_{\alpha}$ и $\bar{w}_{\bar{\alpha}}$ с условиями $\# \bar{w}_{\alpha} = n - 1$ и $\# \bar{w}_{\bar{\alpha}} = m$. Затем мы объединяем u_n с $\bar{w}_{\bar{\alpha}}$ и разбиваем это подмножество на подмножества $\bar{w}_{\rho}$ и $\bar{w}_{\sigma}$ такие, что $\# \bar{w}_{\rho} = 1$ и $\# \bar{w}_{\sigma} = m$. В итоге мы разбили множество $\bar{w} = \{\bar{u}, \bar{v}\}$ на три подмножества $\{\bar{w}_{\alpha}, \bar{w}_{\rho}, \bar{w}_{\sigma}\}$ таким образом, что $u_n \notin \bar{w}_{\alpha}$. Подставляя $\bar{w}_{\bar{\alpha}} = \{\bar{w}_{\rho}, \bar{w}_{\sigma}\} \setminus u_n$ в выражение (3.15), мы приходим к соотношению

$$T_{ij}(\bar{u})\mathbb{T}_{i3}(\bar{v}) = \sum \frac{h(\bar{w}_{\rho}, \bar{u}_n)h(\bar{w}_{\sigma}, \bar{u}_n)g(\bar{w}_{\rho}, \bar{w}_{\alpha})g(\bar{w}_{\sigma}, \bar{w}_{\alpha})}{h(u_n, \bar{u}_n)g(u_n, \bar{w}_{\alpha})} \times \\ \times h(\bar{w}_{\sigma}, u_n)g(\bar{w}_{\sigma}, \bar{w}_{\rho})\mathbb{T}_{i3}(\bar{w}_{\sigma})T_{ij}(\bar{w}_{\rho})T_{ij}(\bar{w}_{\alpha}). \quad (3.16)$$

Здесь сумма берется по разбиением множества $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ на подмножества $\{\bar{w}_{\alpha}, \bar{w}_{\rho}, \bar{w}_{\sigma}\}$. Заметим, что мы избавились от ограничения $u_n \notin \bar{w}_{\alpha}$. В самом деле, благодаря наличию в знаменателе множителя $g(u_n, \bar{w}_{\alpha})$ все слагаемые суммы обращаются в ноль, как только $u_n \in \bar{w}_{\alpha}$.

Положим $\{\bar{w}_{\alpha}, \bar{w}_{\rho}\} = \bar{w}_{\mu}$. Тогда $\bar{w}_{\sigma} = \bar{w}_{\bar{\mu}}$, и формула (3.16) переходит в

$$T_{ij}(\bar{u})\mathbb{T}_{i3}(\bar{v}) = \sum \frac{h(\bar{w}_{\bar{\mu}}, \bar{u})h(\bar{w}_{\mu}, \bar{u}_n)g(\bar{w}_{\bar{\mu}}, \bar{w}_{\mu})}{h(u_n, \bar{u}_n)g(u_n, \bar{w}_{\mu})} \mathbb{T}_{i3}(\bar{w}_{\bar{\mu}})T_{ij}(\bar{w}_{\mu}) \left(g(\bar{w}_{\rho}, \bar{w}_{\alpha}) \frac{g(u_n, \bar{w}_{\rho})}{h(\bar{w}_{\alpha}, \bar{u}_n)} \right). \quad (3.17)$$

Теперь мы можем сказать, что сначала множество $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ разбито на подмножества $\{\bar{w}_{\mu}, \bar{w}_{\bar{\mu}}\}$, а затем подмножество $\bar{w}_{\mu}$ разбито на подмножества $\bar{w}_{\alpha}$ и $\bar{w}_{\rho}$. Сумму по разбиениям $\bar{w}_{\mu} \Rightarrow \{\bar{w}_{\alpha}, \bar{w}_{\rho}\}$ (см. слагаемые в скобках в формуле (3.17)) можно явно вычислить с помощью леммы B.1:

$$\sum g(\bar{w}_{\rho}, \bar{w}_{\alpha}) \frac{g(u_n, \bar{w}_{\rho})}{h(\bar{w}_{\alpha}, \bar{u}_n)} = - \sum g(\bar{w}_{\rho}, \bar{w}_{\alpha})g(\bar{w}_{\rho}, u_n)g(\bar{w}_{\alpha}, \bar{u}_n - c) = \frac{h(u_n, \bar{u}_n)g(u_n, \bar{w}_{\mu})}{h(\bar{w}_{\mu}, \bar{u}_n)}.$$

Подставляя этот результат в формулу (3.17), мы окончательно приходим к равенству

$$T_{ij}(\bar{u})\mathbb{T}_{i3}(\bar{v}) = \sum h(\bar{w}_{\bar{\mu}}, \bar{u})g(\bar{w}_{\bar{\mu}}, \bar{w}_{\mu})\mathbb{T}_{i3}(\bar{w}_{\bar{\mu}})T_{ij}(\bar{w}_{\mu}), \quad (3.18)$$

которое совпадает с (3.3) при $\# \bar{u} = n$ с точностью до обозначений подмножеств.

Остальные соотношения в предложении 3.1 доказываются аналогичным образом.

4. МКС ОПЕРАТОРОВ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ РАЗНЫМ СТРОКАМ И СТОЛБЦАМ

МКС операторов, принадлежащих разным строкам и столбцам матрицы монодромии, гораздо сложнее тех, что были приведены выше. Мы рассмотрим только один конкретный случай этих МКС. Этот пример является важным, поскольку он позволяет получить различные представления для векторов Бете.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Для $\# \bar{u} = a$ и $\# \bar{v} = b$ определим два оператора

$$X_{a,b}(\bar{u}, \bar{v}) = \sum g(\bar{v}_\alpha, \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) h(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha) \mathbb{T}_{13}(\bar{u}_\alpha) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{v}_\alpha) \quad (4.1)$$

и

$$Y_{a,b}(\bar{u}, \bar{v}) = \sum K(\bar{v}_\alpha | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{u}_\alpha). \quad (4.2)$$

В обеих формулах сумма берется по разбиениям $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_{\bar{\alpha}}\}$ и $\bar{u} \Rightarrow \{\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}\}$ с ограничением $\# \bar{u}_\alpha = \# \bar{v}_\alpha = n$, где $n = 0, 1, \dots, \min(a, b)$.

Оператор (4.1) рассматривался в работе [25], где было доказано, что он удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$X_{a,b}(\bar{u}, \bar{v}) = T_{12}(u_a) X_{a-1,b}(\bar{u}_a, \bar{v}) + \sum g(\bar{v}_\rho, u_a) f(\bar{v}_\rho, \bar{u}_a) g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho) T_{13}(u_a) X_{a-1,b-1}(\bar{u}_a, \bar{v}_{\bar{\rho}}) T_{22}(\bar{v}_\rho). \quad (4.3)$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{v} = \{\bar{v}_\rho, \bar{v}_{\bar{\rho}}\}$, причем подмножество $\bar{v}_\rho$ состоит из одного элемента. Напомним также, что $\bar{u}_a = \bar{u} \setminus u_a$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Оператор (4.2) удовлетворяет соотношению (4.3):

$$Y_{a,b}(\bar{u}, \bar{v}) = T_{12}(u_a) Y_{a-1,b}(\bar{u}_a, \bar{v}) + \sum g(\bar{v}_\rho, u_a) f(\bar{v}_\rho, \bar{u}_a) g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho) T_{13}(u_a) Y_{a-1,b-1}(\bar{u}_a, \bar{v}_{\bar{\rho}}) T_{22}(\bar{v}_\rho). \quad (4.4)$$

Здесь обозначения те же, что и в формуле (4.3).

Доказательство этого предложения будет дано в последующих разделах. Здесь же мы хотели бы отметить, что из предложения 4.1 следует, что

$$Y_{a,b}(\bar{u}, \bar{v}) = X_{a,b}(\bar{u}, \bar{v}) \quad \text{для любых } a, b. \quad (4.5)$$

В самом деле, ясно, что

$$Y_{0,b}(\emptyset, \bar{v}) = X_{0,b}(\emptyset, \bar{v}) = \mathbb{T}_{23}(\bar{v}) \quad \text{для любого } b. \quad (4.6)$$

Далее с помощью соотношений (4.3) и (4.4) мы приходим к утверждению (4.5).

Формулу (4.5) можно рассматривать как МКС операторов $T_{12}(\bar{u})$ и $\mathbb{T}_{23}(\bar{v})$. В самом деле, мы имеем

$$X_{a,b}(\bar{u}, \bar{v}) = T_{12}(\bar{u}) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}) + \dots, \quad Y_{a,b}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbb{T}_{23}(\bar{v}) T_{12}(\bar{u}) + \dots, \quad (4.7)$$

где многоточием обозначены слагаемые, пропорциональные операторам T_{13} и T_{22} . Таким образом, формула (4.5) задает кратный коммутатор $[T_{12}(\bar{u}), \mathbb{T}_{23}(\bar{v})]$ в терминах операторов T_{13} , T_{22} и произведений операторов T_{12} и T_{23} с меньшим количеством аргументов.

5. РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ БЕТЕ

МКС (4.5) позволяют получить различные представления для векторов Бете в моделях с $\mathfrak{gl}(2|1)$ -симметрией. Напомним, что векторы Бете суть полиномы специального вида от операторов $T_{ij}(u)$ с $i \leq j$, действующие на вектор псевдовакуума Ω . Этот вектор обладает следующими свойствами:

$$T_{ii}(u)\Omega = \lambda_i(u)\Omega, \quad T_{ij}(u)\Omega = 0 \quad \text{при } i > j. \quad (5.1)$$

Здесь $\lambda_i(u)$ – некоторые скалярные функции, зависящие от конкретной модели.

Векторы Бете зависят от двух наборов переменных (параметров Бете) $\bar{u}$ и $\bar{v}$. Будем обозначать векторы Бете символом $\Phi_{a,b}(\bar{u}; \bar{v})$. В работе [25] было доказано, что они имеют следующий явный вид: $\Phi_{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = X_{a,b}(\bar{u}; \bar{v})\Omega$, где оператор $X_{a,b}$ задан формулой (4.1). Поскольку мы доказали, что $X_{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = Y_{a,b}(\bar{u}; \bar{v})$, мы сразу же получаем альтернативное представление $\Phi_{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = Y_{a,b}(\bar{u}; \bar{v})\Omega$, где оператор $Y_{a,b}$ задан формулой (4.2). Таким образом, мы имеем следующие явные формулы для векторов Бете:

$$\begin{aligned} \Phi_{a,b}(\bar{u}, \bar{v}) = \sum g(\bar{v}_\alpha, \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) h(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{u}_\alpha) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) \lambda_2(\bar{v}_\alpha) \Omega, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\Phi_{a,b}(\bar{u}, \bar{v}) = \sum K(\bar{v}_\alpha | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) \lambda_2(\bar{u}_\alpha) \Omega.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $T_{22}(u)\Omega = \lambda_2(u)\Omega$, а также распространили действие соглашения о сокращенных обозначениях (2.12) на произведения функций $\lambda_2(u)$.

С помощью предложения 3.1 легко получить и другие представления:

$$\begin{aligned} \Phi_{a,b}(\bar{u}, \bar{v}) = \sum g(\bar{v}_\alpha, \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \bar{u}_\alpha) g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) f(\bar{v}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) h(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha) \times \\ \times T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) \mathbb{T}_{13}(\bar{u}_\alpha) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) \lambda_2(\bar{v}_\alpha) \Omega, \\ \Phi_{a,b}(\bar{u}, \bar{v}) = \sum K(\bar{v}_\alpha | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \bar{u}_\alpha) g(\bar{v}_\alpha, \bar{v}_{\bar{\alpha}}) f(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{u}_\alpha) \times \\ \times \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) \lambda_2(\bar{u}_\alpha) \Omega. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Докажем, например, второе представление из формул (5.3). Рассмотрим сумму по разбиениям $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_{\bar{\alpha}}\}$ во второй формуле из (5.2) при фиксированном $n = \# \bar{v}_\alpha$. Воспользовавшись соотношением (3.2), получаем

$$\begin{aligned} \sum K(\bar{v}_\alpha | \bar{u}_\alpha) g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) = \\ = (-1)^n \sum K(\bar{v}_\alpha | \bar{u}_\alpha) f(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) K(\bar{v}_\alpha | \bar{v}_\beta + c) g(\bar{v}_\beta, \bar{v}_{\bar{\beta}}) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\beta}}) \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\beta), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где мы заработали дополнительную сумму по разбиениям $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}_\beta, \bar{v}_{\bar{\beta}}\}$. Разбиения $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_{\bar{\alpha}}\}$ и $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}_\beta, \bar{v}_{\bar{\beta}}\}$ являются независимыми за исключением условия $\# \bar{v}_\alpha = \# \bar{v}_\beta = n$. Таким образом, мы можем найти сумму по разбиениям $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_{\bar{\alpha}}\}$ в правой части равенства (5.4). Для этого преобразуем сначала СДС $K(\bar{v}_\alpha | \bar{v}_\beta + c)$ при помощи свойств (A.2):

$$\begin{aligned} K(\bar{v}_\alpha | \bar{v}_\beta + c) = (-1)^{b-n} K(\{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_{\bar{\alpha}}\} | \{\bar{v}_\beta + c, \bar{v}_{\bar{\alpha}} + c\}) = \\ = (-1)^{b-n} K(\{\bar{v}_\beta, \bar{v}_{\bar{\beta}}\} | \{\bar{v}_\beta + c, \bar{v}_{\bar{\alpha}} + c\}) = (-1)^b K(\bar{v}_{\bar{\beta}} - c | \bar{v}_{\bar{\alpha}}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Подставляя данный результат в (5.4), получаем

$$\begin{aligned}
 (-1)^n \sum K(\bar{v}_\alpha | \bar{u}_\alpha) f(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) K(\bar{v}_\alpha | \bar{v}_\beta + c) &= \\
 &= (-1)^{b-n} \sum K(\bar{v}_\alpha | \bar{u}_\alpha) f(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) K(\bar{v}_{\bar{\beta}} - c | \bar{v}_{\bar{\alpha}}) = \\
 &= (-1)^b f(\bar{v}, \bar{u}_\alpha) K(\{\bar{u}_\alpha - c, \bar{v}_{\bar{\beta}} - c\} | \bar{v}) = f(\bar{v}_{\bar{\beta}}, \bar{u}_\alpha) K(\bar{v}_{\bar{\beta}} | \bar{u}_\alpha),
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

где мы воспользовались равенствами (Б.7) и (А.2). Подставляя (5.6) в формулу (5.4), приходим к соотношению

$$\sum K(\bar{v}_\alpha | \bar{u}_\alpha) g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) = \sum K(\bar{v}_{\bar{\beta}} | \bar{u}_\alpha) f(\bar{v}_{\bar{\beta}}, \bar{u}_\alpha) g(\bar{v}_{\bar{\beta}}, \bar{v}_{\bar{\beta}}) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\beta}}) \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\bar{\beta}}).$$

Остается сделать замены $\bar{v}_\beta \rightarrow \bar{v}_\alpha$ и $\bar{v}_{\bar{\beta}} \rightarrow \bar{v}_{\bar{\alpha}}$, и мы получаем второе представление (5.3).

Аналогично, начав с первого представления (5.2) и используя формулу суммирования (Б.1), мы найдем первое представление (5.3).

В заключение этого раздела приведем также явные формулы для дуальных векторов Бете. Они принадлежат дуальному пространству и могут быть получены из представлений (5.2), (5.3) с помощью антиморфизма (3.7). Этот антиморфизм отображает вектор псевдовакуума в дуальный вектор: $\psi(\Omega) = \Omega^\dagger$. Вектор $\Omega^\dagger$ принадлежит дуальному пространству и обладает свойствами

$$\Omega^\dagger T_{ii}(u) = \lambda_i(u) \Omega^\dagger, \quad \Omega^\dagger T_{ij}(u) = 0 \quad \text{при } i < j. \tag{5.7}$$

Здесь функции $\lambda_i(u)$ те же, что и в формуле (5.1).

Применяя преобразование ψ к формулам (5.2), (5.3), находим

$$\begin{aligned}
 \Phi_{a,b}^\dagger(\bar{u}, \bar{v}) &= (-1)^{b(b-1)/2} \sum g(\bar{v}_\alpha, \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) h(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha) \times \\
 &\quad \times \lambda_2(\bar{v}_\alpha) \Omega^\dagger \mathbb{T}_{32}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) T_{21}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) \mathbb{T}_{31}(\bar{u}_\alpha), \\
 \Phi_{a,b}^\dagger(\bar{u}, \bar{v}) &= (-1)^{b(b-1)/2} \sum K(\bar{v}_\alpha | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_\alpha, \bar{v}_{\bar{\alpha}}) \times \\
 &\quad \times \lambda_2(\bar{u}_\alpha) \Omega^\dagger T_{21}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) \mathbb{T}_{32}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) \mathbb{T}_{31}(\bar{v}_\alpha)
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

и

$$\begin{aligned}
 \Phi_{a,b}^\dagger(\bar{u}, \bar{v}) &= (-1)^{b(b-1)/2} \sum g(\bar{v}_\alpha, \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \bar{u}_\alpha) g(\bar{v}_\alpha, \bar{v}_{\bar{\alpha}}) f(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) h(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha) \times \\
 &\quad \times \lambda_2(\bar{v}_\alpha) \Omega^\dagger \mathbb{T}_{32}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) \mathbb{T}_{31}(\bar{u}_\alpha) T_{21}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}), \\
 \Phi_{a,b}^\dagger(\bar{u}, \bar{v}) &= (-1)^{b(b-1)/2} \sum K(\bar{v}_\alpha | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) f(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{u}_\alpha) \times \\
 &\quad \times \lambda_2(\bar{u}_\alpha) \Omega^\dagger T_{21}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) \mathbb{T}_{31}(\bar{v}_\alpha) \mathbb{T}_{32}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}).
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

6. МКС (4.5) ПРИ $a = 1$

При $a = 1$ формула (4.5) принимает вид

$$[T_{12}(u), \mathbb{T}_{23}(\bar{v})] = \sum g(u, \bar{v}_\alpha) g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) (T_{13}(u) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{v}_\alpha) - T_{13}(\bar{v}_\alpha) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(u)). \quad (6.1)$$

Здесь сумма берется по разбиениям набора $\bar{v}$ на подмножества $\bar{v}_\alpha$ и $\bar{v}_{\bar{\alpha}}$ с ограничением $\# \bar{v}_\alpha = 1$. Данные МКС можно доказать с помощью стандартных рассуждений алгебраического анзаца Бете. В самом деле, в силу (2.4) имеем

$$[T_{12}(u), \mathbb{T}_{23}(\bar{v})] = \prod_{1 \leq j < l \leq b} \frac{1}{h(v_l, v_j)} \sum_{k=1}^b g(u, v_k) \times \\ \times T_{23}(v_1) \dots T_{23}(v_{k-1}) (T_{13}(u) T_{22}(v_k) - T_{13}(v_k) T_{22}(u)) T_{23}(v_{k+1}) \dots T_{23}(v_b). \quad (6.2)$$

После этого, пронося оператор T_{13} налево, а оператор T_{22} направо, мы в конечном итоге получаем следующий результат:

$$[T_{12}(u), \mathbb{T}_{23}(\bar{v})] = \sum_{k=1}^b (\Lambda_k T_{13}(u) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_k) T_{22}(v_k) + \tilde{\Lambda}_k T_{13}(v_k) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_k) T_{22}(u)) + \\ + \sum_{\substack{j,k=1, \\ j \neq k}}^b M_{jk} T_{13}(v_j) \mathbb{T}_{23}(\{\bar{v}_{j,k}, u\}) T_{22}(v_k). \quad (6.3)$$

Здесь Λ_k , $\tilde{\Lambda}_k$ и M_{jk} – некоторые рациональные коэффициенты. Набор $\bar{v}_{j,k}$ является подмножеством $\bar{v} \setminus \{v_j, v_k\}$. В силу симметрии произведения $\mathbb{T}_{23}(\bar{v})$ по $\bar{v}$ достаточно найти Λ_1 , $\tilde{\Lambda}_b$ и M_{21} . Для этого нам потребуются частные случаи соотношений (3.1), (3.2):

$$T_{22}(v) T_{12}(\bar{u}) = f(v, \bar{u}) T_{12}(\bar{u}) T_{22}(v) + \\ + \sum g(\bar{u}_\rho, v) f(\bar{u}_\rho, \bar{u}_{\bar{\rho}}) T_{12}(v) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\rho}}) T_{22}(\bar{u}_\rho), \quad (6.4)$$

$$\mathbb{T}_{23}(\bar{u}) T_{13}(v) = (-1)^b f(v, \bar{u}) T_{13}(v) \mathbb{T}_{23}(\bar{u}) + \\ + \sum g(v, \bar{u}_\rho) g(\bar{u}_{\bar{\rho}}, \bar{u}_\rho) h(v, \bar{u}_{\bar{\rho}}) T_{13}(\bar{u}_{\bar{\rho}}) \mathbb{T}_{23}(\{v, \bar{u}_{\bar{\rho}}\}). \quad (6.5)$$

Здесь суммы берутся по разбиениям $\bar{u} \Rightarrow \{\bar{u}_\rho, \bar{u}_{\bar{\rho}}\}$ с условием $\# \bar{u}_\rho = 1$.

Найдем Λ_1 . Ясно, что вклад в этот коэффициент дает только слагаемое с $k = 1$ в формуле (6.2); все остальные слагаемые не могут дать оператор $T_{22}(v_1)$ в крайнем правом положении. Тогда, записав $\mathbb{T}_{23}(\bar{v})$ в виде

$$\mathbb{T}_{23}(\bar{v}) = T_{23}(v_1) \frac{\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_1)}{h(\bar{v}_1, v_1)}, \quad (6.6)$$

получим

$$[T_{12}(u), \mathbb{T}_{23}(\bar{v})] = g(u, v_1) (T_{13}(u) T_{22}(v_1) - T_{13}(v_1) T_{22}(u)) \frac{\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_1)}{h(\bar{v}_1, v_1)} + \text{UWT}. \quad (6.7)$$

Ясно, что произведение $T_{13}(v_1) T_{22}(u)$ не дает вклада в искомый коэффициент. В оставшемся произведении $T_{13}(u) T_{22}(v_1)$ оператор $T_{13}(u)$ должен быть сохранен в его

исходном крайнем левом положении, а оператор $T_{22}(v_1)$ должен быть передвинут в крайнюю правую позицию. При этом мы должны сохранить аргумент v_1 оператора T_{22} . В итоге мы приходим к выражению

$$\Lambda_1 = g(u, v_1)g(\bar{v}_1, v_1). \quad (6.8)$$

Аналогично, при вычислении коэффициента $\tilde{\Lambda}_b$ нам следует рассмотреть только слагаемое с $k = b$ в формуле (6.2):

$$[T_{12}(u), T_{23}(\bar{v})] = g(u, v_b) \frac{\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_b)}{h(v_b, \bar{v}_b)} (T_{13}(u)T_{22}(v_b) - T_{13}(v_b)T_{22}(u)) + \text{UWT}. \quad (6.9)$$

Теперь оператор $T_{22}(u)$ должен оставаться в крайнем правом положении, в то время как $T_{13}(v_b)$ должен переместиться налево, сохранив свой аргумент. Отсюда находим, что

$$\tilde{\Lambda}_b = -g(u, v_b)g(\bar{v}_b, v_b). \quad (6.10)$$

И, наконец, легко видеть, что $M_{21} = 0$. Действительно, чтобы получить коэффициент M_{21} , нам следует рассмотреть только слагаемое с $k = 1$ в формуле (6.2). Иными словами, мы приходим к соотношению (6.7). В противном случае мы не получим $T_{22}(v_1)$ в крайней правой позиции. Но оператор T_{13} уже находится в крайнем левом положении, следовательно, он не может зависеть от v_2 . Отсюда мы заключаем, что $M_{21} = 0$.

Воспользовавшись свойствами симметрии, находим

$$\Lambda_k = g(u, v_k)g(\bar{v}_k, v_k), \quad \tilde{\Lambda}_k = -g(u, v_k)g(\bar{v}_k, v_k), \quad M_{jk} = 0$$

и, следовательно,

$$[T_{12}(u), T_{23}(\bar{v})] = \sum_{k=1}^b g(u, v_k)g(\bar{v}_k, v_k) (T_{13}(u)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_k)T_{22}(v_k) - T_{13}(v_k)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_k)T_{22}(u)),$$

что эквивалентно соотношению (6.1).

7. МКС (??) ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ a И b

Чтобы показать, что оператор $Y_{a,b}(\bar{u}, \bar{v})$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (4.4), мы подействуем оператором $T_{12}(u_a)$ на $Y_{a-1,b}(\bar{u}_a, \bar{v})$:

$$\begin{aligned} T_{12}(u_a)Y_{a-1,b}(\bar{u}_a, \bar{v}) &= \\ &= \sum K(\bar{v}_\alpha | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) T_{12}(u_a) \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{u}_\alpha). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_{\bar{\alpha}}\}$ и $\bar{u}_a \Rightarrow \{\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}\}$.

Наша цель – передвинуть оператор $T_{12}(u_a)$ направо так, чтобы в конечном итоге выстроить все операторы в следующем порядке:

$$\mathbb{T}_{13}\mathbb{T}_{23}T_{12}T_{22}. \quad (7.2)$$

Анализ коммутационных соотношений показывает, что, двигая оператор $T_{12}(u_a)$ направо, мы можем получить несколько видов операторных произведений:

$$\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\beta)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\gamma)T_{12}(\bar{u}_\gamma)T_{12}(u_a)T_{22}(\bar{u}_\beta), \quad (7.3)$$

$$\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\beta)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\gamma)T_{12}(\bar{u}_\gamma)T_{22}(\bar{u}_\beta)T_{22}(u_a), \quad (7.4)$$

$$T_{13}(u_a)\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\beta)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\gamma)T_{12}(\bar{u}_\gamma)T_{22}(\bar{u}_\beta)T_{22}(\bar{v}_\rho), \quad (7.5)$$

$$T_{13}(u_a)\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\beta)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\gamma)T_{12}(\bar{u}_\gamma)T_{12}(\bar{v}_\rho)T_{22}(\bar{u}_\beta). \quad (7.6)$$

Первые два выражения (7.3) и (7.4) совпадают с операторными произведениями в определении оператора $Y_{a,b}(\bar{u}, \bar{v})$. Мы будем называть такие слагаемые *желательными*. Остальные слагаемые являются *нежелательными*. Мы показываем, что члены вида (7.5) сокращаются с суммой по разбиениям в формуле (4.4), а члены вида (7.6) взаимно сокращают друг друга.

7.1. Желательные слагаемые. В данном пункте мы обращаем внимание только на желательные слагаемые. Желательные слагаемые можно охарактеризовать тем, что в них операторы T_{13} и T_{23} зависят только от переменных из набора $\bar{v}$, а операторы T_{12} и T_{22} зависят только от переменных из набора $\bar{u}$.

Двигая оператор $T_{12}(u_a)$ через произведение $\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)$, мы пользуемся соотношением (3.3). Перепишем его в виде

$$T_{12}(u)\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha) = f(\bar{v}_\alpha, u)\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)T_{12}(u) + \sum g(u, \bar{v}_\rho)g(\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho)T_{13}(u)\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\sigma)T_{12}(\bar{v}_\rho),$$

где сумма берется по разбиениям $\bar{v}_\alpha \Rightarrow \{\bar{v}_\rho, \bar{v}_\sigma\}$ при условии $\# \bar{v}_\rho = 1$. Подставляя это выражение в правую часть формулы (7.1), получаем

$$\begin{aligned} T_{12}(u_a)Y_{a-1,b}(\bar{u}_a, \bar{v}) &= \sum K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) \times \\ &\times [f(\bar{v}_\alpha, u_a)\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)T_{12}(u_a) + g(u_a, \bar{v}_\rho)g(\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho)T_{13}(u_a)\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\sigma)T_{12}(\bar{v}_\rho)] \times \\ &\times \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_\alpha). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Второе слагаемое из выражения в квадратных скобках является *нежелательным*, поскольку содержит $T_{13}(u_a)$. Поэтому мы отложим его рассмотрение и получим

$$\begin{aligned} T_{12}(u_a)Y_{a-1,b}(\bar{u}_a, \bar{v}) &= \sum K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha)f(\bar{v}_\alpha, u_a) \times \\ &\times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)T_{12}(u_a)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_\alpha) + \text{UWT}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Воспользовавшись теперь соотношением (6.1), имеем

$$\begin{aligned} T_{12}(u_a)Y_{a-1,b}(\bar{u}_a, \bar{v}) &= \sum K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha)f(\bar{v}_\alpha, u_a)\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha) \times \\ &\times \{g(u_a, \bar{v}_\rho)g(\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho)(T_{13}(u_a)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\sigma)T_{22}(\bar{v}_\rho) - T_{13}(\bar{v}_\rho)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\sigma)T_{22}(u_a)) + \\ &+ \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})T_{12}(u_a)\}T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_\alpha) + \text{UWT}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Здесь мы получили дополнительные разбиения $\bar{v}_{\bar{\alpha}} \Rightarrow \{\bar{v}_\rho, \bar{v}_\sigma\}$ с условием $\# \bar{v}_\rho = 1$.

Вклад, пропорциональный $T_{13}(u_a)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\sigma)T_{22}(\bar{v}_\rho)$, снова является *нежелательным*. Слагаемое, пропорциональное $\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})T_{12}(u_a)$, уже содержит все операторы в нужном порядке. Таким образом, мы получаем первый вклад в желательные слагаемые:

$$W_1 = \sum K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha)f(\bar{v}_\alpha, u_a)\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})T_{12}(u_a)T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_\alpha).$$

Остается рассмотреть последний вклад в (7.9), который пропорционален произведению $T_{13}(\bar{v}_\rho)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\sigma)T_{22}(u_a)$. Подставляя в это слагаемое $\bar{v}_{\bar{\alpha}} = \{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho\}$, получаем

$$T_{12}(u_a)Y_{a-1,b}(\bar{u}_a, \bar{v}) - W_1 = \sum K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\alpha)g(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\alpha)f(\bar{v}_\alpha, u_a) \times \\ \times g(\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho)g(\bar{v}_\rho, u_a)\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)T_{13}(\bar{v}_\rho)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\sigma)T_{22}(u_a)T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_\alpha) + \text{UWT}. \quad (7.10)$$

Для завершения вычислений необходимо пронести оператор $T_{22}(u_a)$ через произведение $T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})$. Однако, прежде чем делать это, мы можем вычислить сумму по разбиениям $\bar{v}_{\bar{\sigma}} \Rightarrow \{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_\rho\}$. В самом деле, мы имеем

$$\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)T_{13}(\bar{v}_\rho) = h(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\alpha)\mathbb{T}_{13}(\{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_\rho\}) = h(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\alpha)\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\bar{\sigma}}). \quad (7.11)$$

Следовательно,

$$T_{12}(u_a)Y_{a-1,b}(\bar{u}_a, \bar{v}) - W_1 = \\ = \sum [K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)f(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\alpha)f(\bar{v}_\alpha, u_a)g(\bar{v}_\rho, u_a)]f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_\sigma, \bar{v}_{\bar{\sigma}}) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\bar{\sigma}})\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\sigma)T_{22}(u_a)T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_\alpha) + \text{UWT}. \quad (7.12)$$

Таким образом, сумма по разбиениям $\bar{v}_{\bar{\sigma}} \Rightarrow \{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_\rho\}$ содержит только рациональные функции, присутствующие в квадратных скобках в формуле (7.12). Имеем

$$\sum_{\bar{v}_{\bar{\sigma}} \Rightarrow \{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_\rho\}} K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)f(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\alpha)f(\bar{v}_\alpha, u_a)g(\bar{v}_\rho, u_a) = \\ = f(\bar{v}_{\bar{\sigma}}, u_a) \sum_{\bar{v}_{\bar{\sigma}} \Rightarrow \{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_\rho\}} K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)\frac{f(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\alpha)}{h(\bar{v}_\rho, u_a)} = \\ = -f(\bar{v}_{\bar{\sigma}}, u_a) \sum_{\bar{v}_{\bar{\sigma}} \Rightarrow \{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_\rho\}} K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)K(u_a - c|\bar{v}_\rho)f(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\alpha), \quad (7.13)$$

где мы воспользовались соотношением $K(u_a - c|\bar{v}_\rho) = -1/h(\bar{v}_\rho, u_a)$. Мы видим, что сумма по разбиениям свелась к формуле из леммы Б.2. Следовательно,

$$\sum_{\bar{v}_{\bar{\sigma}} \Rightarrow \{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_\rho\}} K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)f(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\alpha)f(\bar{v}_\alpha, u_a)g(\bar{v}_\rho, u_a) = K(\bar{v}_{\bar{\sigma}}|\{\bar{u}_\alpha, u_a\}), \quad (7.14)$$

что дает нам

$$T_{12}(u_a)Y_{a-1,b}(\bar{u}_a, \bar{v}) - W_1 = \sum K(\bar{v}_\alpha|\{\bar{u}_\alpha, u_a\})f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})T_{22}(u_a)T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_\alpha) + \text{UWT}. \quad (7.15)$$

Здесь мы переобозначили $\bar{v}_\sigma$ как $\bar{v}_{\bar{\alpha}}$ и $\bar{v}_\rho$ как $\bar{v}_\alpha$.

Остается пронести оператор $T_{22}(u_a)$ сквозь произведение $T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})$. Это можно сделать с помощью равенства (6.4). В нашем случае оно принимает вид

$$T_{22}(u_a)T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) = \\ = f(u_a, \bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(u_a) + \sum g(\bar{u}_\rho, u_a)f(\bar{u}_\rho, \bar{u}_\sigma)T_{12}(u_a)T_{12}(\bar{u}_\sigma)T_{22}(\bar{u}_\rho), \quad (7.16)$$

где сумма берется по разбиениям $\bar{u}_{\bar{\alpha}} \Rightarrow \{\bar{u}_{\rho}, \bar{u}_{\sigma}\}$ при условии $\# \bar{u}_{\rho} = 1$. Подставляя это соотношение в формулу (7.15), находим, что

$$T_{12}(u_a)Y_{a-1,b}(\bar{u}_a, \bar{v}) - W_1 = W_2 + W_3 + \text{UWT}, \quad (7.17)$$

где

$$W_2 = \sum K(\bar{v}_{\alpha}|\{\bar{u}_{\alpha}, u_a\})f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\bar{\alpha}})f(u_a, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_{\alpha}) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\alpha})\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(u_a)T_{22}(\bar{u}_{\alpha}), \quad (7.18)$$

$$W_3 = \sum K(\bar{v}_{\alpha}|\{\bar{u}_{\alpha}, u_a\})f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_{\alpha})g(\bar{u}_{\rho}, u_a)f(\bar{u}_{\rho}, \bar{u}_{\sigma}) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\alpha})\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})T_{12}(u_a)T_{12}(\bar{u}_{\sigma})T_{22}(\bar{u}_{\rho})T_{22}(\bar{u}_{\alpha}). \quad (7.19)$$

Заметим, что вклад W_2 можно записать в виде

$$W_2 = \sum_{u_a \in \bar{u}_{\alpha}} K(\bar{v}_{\alpha}|\bar{u}_{\alpha})f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_{\alpha})\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\alpha})\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_{\alpha}). \quad (7.20)$$

Здесь в отличие от исходной формулы (7.1) мы имеем дело с суммой по разбиениям полного набора $\bar{u}$ (т. е. включая элемент u_a). Однако имеется ограничение $u_a \in \bar{u}_{\alpha}$.

В формуле (7.19) можно взять сумму по разбиениям $\bar{u}_{\bar{\sigma}} \Rightarrow \{\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho}\}$. Полагая $\{\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho}\} = \bar{u}_{\bar{\sigma}}$, получаем

$$W_3 = \sum [K(\bar{v}_{\alpha}|\{\bar{u}_{\alpha}, u_a\})g(\bar{u}_{\rho}, u_a)f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho})]f(\bar{u}_{\bar{\sigma}}, \bar{u}_{\sigma})g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_{\alpha}) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\alpha})\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})T_{12}(u_a)T_{12}(\bar{u}_{\sigma})T_{22}(\bar{u}_{\bar{\sigma}}). \quad (7.21)$$

Сумма слагаемых в квадратных скобках вычисляется с помощью формулы (Б.8):

$$\sum_{\bar{u}_{\bar{\sigma}} \Rightarrow \{\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho}\}} K(\bar{v}_{\alpha}|\{\bar{u}_{\alpha}, u_a\})g(\bar{u}_{\rho}, u_a)f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho}) = (f(\bar{u}_{\bar{\sigma}}, u_a) - f(\bar{v}_{\alpha}, u_a))K(\bar{v}_{\alpha}|\bar{u}_{\bar{\sigma}}). \quad (7.22)$$

Таким образом, мы приходим к выражению

$$W_3 = \sum K(\bar{v}_{\alpha}|\bar{u}_{\alpha})(f(\bar{u}_{\alpha}, u_a) - f(\bar{v}_{\alpha}, u_a))f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_{\alpha}) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\alpha})\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})T_{12}(u_a)T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_{\alpha}), \quad (7.23)$$

где мы переобозначили $\bar{u}_{\bar{\sigma}}$ как $\bar{u}_{\alpha}$ и $\bar{u}_{\sigma}$ как $\bar{u}_{\bar{\alpha}}$.

Видно, что

$$W_1 + W_3 = \\ = \sum K(\bar{v}_{\alpha}|\bar{u}_{\alpha})f(\bar{u}_{\alpha}, u_a)f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_{\alpha})\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\alpha})\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})T_{12}(u_a)T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_{\alpha}) = \\ = \sum_{u_a \in \bar{u}_{\bar{\alpha}}} K(\bar{v}_{\alpha}|\bar{u}_{\alpha})f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_{\alpha})\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\alpha})\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_{\alpha}). \quad (7.24)$$

Таким образом, мы снова имеем дело с суммой по разбиениям полного набора $\bar{u}$, однако теперь наложено ограничение $u_a \in \bar{u}_{\bar{\alpha}}$. Следовательно, суммируя все вклады, мы получаем

$$\sum_{k=1}^3 W_k = \sum K(\bar{v}_{\alpha}|\bar{u}_{\alpha})f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_{\alpha})\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\alpha})\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_{\alpha}) = Y_{a,b}(\bar{u}, \bar{v}).$$

Таким образом, мы показали, что вклады желательных слагаемых в действие оператора $T_{12}(u_a)$ на $Y_{a-1,b}(\bar{u}_a, \bar{v})$ дают оператор $Y_{a,b}(\bar{u}, \bar{v})$. Остается доказать, что нежелательные слагаемые не дают вкладов в этот окончательный результат.

7.2. Сокращение нежелательных слагаемых. Перейдем теперь к нежелательным слагаемым. Будем обозначать их вклады символами U_k . Позднее мы разделим эти вклады на две группы: члены типа (7.5) будут обозначаться через Z_k , а члены типа (7.6) – через $\bar{Z}_k$.

7.2.1. Первый вклад. Начнем с члена в формуле (7.9), который пропорционален $T_{13}(u_a)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\sigma)T_{22}(\bar{v}_\rho)$. Подставляя в него $\bar{v}_{\bar{\alpha}} = \{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho\}$, получаем

$$U_1 = \sum K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\alpha)g(\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\alpha)f(\bar{v}_\alpha, u_a)g(u_a, \bar{v}_\rho)g(\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)T_{13}(u_a)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\sigma)T_{22}(\bar{v}_\rho)T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_\alpha). \quad (7.25)$$

Перенеся оператор $T_{13}(u_a)$ налево с помощью соотношения

$$\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)T_{13}(u_a) = T_{13}(u_a)\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)\frac{h(u_a, \bar{v}_\alpha)}{h(\bar{v}_\alpha, u_a)}, \quad (7.26)$$

найдем

$$U_1 = T_{13}(u_a) \sum K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\rho)g(\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\alpha)f(u_a, \bar{v}_\alpha)g(u_a, \bar{v}_\rho) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\sigma)T_{22}(\bar{v}_\rho)T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_\alpha). \quad (7.27)$$

Теперь пронесем оператор $T_{22}(\bar{v}_\rho)$ сквозь произведение $T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})$ с помощью формулы (6.4):

$$U_1 = T_{13}(u_a) \sum K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\rho)g(\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\alpha)f(u_a, \bar{v}_\alpha)g(u_a, \bar{v}_\rho)\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\sigma) \times \\ \times [f(\bar{v}_\rho, \bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{v}_\rho) + g(\bar{u}_\tau, \bar{v}_\rho)f(\bar{u}_\tau, \bar{u}_\mu)T_{12}(\bar{v}_\rho)T_{12}(\bar{u}_\mu)T_{22}(\bar{u}_\tau)]T_{22}(\bar{u}_\alpha).$$

Здесь мы получаем дополнительные разбиения $\bar{u}_{\bar{\alpha}} \Rightarrow \{\bar{u}_\mu, \bar{u}_\tau\}$ с условием $\# \bar{u}_\tau = 1$. Первое слагаемое в квадратных скобках дает вклад в члены типа (7.5):

$$Z_1 = T_{13}(u_a) \sum K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\rho)g(\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\alpha)f(u_a, \bar{v}_\alpha)f(\bar{v}_\rho, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(u_a, \bar{v}_\rho) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\sigma)T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_\alpha)T_{22}(\bar{v}_\rho). \quad (7.28)$$

Второе слагаемое в квадратных скобках дает вклад в члены типа (7.6). Подставляя $\bar{u}_{\bar{\alpha}} = \{\bar{u}_\mu, \bar{u}_\tau\}$, получаем

$$\bar{Z}_1 = T_{13}(u_a) \sum [K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_\tau)g(\bar{u}_\tau, \bar{v}_\rho)]f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_\mu)f(\bar{u}_\tau, \bar{u}_\mu)g(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\rho)g(\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\alpha) \times \\ \times f(u_a, \bar{v}_\alpha)g(u_a, \bar{v}_\rho)\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\sigma)T_{12}(\bar{v}_\rho)T_{12}(\bar{u}_\mu)T_{22}(\bar{u}_\tau)T_{22}(\bar{u}_\alpha). \quad (7.29)$$

В этом соотношении можно вычислить сумму по разбиениям $\bar{u}_{\bar{\mu}} \Rightarrow \{\bar{u}_\alpha, \bar{u}_\tau\}$. Произведение $f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_\mu)f(\bar{u}_\tau, \bar{u}_\mu)$ превращается в $f(\bar{u}_{\bar{\mu}}, \bar{u}_\mu)$, а сумма слагаемых в квадратных скобках является частным случаем формулы из леммы Б.2:

$$\sum_{\bar{u}_{\bar{\mu}} \Rightarrow \{\bar{u}_\alpha, \bar{u}_\tau\}} K(\bar{v}_\alpha|\bar{u}_\alpha)g(\bar{u}_\tau, \bar{v}_\rho)f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_\tau) = -f(\bar{u}_{\bar{\mu}}, \bar{v}_\rho)K(\{\bar{v}_\rho - c, \bar{v}_\alpha\}|\bar{u}_{\bar{\mu}}). \quad (7.30)$$

Подставляя это выражение в формулу (7.29) и переобозначая $\bar{u}_\mu$ как $\bar{u}_\alpha$ и $\bar{u}_\mu$ как $\bar{u}_{\bar{\alpha}}$, находим

$$\bar{Z}_1 = -T_{13}(u_a) \sum f(\bar{u}_\alpha, \bar{v}_\rho) K(\{\bar{v}_\rho - c, \bar{v}_\alpha\} | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho) g(\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\alpha) \times \\ \times f(u_a, \bar{v}_\alpha) g(u_a, \bar{v}_\rho) \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\sigma) T_{12}(\bar{v}_\rho) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{u}_\alpha). \quad (7.31)$$

7.2.2. *Второй вклад.* Теперь мы возвращаемся к члену в формуле (7.7), содержащему $T_{13}(u_a)$. Совершая подстановку $\bar{v}_\alpha = \{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho\}$, получаем

$$U_2 = T_{13}(u_a) \sum K(\{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho\} | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\sigma) g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho) g(u_a, \bar{v}_\rho) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\sigma) T_{12}(\bar{v}_\rho) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{u}_\alpha). \quad (7.32)$$

Теперь мы проносим $T_{12}(\bar{v}_\rho)$ через произведение $\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})$, пользуясь соотношением (6.1):

$$U_2 = T_{13}(u_a) \sum K(\{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho\} | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\sigma) g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho) g(u_a, \bar{v}_\rho) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\sigma) \{g(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\tau) g(\bar{v}_\mu, \bar{v}_\tau) [T_{13}(\bar{v}_\rho) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\mu) T_{22}(\bar{v}_\tau) - T_{13}(\bar{v}_\tau) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\mu) T_{22}(\bar{v}_\rho)] + \\ + \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) T_{12}(\bar{v}_\rho)\} T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{u}_\alpha). \quad (7.33)$$

Здесь возникают дополнительные разбиения $\bar{v}_{\bar{\alpha}} \Rightarrow \{\bar{v}_\mu, \bar{v}_\tau\}$, где $\bar{v}_\tau$ состоит из одного элемента.

Член, содержащий произведение $\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) T_{12}(\bar{v}_\rho)$, напрямую дает вклад в слагаемые типа (7.6):

$$\bar{Z}_2 = T_{13}(u_a) \sum K(\{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho\} | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\sigma) g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho) g(u_a, \bar{v}_\rho) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\sigma) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}}) T_{12}(\bar{v}_\rho) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{u}_\alpha). \quad (7.34)$$

В оставшихся членах формулы (7.33) можно частично вычислить суммы по разбиениям. Рассмотрим первое слагаемое в квадратных скобках в правой части формулы (7.33), полагая в нем $\bar{v}_{\bar{\alpha}} = \{\bar{v}_\mu, \bar{v}_\tau\}$:

$$U_2^{(1)} = T_{13}(u_a) \sum K(\{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho\} | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_\mu, \bar{v}_\sigma) g(\bar{v}_\tau, \bar{v}_\sigma) g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho) g(u_a, \bar{v}_\rho) \times \\ \times g(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\tau) g(\bar{v}_\mu, \bar{v}_\tau) \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\sigma) T_{13}(\bar{v}_\rho) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\mu) T_{22}(\bar{v}_\tau) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{u}_\alpha).$$

В этой формуле набор $\bar{v}$ делится на четыре подмножества $\{\bar{v}_\tau, \bar{v}_\rho, \bar{v}_\sigma, \bar{v}_\mu\}$ при условии $\# \bar{v}_\tau = \# \bar{v}_\rho = 1$. Объединяя $\{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho\}$ в $\bar{v}_\gamma$, получаем

$$U_2^{(1)} = T_{13}(u_a) \sum K(\bar{v}_\gamma | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_\mu, \bar{v}_\gamma) g(\bar{v}_{\bar{\tau}}, \bar{v}_\tau) [f(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\sigma) g(\bar{v}_\tau, \bar{v}_\rho) g(u_a, \bar{v}_\rho)] \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\gamma) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\mu) T_{22}(\bar{v}_\tau) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{u}_\alpha). \quad (7.35)$$

Сумма по разбиениям $\bar{v}_\gamma \Rightarrow \{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho\}$ (см. слагаемые в квадратных скобках) легко вычисляется с помощью контурного интеграла:

$$\sum_{\bar{v}_\gamma \Rightarrow \{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho\}} f(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\sigma) g(\bar{v}_\tau, \bar{v}_\rho) g(u_a, \bar{v}_\rho) = \frac{1}{2\pi i c} \oint f(z, \bar{v}_\gamma) g(\bar{v}_\tau, z) g(u_a, z) dz, \quad (7.36)$$

где контур интегрирования окружает точки $\bar{v}_\gamma$. Вычисляя этот интеграл по вычетам вне контура, находим

$$\sum_{\bar{v}_\gamma \Rightarrow \{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho\}} f(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\sigma) g(\bar{v}_\tau, \bar{v}_\rho) g(u_a, \bar{v}_\rho) = g(u_a, \bar{v}_\tau) (f(\bar{v}_\tau, \bar{v}_\gamma) - f(u_a, \bar{v}_\gamma)). \quad (7.37)$$

Подставляя этот результат в формулу (7.35), получаем

$$U_2^{(1)} = T_{13}(u_a) \sum K(\bar{v}_\gamma | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_\mu, \bar{v}_\gamma) g(\bar{v}_{\bar{\tau}}, \bar{v}_\tau) g(u_a, \bar{v}_\tau) (f(\bar{v}_\tau, \bar{v}_\gamma) - f(u_a, \bar{v}_\gamma)) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\gamma) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\mu) T_{22}(\bar{v}_\tau) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{u}_\alpha). \quad (7.38)$$

Второе слагаемое в квадратных скобках в формуле (7.33) рассматривается аналогично. Вновь полагая $\bar{v}_{\bar{\alpha}} = \{\bar{v}_\mu, \bar{v}_\tau\}$, мы получаем

$$U_2^{(2)} = T_{13}(u_a) \sum K(\{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho\} | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_\mu, \bar{v}_\sigma) g(\bar{v}_\tau, \bar{v}_\sigma) g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho) g(u_a, \bar{v}_\rho) \times \\ \times g(\bar{v}_\tau, \bar{v}_\rho) g(\bar{v}_\mu, \bar{v}_\tau) \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\sigma) T_{13}(\bar{v}_\tau) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\mu) T_{22}(\bar{v}_\rho) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{u}_\alpha).$$

На этот раз мы объединяем $\{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\tau\}$ в набор $\bar{v}_\gamma$ и находим

$$U_2^{(2)} = T_{13}(u_a) \sum [K(\{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho\} | \bar{u}_\alpha) f(\bar{v}_\tau, \bar{v}_\sigma) g(\bar{v}_\tau, \bar{v}_\rho)] \times \\ \times f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_\mu, \bar{v}_\gamma) g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho) g(u_a, \bar{v}_\rho) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\gamma) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\mu) T_{22}(\bar{v}_\rho) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{u}_\alpha). \quad (7.39)$$

Сумма по разбиениям $\bar{v}_\gamma \Rightarrow \{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\tau\}$ (см. слагаемые в квадратных скобках) вычисляется с помощью тождества (Б.13):

$$\sum_{\bar{v}_\gamma \Rightarrow \{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\tau\}} K(\{\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\rho\} | \bar{u}_\alpha) f(\bar{v}_\tau, \bar{v}_\sigma) g(\bar{v}_\tau, \bar{v}_\rho) = K(\bar{v}_\gamma | \bar{u}_\alpha) (f(\bar{v}_\rho, \bar{u}_\alpha) - f(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\gamma)). \quad (7.40)$$

Подставляя это выражение в формулу (7.39), мы находим

$$U_2^{(2)} = T_{13}(u_a) \sum K(\bar{v}_\gamma | \bar{u}_\alpha) (f(\bar{v}_\rho, \bar{u}_\alpha) - f(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\gamma)) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_\mu, \bar{v}_\gamma) g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho) g(u_a, \bar{v}_\rho) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\gamma) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\mu) T_{22}(\bar{v}_\rho) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{u}_\alpha). \quad (7.41)$$

Остается объединить вклады (7.41) и (7.38) (переобозначив $\bar{v}_\tau$ как $\bar{v}_\rho$ в формуле (7.38)), что дает нам

$$U_2^{(1)} + U_2^{(2)} = T_{13}(u_a) \sum K(\bar{v}_\gamma | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_\mu, \bar{v}_\gamma) g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho) g(u_a, \bar{v}_\rho) \times \\ \times (f(\bar{v}_\rho, \bar{u}_\alpha) - f(u_a, \bar{v}_\gamma)) \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\gamma) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\mu) T_{22}(\bar{v}_\rho) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{u}_\alpha). \quad (7.42)$$

7.2.3. Окончательные сокращения. Для достижения нашей цели мы должны пронести оператор $T_{22}(\bar{v}_\rho)$ в формуле (7.42) сквозь произведение $T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})$ с помощью соотношения (6.4):

$$U_2^{(1)} + U_2^{(2)} = T_{13}(u_a) \sum K(\bar{v}_\gamma | \bar{u}_\alpha) f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{v}_\mu, \bar{v}_\gamma) g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho) g(u_a, \bar{v}_\rho) \times \\ \times (f(\bar{v}_\rho, \bar{u}_\alpha) - f(u_a, \bar{v}_\gamma)) \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\gamma) \mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\mu) \times \\ \times [f(\bar{v}_\rho, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}}) T_{22}(\bar{v}_\rho) + g(\bar{u}_\rho, \bar{v}_\rho) f(\bar{u}_\rho, \bar{u}_\sigma) T_{12}(\bar{v}_\rho) T_{12}(\bar{u}_\sigma) T_{22}(\bar{u}_\rho)] T_{22}(\bar{u}_\alpha). \quad (7.43)$$

Мы получаем дополнительное разбиение $\bar{u}_{\bar{\alpha}} \Rightarrow \{\bar{u}_{\sigma}, \bar{u}_{\rho}\}$, где набор $\bar{u}_{\rho}$ состоит из одного элемента. Первое слагаемое в квадратных скобках дает вклад в члены типа (7.5):

$$Z_2 = T_{13}(u_a) \sum K(\bar{v}_{\gamma}|\bar{u}_{\alpha})f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\bar{\alpha}})f(\bar{v}_{\rho}, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\mu}, \bar{v}_{\gamma})g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_{\rho})g(u_a, \bar{v}_{\rho}) \times \\ \times (f(\bar{v}_{\rho}, \bar{u}_{\alpha}) - f(u_a, \bar{v}_{\gamma}))\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\gamma})\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\mu})T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_{\alpha})T_{22}(\bar{v}_{\rho}).$$

Сделаем замены $\bar{v}_{\gamma} \rightarrow \bar{v}_{\alpha}$ и $\bar{v}_{\mu} \rightarrow \bar{v}_{\sigma}$, получим

$$Z_2 = T_{13}(u_a) \sum K(\bar{v}_{\alpha}|\bar{u}_{\alpha})f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\bar{\alpha}})f(\bar{v}_{\rho}, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\sigma}, \bar{v}_{\alpha})g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_{\rho})g(u_a, \bar{v}_{\rho}) \times \\ \times (f(\bar{v}_{\rho}, \bar{u}_{\alpha}) - f(u_a, \bar{v}_{\alpha}))\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\alpha})\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\sigma})T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_{\alpha})T_{22}(\bar{v}_{\rho}).$$

Объединяя этот вклад с вкладом (7.28), находим

$$Z_1 + Z_2 = T_{13}(u_a) \sum K(\bar{v}_{\alpha}|\bar{u}_{\alpha})f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\sigma}, \bar{v}_{\alpha})f(\bar{v}_{\rho}, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_{\rho})g(u_a, \bar{v}_{\rho}) \times \\ \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\alpha})\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\sigma})T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_{\alpha})T_{22}(\bar{v}_{\rho}) \quad (7.44)$$

и, следовательно,

$$Z_1 + Z_2 = \sum g(u_a, \bar{v}_{\rho})f(\bar{v}_{\rho}, \bar{u}_{\alpha})g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_{\rho})T_{13}(u_a)Y_{a-1, b-1}(\bar{u}_{\alpha}, \bar{v}_{\bar{\rho}})T_{22}(\bar{v}_{\rho}). \quad (7.45)$$

Видно, что данный вклад сокращает сумму по разбиениям в рекуррентном соотношении (4.4).

Второе слагаемое в квадратных скобках в формуле (7.43) дает вклад в члены типа (7.6), поэтому мы обозначим его через $\bar{Z}_3$. Имеем

$$\bar{Z}_3 = T_{13}(u_a) \sum K(\bar{v}_{\gamma}|\bar{u}_{\alpha})f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\sigma})f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho}) \times \\ \times g(\bar{v}_{\mu}, \bar{v}_{\gamma})g(\bar{u}_{\rho}, \bar{v}_{\rho})f(\bar{u}_{\rho}, \bar{u}_{\sigma})g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_{\rho})g(u_a, \bar{v}_{\rho}) \times \\ \times (f(\bar{v}_{\rho}, \bar{u}_{\alpha}) - f(u_a, \bar{v}_{\gamma}))\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\gamma})\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\mu})T_{12}(\bar{v}_{\rho})T_{12}(\bar{u}_{\sigma})T_{22}(\bar{u}_{\rho})T_{22}(\bar{u}_{\alpha}),$$

где мы сделали подстановку $\bar{u}_{\bar{\alpha}} = \{\bar{u}_{\sigma}, \bar{u}_{\rho}\}$. Объединяя подмножества $\{\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho}\}$ в набор $\bar{u}_{\mu}$, получаем

$$\bar{Z}_3 = T_{13}(u_a) \sum [K(\bar{v}_{\gamma}|\bar{u}_{\alpha})f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho})g(\bar{u}_{\rho}, \bar{v}_{\rho})]f(\bar{u}_{\mu}, \bar{u}_{\sigma})g(\bar{v}_{\mu}, \bar{v}_{\gamma})g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_{\rho})g(u_a, \bar{v}_{\rho}) \times \\ \times (f(\bar{v}_{\rho}, \bar{u}_{\alpha}) - f(u_a, \bar{v}_{\gamma}))\mathbb{T}_{13}(\bar{v}_{\gamma})\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\mu})T_{12}(\bar{v}_{\rho})T_{12}(\bar{u}_{\sigma})T_{22}(\bar{u}_{\mu}).$$

Видно, что можно вычислить сумму по разбиениям $\bar{u}_{\mu} \Rightarrow \{\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho}\}$. Эта сумма включает в себя слагаемые в квадратных скобках, а также произведение $f(\bar{v}_{\rho}, \bar{u}_{\alpha})$. Таким образом, мы имеем два вклада. Первый вклад дается суммой

$$\sum_{\bar{u}_{\mu} \Rightarrow \{\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho}\}} K(\bar{v}_{\gamma}|\bar{u}_{\alpha})f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho})g(\bar{u}_{\rho}, \bar{v}_{\rho}) = -f(\bar{u}_{\mu}, \bar{v}_{\rho})K(\{\bar{v}_{\rho} - c, \bar{v}_{\gamma}\}|\bar{u}_{\mu}), \quad (7.46)$$

где мы воспользовались леммой Б.2. Второй вклад возникает из суммы

$$\sum_{\bar{u}_{\mu} \Rightarrow \{\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho}\}} K(\bar{v}_{\gamma}|\bar{u}_{\alpha})f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho})g(\bar{u}_{\rho}, \bar{v}_{\rho})f(\bar{v}_{\rho}, \bar{u}_{\alpha}) = \\ = -f(\bar{v}_{\rho}, \bar{u}_{\mu}) \sum_{\bar{u}_{\mu} \Rightarrow \{\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho}\}} K(\bar{v}_{\gamma}|\bar{u}_{\alpha}) \frac{f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho})}{h(\bar{v}_{\rho}, \bar{u}_{\rho})} = \\ = f(\bar{v}_{\rho}, \bar{u}_{\mu}) \sum_{\bar{u}_{\mu} \Rightarrow \{\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho}\}} K(\bar{v}_{\gamma}|\bar{u}_{\alpha})K(\bar{u}_{\rho}|\bar{v}_{\rho} + c)f(\bar{u}_{\alpha}, \bar{u}_{\rho}) = -K(\{\bar{v}_{\rho}, \bar{v}_{\gamma}\}|\bar{u}_{\mu}), \quad (7.47)$$

где мы вновь воспользовались леммой Б.2 и равенством $1/h(\bar{v}_\rho, \bar{u}_\rho) = -K(\bar{u}_\rho|\bar{v}_\rho + c)$.

Сумма (7.46) дает вклад

$$\begin{aligned} \bar{Z}_3^{(1)} = T_{13}(u_a) \sum & [K(\{\bar{v}_\rho - c, \bar{v}_\gamma\}|\bar{u}_{\bar{\sigma}})f(\bar{u}_{\bar{\sigma}}, \bar{v}_\rho)f(u_a, \bar{v}_\gamma)] \times \\ & \times f(\bar{u}_{\bar{\sigma}}, \bar{u}_\sigma)g(\bar{v}_\mu, \bar{v}_\gamma)g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho)g(u_a, \bar{v}_\rho) \times \\ & \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\gamma)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\mu)T_{12}(\bar{v}_\rho)T_{12}(\bar{u}_\sigma)T_{22}(\bar{u}_{\bar{\sigma}}), \end{aligned} \quad (7.48)$$

где мы использовали тот факт, что $\bar{u}_\mu = \bar{u}_{\bar{\sigma}}$. После переобозначения подмножеств $\bar{v}_\gamma \rightarrow \bar{v}_\alpha$, $\bar{v}_\mu \rightarrow \bar{v}_\sigma$, $\bar{u}_\sigma \rightarrow \bar{u}_{\bar{\alpha}}$ и $\bar{u}_{\bar{\sigma}} \rightarrow \bar{u}_\alpha$ мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \bar{Z}_3^{(1)} = T_{13}(u_a) \sum & [K(\{\bar{v}_\rho - c, \bar{v}_\alpha\}|\bar{u}_\alpha)f(\bar{u}_\alpha, \bar{v}_\rho)f(u_a, \bar{v}_\alpha)] \times \\ & \times f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_\sigma, \bar{v}_\alpha)g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho)g(u_a, \bar{v}_\rho) \times \\ & \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\alpha)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\sigma)T_{12}(\bar{v}_\rho)T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_\alpha). \end{aligned} \quad (7.49)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (7.31), мы видим, что $\bar{Z}_3^{(1)} = -\bar{Z}_1$.

Аналогично сумма (7.47) после замены $\bar{u}_\mu$ на $\bar{u}_{\bar{\sigma}}$ дает вклад

$$\begin{aligned} \bar{Z}_3^{(2)} = -T_{13}(u_a) \sum & K(\{\bar{v}_\rho, \bar{v}_\gamma\}|\bar{u}_{\bar{\sigma}})f(\bar{u}_{\bar{\sigma}}, \bar{u}_\sigma)g(\bar{v}_\mu, \bar{v}_\gamma)g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho)g(u_a, \bar{v}_\rho) \times \\ & \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\gamma)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_\mu)T_{12}(\bar{v}_\rho)T_{12}(\bar{u}_{\bar{\sigma}})T_{22}(\bar{u}_{\bar{\sigma}}). \end{aligned} \quad (7.50)$$

Мы вновь переобозначаем подмножества $\bar{v}_\gamma \rightarrow \bar{v}_\sigma$, $\bar{v}_\mu \rightarrow \bar{v}_{\bar{\alpha}}$, $\bar{u}_\sigma \rightarrow \bar{u}_{\bar{\alpha}}$ и $\bar{u}_{\bar{\sigma}} \rightarrow \bar{u}_\alpha$, что дает

$$\begin{aligned} \bar{Z}_3^{(2)} = -T_{13}(u_a) \sum & K(\{\bar{v}_\rho, \bar{v}_\sigma\}|\bar{u}_\alpha)f(\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}})g(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\sigma)g(\bar{v}_{\bar{\rho}}, \bar{v}_\rho)g(u_a, \bar{v}_\rho) \times \\ & \times \mathbb{T}_{13}(\bar{v}_\sigma)\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\bar{\alpha}})T_{12}(\bar{v}_\rho)T_{12}(\bar{u}_{\bar{\alpha}})T_{22}(\bar{u}_\alpha). \end{aligned} \quad (7.51)$$

Сравнивая это выражение с формулой (7.34), мы видим, что $\bar{Z}_3^{(2)} = -\bar{Z}_2$. Таким образом, слагаемые типа (7.6) действительно сокращают друг друга, и мы получаем, что нежелательные слагаемые не дают вклада в окончательный результат.

Итак, мы доказали, что оператор $Y_{a,b}(\bar{u}, \bar{v})$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (4.4).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Свойства ССДС

Пусть $\bar{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ и $\bar{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$. ССДС является симметричной функцией от параметров $\bar{u}$ и симметричной функцией от параметров $\bar{v}$. Она ведет себя, как $1/u_n$ (как $1/v_n$) при $u_n \rightarrow \infty$ (соответственно при $v_n \rightarrow \infty$) и фиксированных остальных параметров. Она имеет простые полюсы в точках $u_j = v_k$. Поведение функции K в окрестности полюсов сводится к ССДС с меньшим количеством аргументов:

$$K(\bar{u}|\bar{v})|_{u_n \rightarrow v_n} = g(u_n, v_n)f(v_n, \bar{v}_n)f(\bar{u}_n, u_n)K(\bar{u}_n|\bar{v}_n) + \text{reg}, \quad (\text{A.1})$$

где reg означает часть, регулярную при $u_n \rightarrow v_n$; напоминаем также, что $\bar{u}_n = \bar{u} \setminus u_n$ и $\bar{v}_n = \bar{v} \setminus v_n$.

Легко видеть, что ССДС обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} K(\bar{u}, z - c | \bar{v}, z) &= K(\{\bar{u}, z\} | \{\bar{v}, z + c\}) = -K(\bar{u} | \bar{v}), \\ K(\bar{u} - c | \bar{v}) &= K(\bar{u} | \bar{v} + c) = (-1)^n \frac{K(\bar{v} | \bar{u})}{f(\bar{v}, \bar{u})}, \\ K(\bar{u} | \bar{v}) \Big|_{c \rightarrow -c} &= K(\bar{v} | \bar{u}). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Формулы суммирования

Б.1. Суммирование детерминантов Коши. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА Б.1. Пусть $\bar{w}$, $\bar{u}$ и $\bar{v}$ суть наборы комплексных переменных таких, что $\# \bar{u} = m_1$, $\# \bar{v} = m_2$ и $\# \bar{w} = m_1 + m_2$. Тогда

$$\sum g(\bar{w}_\alpha, \bar{u}) g(\bar{w}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}) g(\bar{w}_{\bar{\alpha}}, \bar{w}_\alpha) = \frac{g(\bar{w}, \bar{u}) g(\bar{w}, \bar{v})}{g(\bar{u}, \bar{v})}. \quad (\text{B.1})$$

Здесь сумма берется по всем разбиениям набора $\bar{w}$ на подмножества $\bar{w}_\alpha$ и $\bar{w}_{\bar{\alpha}}$ такие, что $\# \bar{w}_\alpha = m_1$ и $\# \bar{w}_{\bar{\alpha}} = m_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на хорошо известном явном представлении для детерминанта Коши. Пусть $\# \bar{u} = \# \bar{v} = n$. Тогда

$$g(\bar{u}, \bar{v}) = \Delta_n(\bar{u}) \Delta'_n(\bar{v}) \det_n(g(u_j, v_k)). \quad (\text{B.2})$$

Подставляя это равенство в формулу (Б.1), получаем

$$\begin{aligned} \sum g(\bar{w}_\alpha, \bar{u}) g(\bar{w}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}) g(\bar{w}_{\bar{\alpha}}, \bar{w}_\alpha) &= \\ &= \sum \Delta_{m_1}(\bar{w}_\alpha) \Delta'_{m_1}(\bar{u}) \det_{m_1}(g(w_{\alpha_j}, u_k)) \Delta_{m_2}(\bar{w}_{\bar{\alpha}}) \Delta'_{m_2}(\bar{v}) \det_{m_2}(g(w_{\bar{\alpha}_j}, v_k)) g(\bar{w}_{\bar{\alpha}}, \bar{w}_\alpha). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\Delta_{m_1}(\bar{w}_\alpha) \Delta_{m_2}(\bar{w}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{w}_{\bar{\alpha}}, \bar{w}_\alpha) = (-1)^{[P_{\alpha, \bar{\alpha}}]} \Delta_{m_1+m_2}(\bar{w}), \quad (\text{B.3})$$

где $P_{\alpha, \bar{\alpha}}$ – перестановка, отображающая объединение $\{\bar{w}_\alpha, \bar{w}_{\bar{\alpha}}\}$ естественно упорядоченных подмножеств $\bar{w}_\alpha$ и $\bar{w}_{\bar{\alpha}}$ в естественно упорядоченный набор $\{w_1, \dots, w_{m_1+m_2}\}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \sum g(\bar{w}_\alpha, \bar{u}) g(\bar{w}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}) g(\bar{w}_{\bar{\alpha}}, \bar{w}_\alpha) &= \\ &= \Delta_{m_1+m_2}(\bar{w}) \Delta'_{m_1}(\bar{u}) \Delta'_{m_2}(\bar{v}) \sum (-1)^{[P_{\alpha, \bar{\alpha}}]} \det_{m_1}(g(w_{\alpha_j}, u_k)) \det_{m_2}(g(w_{\bar{\alpha}_j}, v_k)). \end{aligned}$$

Данная сумма является не чем иным, как разложением детерминанта по m_1 столбцам:

$$\sum (-1)^{[P_{\alpha, \bar{\alpha}}]} \det_{m_1}(g(w_{\alpha_j}, u_k)) \det_{m_2}(g(w_{\bar{\alpha}_j}, v_k)) = \det_{m_1+m_2}(g(w_j, \gamma_k)), \quad (\text{B.4})$$

где $\bar{\gamma} = \{\bar{u}, \bar{v}\} = \{u_1, \dots, u_{m_1}, v_1, \dots, v_{m_2}\}$. Таким образом, мы получаем

$$\sum g(\bar{w}_\alpha, \bar{u}) g(\bar{w}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}) g(\bar{w}_{\bar{\alpha}}, \bar{w}_\alpha) = \Delta_{m_1+m_2}(\bar{w}) \Delta'_{m_1}(\bar{u}) \Delta'_{m_2}(\bar{v}) \det_{m_1+m_2}(g(w_j, \gamma_k)). \quad (\text{B.5})$$

Остается воспользоваться формулой (Б.2) для детерминанта матрицы $g(w_j, \gamma_k)$:

$$\det_{m_1+m_2} (g(w_j, \gamma_k)) = \frac{g(\bar{w}, \bar{u})g(\bar{w}, \bar{v})}{\Delta_{m_1+m_2}(\bar{w})\Delta'_{m_1+m_2}(\{\bar{u}, \bar{v}\})}. \quad (\text{Б.6})$$

Подставляя это выражение в (Б.5), мы немедленно приходим к формуле (Б.1).

ЛЕММА Б.2. Пусть $\bar{w}$, $\bar{u}$ и $\bar{v}$ суть наборы комплексных переменных таких, что $\# \bar{u} = m_1$, $\# \bar{v} = m_2$ и $\# \bar{w} = m_1 + m_2$. Тогда

$$\sum K(\bar{w}_\alpha | \bar{u}) K(\bar{v} | \bar{w}_{\bar{\alpha}}) f(\bar{w}_{\bar{\alpha}}, \bar{w}_\alpha) = (-1)^{m_1} f(\bar{w}, \bar{u}) K(\{\bar{u} - c, \bar{v}\} | \bar{w}). \quad (\text{Б.7})$$

Здесь сумма берется по всем разбиениям набора $\bar{w}$ на подмножества $\bar{w}_\alpha$ и $\bar{w}_{\bar{\alpha}}$ такие, что $\# \bar{w}_\alpha = m_1$ и $\# \bar{w}_{\bar{\alpha}} = m_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы дано в работе [29].

ЛЕММА Б.3. Пусть $\# \bar{u} = \# \bar{v} = n$. Тогда для произвольного комплексного ξ

$$\sum K(\bar{v} | \{\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \xi\}) g(\bar{u}_\alpha, \xi) f(\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \bar{u}_\alpha) = (f(\bar{u}, \xi) - f(\bar{v}, \xi)) K(\bar{v} | \bar{u}). \quad (\text{Б.8})$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{u} \Rightarrow \{\bar{u}_\alpha, \bar{u}_{\bar{\alpha}}\}$ с условием $\# \bar{u}_\alpha = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как обе части равенства (Б.8) убывают при $\xi \rightarrow \infty$, достаточно рассмотреть вычеты в полюсах $\xi = u_j$ и $\xi = v_j$. В правой части они достаточно очевидны. Если в левой части $\xi = u_j$, то полюс возникает тогда и только тогда, когда $u_j \in \bar{u}_\alpha$. Поскольку $\# \bar{u}_\alpha = 1$, мы заключаем, что $\bar{u}_\alpha = u_j$, и в сумме по разбиениям остается только одно слагаемое. Таким образом,

$$\sum K(\bar{v} | \{\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \xi\}) g(\bar{u}_\alpha, \xi) f(\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \bar{u}_\alpha) \Big|_{\xi \rightarrow u_j} = g(u_j, \xi) f(\bar{u}_j, u_j) K(\bar{v} | \bar{u}), \quad (\text{Б.9})$$

что совпадает с вычетом в правой части.

Если $\xi = v_j$, то $K(\bar{v} | \{\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \xi\})$ имеет полюс, и мы используем рекуррентное соотношение (А.1):

$$\begin{aligned} \sum K(\bar{v} | \{\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \xi\}) g(\bar{u}_\alpha, \xi) f(\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \bar{u}_\alpha) \Big|_{\xi \rightarrow v_j} &= \\ &= g(v_j, \xi) f(\bar{v}_j, v_j) \sum f(v_j, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) K(\bar{v}_j | \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{u}_\alpha, v_j) f(\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \bar{u}_\alpha) + \text{reg}. \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

Теперь сумму по разбиениям можно вычислить с помощью леммы Б.2. Имеем

$$\begin{aligned} \sum f(v_j, \bar{u}_{\bar{\alpha}}) K(\bar{v}_j | \bar{u}_{\bar{\alpha}}) g(\bar{u}_\alpha, v_j) f(\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \bar{u}_\alpha) &= -f(v_j, \bar{u}) \sum K(\bar{v}_j | \bar{u}_{\bar{\alpha}}) \frac{f(\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \bar{u}_\alpha)}{h(v_j, \bar{u}_\alpha)} = \\ &= f(v_j, \bar{u}) \sum K(\bar{v}_j | \bar{u}_{\bar{\alpha}}) K(\bar{u}_\alpha | v_j + c) f(\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \bar{u}_\alpha) = -K(\bar{v} | \bar{u}), \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

где мы использовали равенство $1/h(v_j, \bar{u}_\alpha) = -K(\bar{u}_\alpha | v_j + c)$. Следовательно,

$$\sum K(\bar{v} | \{\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \xi\}) g(\bar{u}_\alpha, \xi) f(\bar{u}_{\bar{\alpha}}, \bar{u}_\alpha) \Big|_{\xi \rightarrow v_j} = -g(v_j, \xi) f(\bar{v}_j, v_j) K(\bar{v} | \bar{u}) + \text{reg}, \quad (\text{Б.12})$$

что совпадает с вычетом в правой части формулы (Б.8).

СЛЕДСТВИЕ Б.1. При выполнении условий леммы Б.3

$$\sum K(\{\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \xi\} | \bar{u}) g(\bar{v}_\alpha, \xi) f(\bar{v}_{\bar{\alpha}}, \bar{v}_\alpha) = (f(\xi, \bar{u}) - f(\xi, \bar{v})) K(\bar{v} | \bar{u}). \quad (\text{Б.13})$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}_\alpha, \bar{v}_{\bar{\alpha}}\}$ с условием $\# \bar{v}_\alpha = 1$.

Это тождество следует из формулы (Б.8) после замен $c \rightarrow -c$ и $\bar{u} \leftrightarrow \bar{v}$.

Благодарности. Мне доставляет большое удовольствие поблагодарить моих коллег С. Пакуляка и Э. Рагуси за многочисленные и плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **40:2** (1979), 194–220.
- [2] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *УМН*, **34:5**(209) (1979), 13–63.
- [3] L. D. Faddeev, “How the algebraic Bethe ansatz works for integrable models”, *Symétries quantiques [Quantum Symmetries]*, Proceedings of the Les Houches summer school, Session LXIV (Les Houches, France, August 1 – September 8, 1995), eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam, 1998, 149–219.
- [4] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [5] N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **567:3** (2000), 554–582, arXiv: math-ph/9907019.
- [6] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Stat. Mech.*, **09** (2012), P09001, 33 pp., arXiv: 1206.2630.
- [7] F. Göhmann, A. Klümper, A. Seel, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37:31** (2004), 7625–7652, arXiv: hep-th/0405089.
- [8] A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **94:1** (1984), 67–92.
- [9] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **641:3** (2002), 487–518, arXiv: hep-th/0201045.
- [10] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **02** (2013), P02020, 24 pp., arXiv: 1210.0768.
- [11] F. C. Zhang, T. M. Rice, *Phys. Rev. B*, **37:7** (1988), 3759–3761.
- [12] P. Schlottmann, *Phys. Rev. B*, **36:10** (1987), 5177–5185.
- [13] P. A. Bares, G. Blatter, *Phys. Rev. Lett.*, **64:21** (1990), 2567–2570.
- [14] S. Sarkar, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23:9** (1990), L409–L414.
- [15] P. A. Bares, G. Blatter, M. Ogata, *Phys. Rev. B*, **44:1** (1991), 130–154.
- [16] S. Sarkar, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24:5** (1991), 1137–1152.
- [17] F. H. L. Essler, V. E. Korepin, *Phys. Rev. B*, **46:14** (1992), 9147–9162.
- [18] A. Foerster, M. Karowski, *Nucl. Phys. B*, **396:2–3** (1993), 611–638.
- [19] С. З. Пакуляк, С. М. Хорошкин, *ТМФ*, **145:1** (2005), 3–34, arXiv: math/0610433.
- [20] S. Khoroshkin, S. Pakuliak, V. Tarasov, *J. Geom. Phys.*, **57:8** (2007), 1713–1732, arXiv: math/0610517.
- [21] L. Frappat, S. Khoroshkin, S. Pakuliak, E. Ragoucy, *Ann. H. Poincaré*, **10:3** (2009), 513–548, arXiv: 0810.3135.
- [22] S. Belliard, S. Z. Pakuliak, E. Ragoucy, *SIGMA*, **6** (2010), 094, 22 pp., arXiv: 1012.1455.
- [23] V. Tarasov, A. Varchenko, *SIGMA*, **9** (2013), 048, 28 pp., arXiv: math.QA/0702277.
- [24] S. Belliard, E. Ragoucy, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41:29** (2008), 295202, 33 pp., arXiv: 0804.2822.
- [25] S. Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *Bethe vectors for models based on the super-Yangian $Y(\mathfrak{gl}(m|n))$* , arXiv: 1604.02311.
- [26] П. П. Кулиш, Е. К. Склянин, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **95** (1980), 129–160.
- [27] V. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **86:3** (1982), 391–418.
- [28] А. Г. Изергин, *Докл. АН СССР*, **297:2** (1987), 331–333.
- [29] S. Belliard, S. Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **2012:9** (2012), P09003, 17 pp., arXiv: 1206.4931.