Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Пестов, Электродинамика с заряженными струнами, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 3, 407–416

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9212>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:40:04

© 2017 г.

А. Б. Пестов*

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА С ЗАРЯЖЕННЫМИ СТРУНАМИ

Показано, что в четырехмерном пространстве-времени комплексному скалярному полю можно поставить в соответствие одномерно-протяженный объект, называемый заряженной струной. Струна называется заряженной потому, что описывающее ее комплексное скалярное поле взаимодействует с электромагнитным полем. Заряженная струна характеризуется расширением группы симметрии зарядового пространства до группы поворотных растяжений. Предложены релятивистски-инвариантные и калибровочно-инвариантные уравнения, описывающие взаимодействие комплексного скалярного поля с электромагнитным полем, каждому решению которых соответствует заряженная струна. Достигается это введением понятия индекса заряженной струны, который, как проверено, принимает только целые значения. Установлены уравнения, из которых следует, что заряженные струны естественно вписываются в рамки электродинамики Максвелла–Дирака.

Ключевые слова: электродинамика, магнитный заряд, анион, струна, заряженная струна.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9212>

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о возможных расширениях электродинамики обсуждался с различных точек зрения в работах [1] и [2]. Концепция магнитного заряда [1] считается одной из ключевых при попытке приблизиться к пониманию фундаментальных основ теории [3], хотя она не имеет поддержки со стороны эксперимента. Существование аксионов [2] также не подтверждено экспериментально, но эта идея востребована сегодня по крайней мере в трех фундаментальных областях современных исследований: квантовой хромодинамике, космологии и физике твердого тела. В настоящей работе показано, что наряду с монополями и аксионами имеет смысл обратить внимание на понятие заряженной струны, которое является одним из аспектов теории поля и входит в электродинамику Максвелла–Дирака как ее неотъемлемый, но остававшийся до сих пор скрытым элемент.

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: pestov@theor.jinr.ru

Это определяет цели настоящей работы, которая построена следующим образом. В разделе 2 теория заряженной струны сформулирована как релятивистская теория комплексного скалярного поля, инвариантная относительно локальной группы поворотных растяжений в зарядовом пространстве. В предложенной теории комплексное скалярное поле приводит к наблюдаемым эффектам только в том случае, когда индекс заряженной струны отличен от нуля. Индекс заряженной струны равен индексу замкнутого пути на плоскости комплексной переменной, который соответствует замкнутому контуру в пространстве-времени. Комплексное скалярное поле рассматривается при этом как отображение пространства-времени на плоскость комплексной переменной. В разделе 3 показано, как понятие заряженной струны может быть включено в электродинамику Максвелла–Дирака.

2. МОДЕЛЬ ЗАРЯЖЕННОЙ СТРУНЫ

В работе [4] была выдвинута идея, согласно которой алгебра комплексных чисел и алгебра кватернионов обеспечивают базис для описания физически реализуемых калибровочных полей. Представление о заряженных струнах введено в этой работе на основе алгебры комплексных чисел. Наш подход состоит в том, чтобы ввести понятие заряженной струны, основываясь на геометрических представлениях и отображениях симметрии, что предполагает использование линейных прямоугольных координат на плоскости комплексной переменной аналогично тому, как это осуществляется в аналитической геометрии. Это обеспечивает наиболее естественное, на наш взгляд, введение понятия заряженной струны.

Условимся, что для комплексной переменной $z = x + iy$ буква z обозначает одно-временно комплексное число, точку z на плоскости, изображающую это комплексное число, и вектор z , соответствующий этому комплексному числу. Длина вектора z называется модулем комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается как $|z|$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Для нормированных алгебр с единицей выполняется фундаментальное соотношение

$$|zz_1| = |z||z_1|. \quad (1)$$

Двухпараметрическую группу G_2 поворотных растяжений плоскости комплексной переменной образуют преобразования вида

$$z \rightarrow \tilde{z} = \Lambda z, \quad (2)$$

где $\Lambda = \Lambda_1 + i\Lambda_2$ есть произвольное комплексное число, модуль которого $|\Lambda|$ отличен от нуля. Таким образом, групповое пространство группы G_2 представляет собой плоскость комплексной переменной $\Lambda = \Lambda_1 + i\Lambda_2$ с выколотой точкой $\Lambda = 0$. Действие группы поворотных растяжений на плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ интранзитивно, так как точка $z = 0$ остается неподвижной при всех преобразованиях из группы G_2 .

Комплексное число $z/|z|$, равное по модулю единице, называется фазой комплексного числа z . Геометрически фаза комплексного числа z находится следующим образом. Комплексные числа, модуль которых равен единице, образуют окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Проведя из начала координат через точку z луч, получим на пересечении луча с окружностью точку, изображающую комплексное число $z/|z|$. Для последующего важно отметить, что фаза комплексного числа

инвариантна относительно растяжений плоскости комплексной переменной, так как все точки, лежащие на рассматриваемом луче, имеют одинаковые фазы. Фаза комплексного числа $z = 0$ не определена, поскольку изображающая его точка совпадает с началом координат.

Подгруппу $U(1)$ группы G_2 образуют фазовые преобразования вида

$$z \rightarrow \tilde{z} = \frac{\Lambda}{|\Lambda|} z. \quad (3)$$

Из (1) следует, что произведение двух фазовых преобразований снова есть фазовое преобразование. Рассматривая преобразования (2) группы поворотных растяжений, мы не налагаем условие $|\tilde{z}|^2 = |z|^2$, которое выполняется только для фазовых преобразований. Так как

$$\Lambda = |\Lambda| \frac{\Lambda}{|\Lambda|},$$

всякое преобразование из группы G_2 можно рассматривать как произведение фазового преобразования и растяжения. Как видно, при рассмотрении фазовых преобразований не используется понятие фазового угла, что, на наш взгляд, обеспечивает наиболее естественное и прозрачное введение понятия заряженной струны.

Соотношение

$$\frac{z}{|z|} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

задает фазу как периодическую функцию фазового угла α , поэтому α есть любое действительное число. Пусть это число положительно, тогда для нахождения $z/|z|$ возьмем нить длины α , закрепим один ее конец в точке 1 на единичной окружности и, намотав нить на окружность в направлении против часовой стрелки, найдем число $z/|z|$. Если α есть отрицательное число, то, чтобы найти $z/|z|$, на окружность нужно намотать нить длины $|\alpha|$ по часовой стрелке. Описанное хорошо известно из теории элементарных тригонометрических функций.

Пусть теперь точка z движется в плоскости комплексной переменной. Это движение задает путь в плоскости комплексной переменной и описывается функцией $z(\tau)$, $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$. Если начало пути $z(\tau_0)$ совпадает с концом пути $z(\tau_1)$, то выполняется равенство $z(\tau_0) = z(\tau_1)$ и путь называется замкнутым. Процессу движения ставится в соответствие непрерывное изменение фазового угла. Достигается это следующим образом. На плоскости комплексной переменной z проведем из начала координат O через точку $z(\tau_0)$ луч, который пересечет единичную окружность с центром в начале координат в точке P . Длина нити, наложенной на окружность и соединяющей точки 1 и P , равна $\alpha(\tau_0)$. При движении точки z вдоль пути $z(\tau)$ луч OP вращается и укладывает на единичную окружность нить, длина которой от точки 1 до точки P равна $\alpha(\tau)$. Если замкнутый путь охватывает начало координат один раз, то

$$\alpha(\tau_1) - \alpha(\tau_0) = 2\pi,$$

а рассматриваемый процесс движения происходит против часовой стрелки. В общем случае,

$$\alpha(\tau_1) - \alpha(\tau_0) = 2\pi n, \quad (4)$$

где n – целое число.

Введем теперь понятие заряженной струны, которое имеет в рамках теории поля следующую мотивацию. От комплексных чисел перейдем к комплексным скалярным полям

$$\varphi(x) = \varphi_1(x^0, x^1, x^2, x^3) + i\varphi_2(x^0, x^1, x^2, x^3),$$

которые определены всюду и имеют производные того порядка, который потребуется. Мы рассматриваем плоскость комплексной переменной как зарядовое пространство, а $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – как прямоугольные координаты на плоскости комплексной переменной. Локальную группу поворотных растяжений образуют преобразования

$$\varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(x) = \Lambda(x)\varphi(x), \quad (5)$$

где в данном случае

$$\Lambda(x) = \Lambda_1(x^0, x^1, x^2, x^3) + i\Lambda_2(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

есть произвольное комплексное скалярное поле, модуль которого не равен нулю. Модуль комплексного скалярного поля $\Lambda(x)$ не равен нулю, если не пересекаются множества точек M_1 и M_2 , на которых обращаются в нуль соответственно функции $\Lambda_1(x^0, x^1, x^2, x^3)$ и $\Lambda_2(x^0, x^1, x^2, x^3)$.

Рассмотрим теперь область пространства-времени, в которой не определена фаза комплексного скалярного поля. Так как $z \rightarrow \varphi(x)$, то точке $z = 0$ соответствует геометрическое место точек в пространстве-времени, которое определяется уравнением $\varphi(x) = 0$ или уравнениями

$$\varphi_1(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0, \quad \varphi_2(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0, \quad (6)$$

при этом конечно предполагается, что рассматриваемые функции не являются знакоопределенными, а градиенты функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ не коллинеарны. В последующем будем предполагать выполненными условия, при которых в каждый момент времени уравнения (6) задают линию в пространстве.

Линия в пространстве, на которой в фиксированный момент времени не определена фаза комплексного скалярного поля, будет называться заряженной струной. Уравнения (6) описывают движение заряженной струны в пространстве. Требуется найти такие полевые уравнения для нахождения функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, каждое решение которых описывало бы заряженную струну. С этой целью рассмотрим фазу комплексного скалярного поля φ :

$$\chi = \frac{\varphi}{|\varphi|}, \quad \bar{\chi} = \frac{\bar{\varphi}}{|\varphi|}.$$

Следует отметить, что введенное обозначение для фазы комплексного скалярного поля удобно для более компактной и легко обозримой записи формул. Комплексное скалярное поле $\chi = \varphi/|\varphi|$, инвариантное относительно локальных растяжений, будет называться в дальнейшем фазовым полем. Как показано выше, рассматриваемая абелева калибровочная симметрия представляет собой одно из свойств теории комплексных скалярных полей, поэтому фазовое поле $\chi = \varphi/|\varphi|$ должно отличаться от локальных фазовых преобразований $\Lambda(x)/|\Lambda(x)|$, которые не приводят к наблюдаемым эффектам. Именно это обстоятельство фактически и кладется в основу понятия заряженной струны.

Чтобы фазовое поле $\chi = \varphi/|\varphi|$ описывало заряженную струну, введем индекс заряженной струны θ . Индекс заряженной струны θ определяется как интеграл по замкнутому контуру в пространстве-времени, который не проходит через струну:

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \oint (i\bar{\chi} \partial_k \chi) dx^k = \frac{1}{2\pi} \oint (i\bar{\chi} d\chi). \quad (7)$$

Наглядно замкнутый контур может быть представлен следующим образом. Через заданную точку струны, перпендикулярно ее касательному вектору в этой точке, проводим плоскость. Замкнутый контур располагаем в этой плоскости так, чтобы он охватывал выбранную точку струны. Значение индекса заряженной струны состоит в том, чтобы чистая калибровка не давала никаких наблюдаемых эффектов. Отметим еще раз, что локальное фазовое преобразование определено всюду и для задающего это преобразование комплексного скалярного поля всюду определена фаза. Напротив, для описания заряженных струн подходят только такие комплексные скалярные поля, для которых фаза определена не во всем пространстве-времени.

Покажем, что индекс заряженной струны инвариантен относительно локальных поворотных растяжений (5). При локальных поворотных растяжениях (5) ковекторное поле $i\bar{\chi} \partial_k \chi$ преобразуется по закону

$$i\bar{\chi} \partial_k \chi \rightarrow i\bar{\chi} \partial_k \chi + \Lambda_k, \quad \Lambda_k = i \frac{\bar{\Lambda}}{|\Lambda|} \partial_k \left(\frac{\Lambda}{|\Lambda|} \right).$$

Отсюда находим, что

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{2\pi} \oint (i\bar{\chi} \partial_k \chi + \Lambda_k) dx^k = \theta + \frac{1}{2\pi} \oint \Lambda_k dx^k = \theta,$$

так как $\partial_j \Lambda_k - \partial_k \Lambda_j = 0$ и по теореме Стокса интеграл от Λ_k равен нулю.

Проверим теперь, что индекс может принимать следующие значения:

$$\theta = n, \quad (8)$$

где n – целое число. Для проверки соотношения (8) будем рассуждать следующим образом. Рассмотрим комплексное скалярное поле $\varphi(x)$ как отображение пространства-времени на плоскость комплексной переменной. При этом заряженная струна отображается в начало координат на плоскости комплексной переменной. Введем контур C в пространстве-времени, полагая

$$C: x^k = f^k(\tau), \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1.$$

Если контур замкнутый, то $f^k(\tau_0) = f^k(\tau_1)$. Контур соответствует пути на плоскости комплексной переменной. Если замкнутый контур в пространстве-времени охватывает линию, на которой обращается в нуль комплексное скалярное поле, то соответствующий ему замкнутый путь на плоскости комплексной переменной обходит начало координат. Вдоль контура фазовое поле можно рассматривать как функцию фазового угла,

$$\frac{\varphi}{|\varphi|} = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

Отсюда находим, что

$$(i\bar{\chi} \partial_k \chi) dx^k = -d\alpha.$$

Следовательно,

$$\int_C (i\bar{\chi} \partial_k \chi) dx^k = -\alpha(\tau_1) + \alpha(\tau_0).$$

Если рассматриваемый контур в пространстве-времени замкнут, то путь на плоскости комплексной переменной также замкнут, и он охватывает начало координат. Поэтому согласно (4)

$$\alpha(\tau_1) - \alpha(\tau_0) = 2\pi n,$$

где целое число n указывает, сколько раз точка на плоскости комплексной переменной, описывая замкнутый путь, обходит начало координат. Таким образом, соотношение (8) проверено.

Вывод состоит в том, что теория заряженной струны, инвариантная относительно локальной группы поворотных растяжений (5), может быть представлена лагранжианом

$$L_P = \frac{\hbar c \theta}{2\lambda^2} (D_k \bar{\chi})(D^k \chi) - \frac{1}{4} F_{kj} F^{kj}, \quad (9)$$

в котором θ есть индекс заряженной струны, а в качестве фундаментальной степени свободы рассматривается инвариантная относительно локальных растяжений фаза $\chi = \varphi/|\varphi|$ комплексного скалярного поля. Постоянная λ размерности длины также необходима, поскольку поле $\chi = \varphi/|\varphi|$ безразмерно.

Так как константа q взаимодействия фазового и электромагнитного полей может не совпадать с константой e взаимодействия спинорного и электромагнитного полей, в лагранжиане (9) $D_k \chi$ и $D_k \bar{\chi}$ имеют вид

$$D_k \chi = \left(\partial_k - \frac{iq}{\hbar c} A_k \right) \chi, \quad D_k \bar{\chi} = \left(\partial_k + \frac{iq}{\hbar c} A_k \right) \bar{\chi}.$$

Лагранжиан (9) инвариантен относительно локальной группы поворотных растяжений (5), так как нетрудно убедиться, что

$$\left(\partial_k - \frac{iq}{\hbar c} \tilde{A}_k \right) \tilde{\chi}(x) = \frac{\Lambda(x)}{|\Lambda(x)|} \left(\partial_k - \frac{iq}{\hbar c} A_k \right) \chi(x),$$

где

$$\tilde{\chi}(x) = \frac{\Lambda(x)}{|\Lambda(x)|} \chi(x), \quad A_k \rightarrow \tilde{A}_k = A_k - \frac{\hbar c}{q} \Lambda_k, \quad \Lambda_k = i \frac{\bar{\Lambda}}{|\Lambda|} \partial_k \left(\frac{\Lambda}{|\Lambda|} \right).$$

Вариацией лагранжиана (9) получаем систему уравнений

$$\partial_k (i\bar{\chi} D^k \chi) = 0, \quad (10)$$

$$\partial_k F^{kj} + \frac{q\theta}{\lambda^2} (i\bar{\chi} D^j \chi) = 0, \quad (11)$$

которая описывает взаимодействие электромагнитного и фазового полей. Система уравнений (10) и (11) совместна, так как из (11) следует уравнение (10).

Рассмотрим одно следствие, которое вытекает из уравнений (11). Если существует замкнутый контур в пространстве-времени, который охватывает заряженную струну и для которого справедливо соотношение

$$\oint (\partial^j F_{jk}) dx^k = 0,$$

тогда в соответствии с уравнением (11) мы имеем

$$\oint (i\bar{\chi} D_k \chi) dx^k = 0.$$

Отсюда и из формулы (8) следует, что

$$\Phi + \frac{\hbar c}{q} 2\pi n = \Phi + \frac{\hbar c}{q} n = 0, \quad (12)$$

где по теореме Стокса

$$\Phi = \oint A_k dx^k = \frac{1}{2} \int F_{kj} dx^k \wedge dx^j \quad (13)$$

есть поток электромагнитного поля через поверхность, охватываемую линией интегрирования. Из (12) следует, что при условии $\oint (\partial^j F_{jk}) dx^k = 0$ этот поток квантуется, а квант потока Φ_0 равен

$$\Phi_0 = \frac{\hbar c}{q}.$$

Установим связь между фазовым полем и электродинамикой Максвелла–Дирака.

3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МАКСВЕЛЛА–ДИРАКА

Электродинамика Максвелла–Дирака описывается лагранжианом

$$L = -\frac{1}{4} F_{jk} F^{jk} + \frac{i\hbar c}{2} [\bar{\psi} \gamma^k (\partial_k \psi) - (\partial_k \bar{\psi}) \gamma^k \psi] - mc^2 \bar{\psi} \psi + e A_k (\bar{\psi} \gamma^k \psi),$$

который инвариантен относительно локальных фазовых преобразований спинорного поля и калибровочных преобразований электромагнитного поля вида

$$\tilde{\psi} = \frac{\Lambda}{|\Lambda|} \psi, \quad \tilde{A}_k = A_k - \frac{\hbar c}{e} \Lambda_k, \quad \Lambda_k = i \frac{\bar{\Lambda}}{|\Lambda|} \partial_k \left(\frac{\Lambda}{|\Lambda|} \right). \quad (14)$$

Сравнивая электродинамику фазового поля с электродинамикой Максвелла–Дирака, приходим к выводу, что задача включения понятия заряженной струны в теорию Максвелла–Дирака допускает следующее решение. К лагранжиану Максвелла–Дирака добавляем лагранжиан собственно фазового поля и лагранжиан типа “ток на ток”. Таким образом, для лагранжиана L_G , решающего поставленную задачу, имеем $L_G = L + L_\chi$, где, следовательно,

$$L_\chi = \frac{\hbar c \theta}{2\lambda^2} (D_k \bar{\chi})(D^k \chi) + \hbar c \theta f (i\bar{\chi} D_k \chi) (\bar{\psi} \gamma^k \psi).$$

В лагранжиан L_χ введена безразмерная постоянная f , которую можно интерпретировать как константу взаимодействия фазового и спинорного полей.

Рассмотрим уравнения, которые получаются в результате вариации лагранжиана $L_G = L + L_\chi$. Уравнения Максвелла и Дирака в предложенной модели принимают вид

$$\partial_k F^{kj} + \frac{q\theta}{\lambda^2} (i\bar{\chi} D^j \chi) + (e + g) (\bar{\psi} \gamma^j \psi) = 0, \quad (15)$$

$$\gamma^k \left(i\partial_k + \frac{e + g}{\hbar c} A_k + i\theta f \bar{\chi} \partial_k \chi \right) \psi = \frac{mc}{\hbar} \psi, \quad (16)$$

тогда как уравнение (10) остается прежним. В уравнениях (15) и (16) $g = q\theta f$.

Отметим одно важное обстоятельство. В калибровке Лоренца уравнение (10) сводится к уравнению

$$\partial_k(i\bar{\chi}\partial^k\chi) = 0. \quad (17)$$

Отсюда следует, что фазовое поле в калибровке Лоренца является внешним по отношению к электромагнитному и спинорному полям. Таким образом, фазовое поле однозначно фиксирует калибровку и, влияя на поведение электромагнитного и спинорного полей, не испытывает обратного воздействия, если, конечно, пренебречь эффектами гравитации.

Покажем, что уравнение (17) имеет решения. Для этого положим

$$\varphi_1(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3, \quad \varphi_2(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3.$$

Тогда комплексное скалярное поле

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (a_0 + ib_0)x^0 + (a_1 + ib_1)x^1 + (a_2 + ib_2)x^2 + (a_3 + ib_3)x^3 = \\ &= c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + c_3x^3 = c_kx^k \end{aligned}$$

будет решением уравнения (17), если постоянный комплексный вектор $c_k = a_k + ib_k$ имеет нулевую длину в пространстве-времени Минковского,

$$(c_0)^2 - (c_1)^2 - (c_2)^2 - (c_3)^2 = 0.$$

Предъявленное решение уравнений (17) описывает движение заряженной струны, которая в каждый момент времени представляет собой прямую линию в пространстве.

Рассмотрим тензор энергии-импульса фазового поля, который допускает следующую запись:

$$T_{kj} = \frac{\hbar c \theta}{\lambda^2} [(i\bar{\chi} D_k \chi)(i\bar{\chi} D_j \chi) - \frac{1}{2} g_{kj} (i\bar{\chi} D_l \chi)(i\bar{\chi} D^l \chi)]. \quad (18)$$

Отсюда следует, что плотность энергии, равная

$$E = \frac{\hbar c \theta}{2\lambda^2} [(i\bar{\chi} D_0 \chi)^2 + (i\bar{\chi} D_1 \chi)^2 + (i\bar{\chi} D_2 \chi)^2 + (i\bar{\chi} D_3 \chi)^2],$$

будет положительно определенной величиной при $\theta > 0$ и отрицательно определенной величиной при $\theta < 0$. Можно сказать, что знак плотности энергии фазового поля зависит от ориентации заряженной струны и, следовательно, ориентация определяет, какое из состояний более устойчивое. Эффективная константа связи $e + g = e + q\theta f$, очевидно, также зависит от ориентации заряженной струны.

Из уравнений (15) и (16) следует, что фазовое поле позволяет “выключить” взаимодействие электромагнитного поля со спинорным полем, так как эффективная константа связи $e + g$ может обратиться в нуль при

$$q = -\frac{e}{\theta f}.$$

В этом случае уравнение (15) переходит в уравнение (11), а уравнение (16) описывает состояния спинорного поля, находящегося в поле заряженной струны.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко сформулируем полученные результаты и отметим, почему они могут быть интересны для современной теоретической физики. Новый результат в представленной статье составляет понятие фазового поля (заряженной струны), система уравнений (10), (11) и (15), (16), а также всё, что связано с этой системой.

Эффективную константу связи $e + g = e + q\theta f$ в уравнениях (15) и (16) можно рассматривать как один из ориентиров на пути к пониманию природы дробных зарядов в квантовом эффекте Холла [5] и квантовой хромодинамике. Как показано выше, возможный скрытый механизм “дробления заряда” состоит в переходе от обычных состояний электромагнитного и спинорного полей к состояниям, имеющим в целом топологический характер из-за присутствия фазового поля, что и приводит к смешиванию между локальным e и топологическим $g = q\theta f$ зарядами.

В теории твердого тела изучаются топологические дефекты, называемые дислокациями и дисклинациями [6], [7]. Так как одномерные сингулярности называются дислокациями, фазовое поле можно рассматривать как заряженную среду с дислокациями. Имеются определенные основания полагать, что фазовые векторные поля $i\bar{\chi} \partial_k \chi$ могут представлять определенный интерес и для изучения дисклинаций. Продолжая эту линию, отметим работу [8], в которой, как утверждается, развита полностью согласованная модель для изучения электродинамики сверхпроводников в стационарном и нестационарном режимах. Так как эта модель основана на уравнении Прока, естественно предположить, что уравнения (15) и (16) можно применить для понимания уникальных электродинамических свойств сверхпроводящего состояния. Действительно, полагая

$$q = -\frac{e}{\theta f},$$

получаем объяснение эффекта Мейсснера, который должен наблюдаться всюду, кроме тех точек, которые занимает заряженная струна. Постоянная λ в этом случае характеризует глубину проникновения поля. Электроны при этом оказываются связанными с заряженными струнами. Так называемый сверхпроводящий ток S_k , фигурирующий в теории сверхпроводимости, оказывается калибровочно-инвариантным и равен

$$S_k = \frac{q\theta}{\lambda^2} (i\bar{\chi} D_k \chi).$$

Топологические дефекты изучаются также и на уровне других масштабов [9]–[11]; если допустить, что заряженные струны предполагают более сложную топологию пространства-времени, то можно ставить вопрос о существовании определенного отношения между космическими, сверхпроводящими и заряженными струнами.

Известные трудности модели релятивистской струны в физике адронов [12], а также аргументы в пользу полевой теории дуальных струн, приведенные в статье [13], прямо подводят к тому, чтобы попытаться установить соответствие между дуальными и заряженными струнами. В результате встает вопрос о применении методов квантовой теории поля к рассматриваемой модели, хотя он и не столь тривиален, как хотелось бы.

Видимо, также представляет интерес рассмотрение идеи аниона [14] и составной частицы [5] в рамках электродинамики с заряженными струнами.

Благодарности. Автор выражает благодарность В. А. Осипову, Е. А. Кочетову за неоднократные конструктивные обсуждения затронутых в статье вопросов и В. В. Нестеренко, прочитавшему рукопись и взявшему на себя труд снабдить ее проясняющими ряд положений комментариями.

Список литературы

- [1] P. A. M. Dirac, “Quantised singularities in the electromagnetic field”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **133**:821 (1931), 60–72.
- [2] F. Wilczek, “Two applications of axion electrodynamics”, *Phys. Rev. Lett.*, **58**:18 (1987), 1799–1802.
- [3] G. 't Hooft, “Magnetic monopoles in unified gauge theories”, *Nucl. Phys. B*, **79**:2 (1974), 276–284.
- [4] T. T. Wu, C. N. Yang, “Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields”, *Phys. Rev. D*, **12**:12 (1975), 3845–3857.
- [5] Z. F. Ezawa, *Quantum Hall Effects*, World Sci., Singapore, 2000.
- [6] E. A. Kochetov, V. A. Osipov, “Gauge theory of disclinations on fluctuating elastic surfaces”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**:10 (1999), 1961–1972.
- [7] V. A. Osipov, “Topological defects in carbon nanocrystals”, *Topology in Condensed Matter*, Papers based on the presentation at the 3-month seminar programm “Topology in condensed matter” (Dresden, Germany, May 8 – July 31, 2002), Springer Series in Solid State Science, **150**, ed. M. I. Monastyrsky, Springer, Berlin, 2006, 93–116.
- [8] M. Tajmar, “Electrodynamics in superconductors explained by Proca equations”, *Phys. Lett. A*, **372**:18 (2008), 3289–3291.
- [9] A. Vilenkin, “Cosmic strings and domain walls”, *Phys. Rep.*, **121**:5 (1985), 263–315.
- [10] E. Witten, “Superconducting strings”, *Nucl. Phys. B*, **249**:4 (1985), 557–592.
- [11] V. V. Nesterenko, I. G. Pirozhenko, “Vacuum energy in conical space with additional boundary conditions”, *Class. Quantum Grav.*, **28**:17 (2011), 175020, 26 pp.
- [12] B. M. Barbashov, V. V. Nesterenko, *Introduction to the Relativistic String Theory*, World Sci., Singapore, 1990.
- [13] H. B. Nielsen, P. Olesen, “Vortex-line models for dual strings”, *Nucl. Phys. B*, **61** (1973), 45–61.
- [14] F. Wilczek, “Magnetic flux, angular momentum, and statistics”, *Phys. Rev. Lett.*, **48**:17 (1982), 1144–1145.

Поступила в редакцию 19.04.2016,
после доработки 24.05.2016