Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Марихин, Трехмерная решетка преобразований Беклунда интегрируемых случаев системы Дэви–Стьюартсона, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 3, 362–370

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9213>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:41:19

© 2016 г.

В. Г. Марихин*

ТРЕХМЕРНАЯ РЕШЕТКА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЕКЛУНДА ИНТЕГРИРУЕМЫХ СЛУЧАЕВ СИСТЕМЫ ДЭВИ–СТЮАРТСОНА

Построена трехмерная октаэдрическая решетка преобразований Беклунда интегрируемых случаев системы Дэви–Стюартсона. В узлах решетки расположены функции, через которые, с одной стороны, определены динамические переменные системы Дэви–Стюартсона, а с другой стороны, эти функции связаны билинейными соотношениями типа Хироты. Одним из уравнений решетки является чисто дискретное шеститочечное уравнение, совпадающее со знаменитым уравнением Хироты.

Ключевые слова: преобразования Беклунда, система Дэви–Стюартсона, уравнения Хироты.

DOI: 10.4213/tmf9213

1. ВВЕДЕНИЕ

Система Дэви–Стюартсона (ДС) была получена для описания распространения волнового пакета на поверхности жидкости [1]. Известные интегрируемые представители этого семейства ДС-1 и ДС-2 были исследованы многими авторами с использованием всего арсенала теории интегрируемых систем, в том числе метода обратной задачи [2], преобразований Беклунда [3] (см. также [4]–[7]) и билинейного представления [8], [9].

Для поиска явных решений уравнений ДС-1, ДС-2 было проведено много аналитических и численных исследований, среди которых необходимо отметить работу [10], в которой были найдены решения, экспоненциально убывающие в обоих направлениях (дромионы), которые позднее были обобщены [11]. В работе [8] приводится обобщение этих решений в виде двойных вронскианов в билинейном виде (см. также работы [12], [13] и цитированную в них литературу).

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: mvvg@itp.ac.ru

2. СИСТЕМА ДС

Мы выберем следующее представление для интегрируемой системы ДС. Рассмотрим пару коммутирующих в силу канонической скобки Пуассона

$$\begin{aligned}\{p(x, y), q(x', y')\} &= \delta(x - x')\delta(y - y'), \\ \{p(x, y), p(x', y')\} &= 0, \quad \{q(x, y), q(x', y')\} = 0\end{aligned}$$

гамильтонианов $\{H_1, H_2\} = 0$ и их плотности

$$\begin{aligned}h_1 &= p_x q_x + p q_x^2 + p \hat{O} p, & \hat{O} &= \partial_y^{-1} \partial_x, \\ h_2 &= p_y q_y + p q_y^2 + p \hat{O}^{-1} p, & \hat{O}^{-1} &= \partial_x^{-1} \partial_y,\end{aligned}\tag{1}$$

где $H_i = \iint h_i dx dy$.

Классический вид системы ДС получается при замене $q = \ln u$, $p = -(\chi/4)uv$. Рассмотрим сумму потоков, порождаемую гамильтонианами H_1 и H_2 , $-\partial_\tau = \partial_{t_1} + \partial_{t_2}$:

$$\begin{aligned}-v_\tau + v_{xx} + v_{yy} - \frac{\chi}{2}v(\hat{O} + \hat{O}^{-1})uv &= 0, \\ u_\tau + u_{xx} + u_{yy} - \frac{\chi}{2}u(\hat{O} + \hat{O}^{-1})uv &= 0,\end{aligned}\tag{2}$$

где $\hat{O} = \partial_y^{-1} \partial_x$, $\hat{O}^{-1} = \partial_x^{-1} \partial_y$. При замене переменных $x = \xi + \eta$, $y = \xi - \eta$, $2\partial_\tau = i\partial_t$ получаем систему ДС-1:

$$\begin{aligned}-iv_t + v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 2\chi v(uv) + v\phi_\xi &= 0, \\ iu_t + u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2\chi u(uv) + u\phi_\xi &= 0, \\ (\partial_\xi^2 - \partial_\eta^2)\phi &= -4\chi \partial_\xi(uv).\end{aligned}\tag{3}$$

При замене переменных $x = \xi + i\eta$, $y = \xi - i\eta$, $2\partial_\tau = i\partial_t$ получаем систему ДС-2:

$$\begin{aligned}-iv_t + v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 2\chi v(uv) + v\phi_\xi &= 0, \\ iu_t + u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 2\chi u(uv) + u\phi_\xi &= 0, \\ (\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2)\phi &= -4\chi \partial_\xi(uv).\end{aligned}\tag{4}$$

Отметим, что можно рассмотреть обобщение системы ДС:

$$\begin{aligned}-iv_t + v_{\xi\xi} + c_0 v_{\eta\eta} + c_1 v(uv) + c_2 v\phi_\xi &= 0, \\ iu_t + u_{\xi\xi} + c_0 u_{\eta\eta} + c_1 u(uv) + c_2 u\phi_\xi &= 0, \\ (\partial_\xi^2 + c_3 \partial_\eta^2)\phi &= c_4 \partial_\xi(uv).\end{aligned}\tag{5}$$

Однако при произвольных параметрах c_i система (5) не является интегрируемой. При выборе коэффициентов $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, 2\chi, 1, -1, -4\chi)$ получается система ДС-1, а при выборе $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4) = (-1, 2\chi, 1, 1, -4\chi)$ получаем систему ДС-2.

Важно отметить, что обычно системами ДС-1 и ДС-2 называют системы (3), (4), на которые наложена связь $v = u^*$. Мы изучаем преобразования Беклунда в общем случае, не налагая эту связь.

Укажем еще одну форму записи интегрируемой системы ДС [14] – поток, соответствующий гамильтониану H_1 , имеет вид

$$\begin{aligned} u_{t_1} &= u_{xx} + 2(uV)_x, \\ v_{t_1} &= -v_{xx} + (V^2)_y + 2u_x, \quad V_y = v_x, \end{aligned} \quad (6)$$

если $v = q_y$, $u = p$, а поток, соответствующий гамильтониану H_2 , –

$$\begin{aligned} u_{t_2} &= u_{yy} + 2(uv)_y, \\ v_{t_2} &= -v_{yy} + (v^2 + 2U)_y, \quad U_x = u_y, \end{aligned} \quad (7)$$

если $v = q_y$, $u = p$.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА

Для поиска преобразований Беклунда мы будем использовать метод, предложенный автором ранее. Удобная для нас формулировка метода изложена в работе [15]. В указанной работе строятся преобразования Беклунда гамильтоновых систем с канонической скобкой Пуассона, поэтому единственная сложность получения преобразований Беклунда заключается в правильном выборе производящей функции канонического преобразования. Этот вид диктуется структурой гамильтониана рассматриваемой задачи. Например в одномерном случае для систем с плотностью гамильтониана $H = -pq_{xx} + A(p, q_x)$ плотность канонического преобразования имеет вид $F = c\hat{q}_x^2 + q_x f(\hat{q} - q) + g(\hat{q} - q)$. В этом случае функции f , g и константа c находятся путем подстановки импульсов, найденных из канонического преобразования, в гамильтониан и с использованием требования $\delta(H[p, q] - H[\hat{p}, \hat{q}]) = 0$, которое гарантирует, что данное каноническое преобразование является преобразованием Беклунда (см. также [16]). В случае системы ДС применяется аналогичная процедура.

Мы будем рассматривать производящую функцию канонического преобразования

$$F[q, \hat{q}]: \quad p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad \hat{p} = -\frac{\partial F}{\partial \hat{q}}.$$

3.1. Двумерная цепочка Тоды. Пусть производящая функция канонического преобразования $F[q, \hat{q}]$ имеет вид

$$\begin{aligned} F &= \iint dx dy \left(\frac{1}{2} \hat{q}_x \hat{q}_y - f \right), \\ f &= e^{\hat{q}-q} \Rightarrow p = f, \quad \hat{p} = \hat{q}_y + f \Rightarrow \delta(H_i[p, q] - H_i[\hat{p}, \hat{q}]) = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Квадратные скобки у аргументов функций означают, что функция может зависеть не только от q или $\hat{q}$, но и от их производных.

В силу последнего равенства в (8) и результатов работы [15] данное каноническое преобразование является преобразованием Беклунда для систем с гамильтонианами H_1 , H_2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Каноническое преобразование является преобразованием Беклунда тогда и только тогда, когда $\delta(H[p, q] - H[\hat{p}, \hat{q}]) = 0$, где $H[p, q]$ и $H[\hat{p}, \hat{q}]$ – гамильтонианы системы до и после канонического преобразования. Преобразование Беклунда – преобразование $(p, q) \rightarrow (\hat{p}, \hat{q})$.*

Исключая импульсы из (8), получаем двумерную цепочку Тоды

$$q_{xy} = e^{\hat{q}-q} - e^{q-\check{q}}. \quad (9)$$

Для удобства мы временно используем обозначения $\hat{a} = a_{n+1}$, $a = a_n$, $\check{a} = a_{n-1}$.

3.2. Двумерная релятивистская цепочка Тоды 1. Пусть производящая функция канонического преобразования $F[q, q^{(1)}]$ имеет вид

$$F[q, q^{(1)}] = \iint dx dy \left(\frac{1}{2} q_x^{(1)} q_y^{(1)} - f_1 q_y^{(1)} - \frac{1}{2} g_1 \right), \quad (10)$$

$$f_1 = e^{q^{(1)}-q}, \quad g_1 = -e^{q^{(1)}-q} \hat{O}^{-1} e^{q^{(1)}-q},$$

тогда $p = f_1 q_y^{(1)} + g_1$, $p^{(1)} = q_{xy}^{(1)} + f_1 q_y + g_1$, и условие $\delta(H_i[p, q] - H_i[p^{(1)}, q^{(1)}]) = 0$, $i = 1, 2$, выполняется, а значит, преобразование (10) определяет преобразование Беклунда $(p, q) \rightarrow (p^{(1)}, q^{(1)})$ для H_1, H_2 . Здесь индекс (1) и ниже индекс (2) нумеруют импульсы и координаты после применения соответствующего преобразования Беклунда.

Исключая импульсы из (10), получаем двумерную релятивистскую цепочку Тоды 1

$$q_{xy} = q_y^{(1)} e^{q^{(1)}-q} - e^{q^{(1)}-q} \hat{O}^{-1} e^{q^{(1)}-q} - q_y e^{q-q^{(-1)}} + e^{q-q^{(-1)}} \hat{O}^{-1} e^{q-q^{(-1)}}, \quad (11)$$

где индекс (-1) обозначает преобразование, обратное к рассмотренному выше преобразованию Беклунда.

3.3. Двумерная релятивистская цепочка Тоды 2. Пусть производящая функция канонического преобразования $F[q, q^{(2)}]$ имеет вид

$$F[q, q^{(2)}] = \iint dx dy \left(\frac{1}{2} q_x^{(2)} q_y^{(2)} - f_2 q_x^{(2)} - \frac{1}{2} g_2 \right), \quad (12)$$

$$f_2 = e^{q^{(2)}-q}, \quad g_2 = -e^{q^{(2)}-q} \hat{O} e^{q^{(2)}-q},$$

тогда $p = f_2 q_x^{(2)} + g_2$, $p^{(2)} = q_{xy}^{(2)} + f_2 q_x + g_2$, и условие $\delta(H_i[p, q] - H_i[p^{(2)}, q^{(2)}]) = 0$, $i = 1, 2$, выполняется, а значит, преобразование (12) определяет преобразование Беклунда $(p, q) \rightarrow (p^{(2)}, q^{(2)})$ для H_1, H_2 .

Исключая импульсы из (12), получаем двумерную релятивистскую цепочку Тоды 2

$$q_{xy} = q_x^{(2)} e^{q^{(2)}-q} - e^{q^{(2)}-q} \hat{O} e^{q^{(2)}-q} - q_x e^{q-q^{(-2)}} + e^{q-q^{(-2)}} \hat{O} e^{q-q^{(-2)}}, \quad (13)$$

где индекс (-2) обозначает преобразование, обратное к рассмотренному выше преобразованию Беклунда $(p, q) \rightarrow (p^{(2)}, q^{(2)})$.

Релятивистские двумерные цепочки Тоды являются обобщением одномерных релятивистских цепочек Тоды [17] (см. также [18] и цитированную там литературу). Термин “релятивистская” по отношению к цепочке Тоды, возможно, является не слишком удачным, но повсеместно используется в литературе.

В следующем разделе мы получим параметризацию динамических переменных p и q , а также других переменных в терминах функций, входящих в билинейные уравнения, а затем покажем, что полученные в настоящем разделе преобразования Беклунда вытекают из этих билинейных уравнений.

4. РЕШЕТКА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЕКЛУНДА СИСТЕМЫ ДЭВИ–СТЮАРТСОНА

Для того чтобы параметризовать динамические переменные рассматриваемой задачи, используем простой тест Пенлеве для вычисления степени полюса и его вычета. Например, параметризация $q = \ln(W/\check{W}) \Rightarrow q_x = (W_x/W) - (\check{W}_x/\check{W})$ означает, что функция q_x есть сумма полюсов в точках, совпадающих с нулями полинома $\check{W}$ и единичными вычетами, и полюсов в точках, совпадающих с нулями полинома $\check{W}$ и вычетами -1 , при условии, что все нули полиномов попарно различны. Отметим, что после вывода всех билинейных уравнений полиномиальность функций, входящих в эти уравнения, не является необходимой (она использовалась чисто технически для вывода параметризации динамических переменных). Однако во многих интересных случаях, таких как солитонные или алгебро-геометрические решения, функции в билинейных уравнениях являются целыми.

Для записи полученных уравнений используем производную Хироты, которая определяется стандартно:

$$D_x^k D_y^l D_t^m a \cdot b = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'} \right)^l \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^m a(x, y, t) b(x' y' t')|_{x=x', y=y', t=t'}. \quad (14)$$

Конечно, первая производная Хироты – это просто вронскиан.

Рассмотрим двумерную цепочку Тоды

$$\begin{aligned} q_{xy} &= e^{\hat{q}-q} - e^{q-\hat{q}}, & q_x &= z, & p &= e^{\hat{q}-q} & \iff \\ z_y &= p - \check{p}, & p_x &= p(\hat{z} - z) & (\text{или } x \leftrightarrow y). \end{aligned} \quad (15)$$

Параметризуя p и q , получаем хорошо известное уравнение Хироты для двумерной цепочки Тоды:

$$q = \ln \frac{W}{\check{W}}, \quad p = \frac{\hat{W}\check{W}}{W^2} \Rightarrow D_x D_y W \cdot W = 2(\hat{W}\check{W} - \lambda W^2). \quad (16)$$

Для получения новых билинейных уравнений мы будем использовать преобразование Миуры из работы [14]:

$$\begin{aligned} \text{двумерная цепочка Тоды} &\rightarrow \text{двумерная цепочка Вольтерра} \rightarrow \\ &\rightarrow \text{двумерная цепочка Гейзенберга.} \end{aligned}$$

Первое из перечисленных выше преобразований Миуры приводит к двумерной цепочке Вольтерра [14]:

$$z = B + \partial_x \partial_y^{-1} A, \quad p = A\hat{B} \Rightarrow A_x = A(\hat{B} - B), \quad B_y = B(A - \check{A}). \quad (17)$$

Уравнения Хироты для данной цепочки имеют вид

$$A = \partial_y \ln \frac{W}{V}, \quad B = \partial_x \ln \frac{V}{\check{W}} \Rightarrow D_y W \cdot V = \check{W}\hat{V}, \quad D_x V \cdot \check{W} = \check{V}W. \quad (18)$$

Заметим, что из (18) следует, что $A = \hat{V}\check{W}/VW$, $B = \check{V}W/V\check{W}$.

Следующее преобразование Миуры [14] приводит к двумерной цепочке Гейзенберга:

$$B = -\frac{Q_x}{\hat{Q} - Q}, \quad A = -\frac{\hat{Q}_y}{\hat{Q} - Q} \Rightarrow \frac{Q_{xy}}{Q_x Q_y} = \frac{1}{Q - \hat{Q}} - \frac{1}{\hat{Q} - Q}. \quad (19)$$

Уравнения Хироты для этой цепочки имеют вид

$$Q = \frac{\check{U}}{\check{W}}, \quad \hat{Q} = \frac{U}{W} \Rightarrow D_y U \cdot V = \check{U} \hat{V}, \quad D_x V \cdot \check{U} = \check{V} U. \quad (20)$$

Заметим, что уравнения Хироты (20) совпадают с уравнениями (18) при замене $U \rightarrow W$.

Условия совместности для двумерной цепочки Тоды

$$(\partial_x + \hat{z})\hat{\psi} = \psi, \quad \psi_y + p\hat{\psi} = 0 \quad (21)$$

выполняются, если выбрать $\psi = V/W$.

Если сделать замену $W \rightarrow U$ в выражениях для координат и импульсов, то условия (21) выполняются, естественно, при $\psi = V/U$.

Покажем, что преобразования Беклунда, полученные в разделе 3, являются следствием билинейных уравнений, полученных в настоящем разделе.

Для двумерной цепочки Тоды нетрудно показать, что из уравнений (16) следуют преобразования Беклунда (8), соответствующие сдвигу $W \rightarrow \hat{W}$.

Рассмотрим, например, первую из релятивистских цепочек. Используем параметризацию $e^q = V/\check{V}$, $e^{q^{(1)}} = W/\check{W}$, рассмотрим выражение для импульса p данной цепочки, тогда вследствие уравнений (18) имеем

$$\begin{aligned} e^{\hat{q}-q} = p = e^{q^{(1)}-q} q_y^{(1)} - e^{q^{(1)}-q} \hat{O}^{-1} e^{q^{(1)}-q} &\Rightarrow e^{\hat{q}-q^{(1)}} - q_y^{(1)} + \hat{O}^{-1} e^{q^{(1)}-q} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{W_y}{W} - \frac{V_y}{V} \right) - \left(\frac{W_y}{W} - \frac{\check{W}_y}{\check{W}} \right) + \hat{O}^{-1} \left(\frac{V_x}{V} - \frac{\check{W}_x}{\check{W}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что и выражение для импульса $p^{(1)}$ является тождеством в силу билинейных уравнений (18).

Таким образом, преобразование Беклунда релятивистской цепочки Тоды 1 соответствует сдвигу $V \rightarrow W$.

Нетрудно проверить, что релятивистская цепочка Тоды 2 соответствует параметризации $e^q = W/\check{W}$, $e^{q^{(2)}} = \hat{V}/V$ (уравнения (12) выполняются тождественно в силу билинейных уравнений (18)), а значит, преобразование Беклунда этой цепочки соответствует сдвигу $W \rightarrow \hat{V}$.

Используя симметрию $W \leftrightarrow U$, получим еще два сдвига $V \rightarrow U$ и $U \rightarrow \hat{V}$.

Таким образом, каждому преобразованию Беклунда системы (1) соответствует сдвиг на решетке функций. Комбинация этих сдвигов приводит к бесконечной трехмерной решетке, в каждом узле которой расположена функция, которую мы и называем *решеткой преобразований Беклунда системы ДС*. Конечно, мы имеем в виду интегрируемые случаи системы (1).

Представить себе эту решетку можно следующим образом.

Рассмотрим плоскость (V, W) , проходящую через две параллельные прямые, соответствующие цепочкам Тоды $\dots \check{V}, V, \hat{V} \dots$ и $\dots \check{W}, W, \hat{W} \dots$. Размножим число этих прямых, используя сдвиги, соответствующие преобразованиям Беклунда $V \rightarrow W$ и обратным к ним. Получим бесконечное число параллельных прямых, лежащих в одной плоскости.

Аналогично, используя сдвиги, соответствующие релятивистским цепочкам Тоды, получим еще два бесконечных набора параллельных прямых, лежащих в той же плоскости. В итоге получаем треугольную решетку преобразований Беклунда (1).

Пользуясь симметрией $W \leftrightarrow U$, аналогично получаем плоскость (W, U) , пересекающую плоскость (W, V) под некоторым углом. Используя процедуру размножения плоскостей, аналогичную процедуре размножения прямых (см. выше), получаем трехмерную решетку. Далее мы выясним вид этой решетки и расположение функций на ней.

Вся решетка порождается уравнениями (16), (18), (20). Мы получим и другие уравнения, следующие из этих. Заметим, что уравнения, соответствующие гамильтонианам H_1, H_2 (1), приводят к следующим временным уравнениям Хироты:

$$D_{t_1} W \cdot \check{W} = D_x^2 W \cdot \check{W}, \quad D_{t_2} W \cdot \check{W} = D_y^2 W \cdot \check{W}. \quad (22)$$

Комбинируя уравнения (18) и (20), получим еще три важных соотношения:

$$D_x U \cdot W = V \hat{R}, \quad D_y U \cdot W = \hat{V} R, \quad W \check{U} - U \check{W} = V R, \quad (23)$$

последнее из которых сводится к чисто дискретному трехмерному уравнению Хироты, причем функции, входящие в это уравнение, естественно располагаются в вершинах октаэдра (см., например, [19], где данное уравнение представлено в дискретных переменных).

Введем тау-функции $\tau_{k,l,m}$, которые располагаются в вершинах решетки, тогда из уравнения Хироты следует, что

$$\begin{aligned} R &= \tau_{0,0,1}, & W &= \tau_{1,0,0}, & \check{W} &= \tau_{0,-1,0}, \\ U &= \tau_{0,1,0}, & \check{U} &= \tau_{-1,0,0}, & V &= \tau_{0,0,-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Важно отметить, что все полученные преобразования Беклунда являются четными сдвигами, т.е. если представить преобразование Беклунда в виде вектора $(\Delta k, \Delta l, \Delta m)$, то число $\Delta k + \Delta l + \Delta m$ должно быть четным, например сдвиг $(1, 1, 0)$ соответствует сдвигу вдоль цепочки Тоды. Применяя этот сдвиг к функции $\check{W}$, мы должны получить функцию W , т.е. сумма координаты функции $\check{W}$ и вектора сдвига равна координате функции W . Действительно, $(0, -1, 0) + (1, 1, 0) = (1, 0, 0)$. Таким образом, узлы построенной ранее решетки имеют декартовы координаты с целыми значениями, причем поскольку сумма координат любой точки октаэдра (24) нечетна, а сдвиги только четны, то любая точка решетки имеет нечетную сумму координат. Тогда функция $\tau_{k,l,m}$ принадлежит решетке в том и только в том случае, если число $k + l + m$ нечетно, т.е. получившаяся решетка является октаэдрической подрешеткой кубической решетки. Вторая подрешетка (если число $k + l + m$ четно) никак не связана с изучаемой решеткой.

Полученные билинейные уравнения в новых переменных имеют вид

$$D_x D_y \tau_{k+1,l,m} \cdot \tau_{k+1,l,m} = 2(\tau_{k,l-1,m} \tau_{k+2,l+1,m} - \lambda \tau_{k+1,l,m} \tau_{k+1,l,m}), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} D_x \tau_{k,l,m-1} \cdot \tau_{k,l-1,m} &= \tau_{k-1,l-1,m-1} \tau_{k+1,l,m}, \\ D_y \tau_{k+1,l,m} \cdot \tau_{k,l,m-1} &= \tau_{k,l-1,m} \tau_{k+1,l+1,m-1}, \\ D_x \tau_{k,l,m-1} \cdot \tau_{k-1,l,m} &= \tau_{k-1,l-1,m-1} \tau_{k,l+1,m}, \\ D_y \tau_{k,l+1,m} \cdot \tau_{k,l,m-1} &= \tau_{k-1,l,m} \tau_{k+1,l+1,m-1}, \\ D_x \tau_{k-1,l,m} \cdot \tau_{k,l-1,m} &= \tau_{k-1,l-1,m-1} \tau_{k,l,m+1}, \\ D_y \tau_{k,l+1,m} \cdot \tau_{k+1,l,m} &= \tau_{k,l,m+1} \tau_{k+1,l+1,m-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Дискретное уравнение Хироты принимает вид

$$\tau_{k+1,l,m} \tau_{k-1,l,m} - \tau_{k,l+1,m} \tau_{k,l-1,m} = \tau_{k,l,m+1} \tau_{k,l,m-1}, \quad (27)$$

временные уравнения Хироты –

$$\begin{aligned} D_{t_1} \tau_{k+1,l,m} \cdot \tau_{k,l-1,m} &= D_x^2 \tau_{k+1,l,m} \cdot \tau_{k,l-1,m}, \\ D_{t_2} \tau_{k+1,l,m} \cdot \tau_{k,l-1,m} &= D_y^2 \tau_{k+1,l,m} \cdot \tau_{k,l-1,m}. \end{aligned} \quad (28)$$

Итак, построена октаэдрическая трехмерная решетка преобразований Беклунда для интегрируемых версий системы ДС, определяемая билинейными уравнениями (25)–(28). Вероятно, уравнения (26), в особенности то, как они вложены в решетку, а также релятивистские двумерные цепочки Тоды (11), (13) являются новыми. В работах [20], [21] построены похожие билинейные уравнения для аналогичных систем, которые, однако, не совпадают с (26). Мы не занимались построением решений, для чего необходимо сделать соответствующие редукции и установить граничные условия. Кроме того, для солитонных (дромионных) решений достаточно исследовать цепочки преобразований Беклунда. Однако решетка необходима для построения решений двумерной цепочки Вольтерра и двумерной цепочки Гейзенберга.

Важно, что в систему уравнений, определяющих решетку, входит чисто дискретное трехмерное уравнение Хироты (27), которое является одним из ключевых в иерархии интегрируемых систем, поскольку путем перехода к различным пределам, заменой переменных и т. п. оно может быть сведено практически ко всем известным солитонным уравнениям [19].

Благодарности. Автор признателен В. Э. Адлеру, Л. В. Богданову и другим участникам семинара “Математическая физика” ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН за полезные замечания и обсуждения.

Список литературы

- [1] A. Davey, K. Stewartson, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **338** (1974), 10–110.
- [2] V. A. Arkadiev, A. K. Pogrebkov, M. C. Polivalov, *Phys. D*, **36**:1–2 (1989), 189–197.
- [3] D. Levi, L. Pilloni, P. M. Santini, *Phys. Lett. A*, **81**:8 (1981), 419–423.
- [4] M. Hisakado, *J. Phys. Soc. Japan*, **67**:9 (1998), 3038–3043.
- [5] A. N. Leznov, A. B. Shabat, R. I. Yamilov, *Phys. Lett. A*, **174**:5–6 (1993), 397–402.

- [6] S. B. Leble, M. A. Salle, A. V. Yurov, *Inverse Problems*, **8**:2 (1992), 207–218.
- [7] А. В. Юров, *ТМФ*, **109**:3 (1996), 338–346.
- [8] J. Hietarinta, R. Hirota, *Phys. Lett. A*, **145**:5 (1990), 237–244.
- [9] К. Р. Гилсон, Д. К. Ниммо, *ТМФ*, **128**:1 (2001), 43–55.
- [10] M. Boiti, J. J.-P. Leon, L. Martina, F. Pempinelli, *Phys. Lett. A*, **132**:8–9 (1988), 432–439.
- [11] A. S. Fokas, P. M. Santini, *Phys. D*, **44**:1–2 (1990), 99–130.
- [12] M. Tajuri, T. Arai, “Periodic soliton solutions to the davey–stewartson equation”, *Proceedings of the Third International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”* (Kyiv, Ukraine, June 12–18, 1999), Mathematical Physics, **30**, ed. A. M. Samoilenko, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2000, 210–217.
- [13] Z.-D. Dai, S.-L. Li, *Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.*, **24**:4 (2008), 599–612.
- [14] A. B. Shabat, R. Yamilov, *Phys. Lett. A*, **227**:1–2 (1997), 15–23.
- [15] В. Г. Марихин, *ТМФ*, **184**:1 (2015), 71–78.
- [16] В. Г. Марихин, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **118**:2 (1999), 217–228.
- [17] S. N. M. Ruijsenaars, *Relativistic Toda System*, Preprint Stichting Centre for Mathematics and Computer Sciences, Amsterdam, 1986.
- [18] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **111**:3 (1997), 323–334.
- [19] А. В. Забродин, *ТМФ*, **113**:2 (1997), 179–230.
- [20] C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**:2 (2005), 169–179.
- [21] V. E. Vekslerchik, *SIGMA*, **9** (2013), 044, 16 pp.

Поступила в редакцию 21.04.2016,
после доработки 15.05.2016