Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, Ф. Х. Хайдаров, Модели с четырьмя конкурирующими взаимодействиями и с несчетным множеством значений спина на дереве Кэли, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 3, 503–517

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9215>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:24:02

© 2017 г.

У. А. Розиков*, Ф. Х. Хайдаров†

МОДЕЛИ С ЧЕТЫРЬМЯ КОНКУРИРУЮЩИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ И С НЕСЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ЗНАЧЕНИЙ СПИНА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Рассмотрены модели с четырьмя конкурирующими взаимодействиями (с внешним полем, с взаимодействиями ближайшего соседа, вторых ближайших соседей, трех ближайших соседей) и с несчетным множеством $[0, 1]$ значений спина на дереве Кэли порядка $k = 2$. Задача построения расщепленных мер Гиббса для изучаемых моделей сводится к анализу решений некоторых нелинейных интегральных уравнений, также исследуются случаи моделей Изинга и Поттса. Показано, что периодические меры Гиббса для рассматриваемых моделей являются либо трансляционно-инвариантными, либо имеют период два. Также приведены примеры, когда периодические меры Гиббса с периодом два неединственны.

Ключевые слова: дерево Кэли, конкурирующее взаимодействие, конфигурация, мера Гиббса, модель Изинга, модель Поттса, периодическая мера Гиббса, фазовый переход.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9215>

1. ВВЕДЕНИЕ

Спиновые модели на графе и в непрерывных пространствах образуют обширный класс систем, рассматриваемых в рамках статистической механики. Некоторые из них имеют физический смысл, другие были предложены в качестве соответствующим образом упрощенных моделей более сложных систем. Геометрическая структура графа или физического пространства играет важную роль в подобных исследованиях. Например, для изучения проблемы фазовых переходов на решетке $\mathbb{Z}^d$ или в пространстве $\mathbb{R}^d$ обычно используется теория Пирогова–Синая (см. работы [1]–[3]).

*Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан. E-mail: rozikovu@yandex.ru

†Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан. E-mail: haydarov_imc@mail.ru

Общий подход к описанию фазовых переходов на $\mathbb{Z}^d$ и в $\mathbb{R}^d$ был разработан в статье [4]; некоторые новые результаты в данном направлении были получены в работах [5], [6] (см. также ссылки в них).

С другой стороны, при изучении моделей на дереве Кэли Γ_k применяется метод расщепленных марковских случайных полей, основанный на решении соответствующих рекуррентных уравнений. В частности, в статьях [7]–[15] с помощью решения рекуррентных уравнений построены меры Гиббса на дереве Γ_k .

В литературе исследованы различные варианты модели Изинга на дереве Кэли. Например, в работах [16]–[18] приведены точные решения для модели с конкурирующим взаимодействием и нулевым внешним полем в случае $J_3 = \alpha = 0$ (здесь и далее речь идет о структуре гамильтониана (2.1)). Случай $J = \alpha = 0$ рассмотрен в статьях [18], [19]. В частности, в работе [20] доказано, что существуют две трансляционно-инвариантные и несчетное число трансляционно-неинвариантных крайних мер Гиббса. В статье [21] проблема фазовых переходов была решена для случаев $\alpha = 0$, $J \cdot J_1 \cdot J_3 \neq 0$ и $J_3 = 0$, $\alpha \cdot J \cdot J_1 \neq 0$. В статье [10] рассмотрена модель Изинга с четырьмя конкурирующими взаимодействиями (т. е. случай $J \cdot J_1 \cdot J_3 \cdot \alpha \neq 0$) на Γ_2 – дереве Кэли порядка $k = 2$. Данные работы посвящены моделям с *конечным* множеством значений спина.

В статье [22] рассмотрена модель Поттса со *счетным* множеством значений спина на дереве Кэли. В ней показано, что множество трансляционно-инвариантных расщепленных мер Гиббса содержит не более одной точки независимо от параметров модели. В этом состоит принципиальное отличие моделей с бесконечным множеством значений спина от моделей с конечным множеством, в которых может существовать более чем одна трансляционно-инвариантная мера Гиббса.

В течение последних пяти лет все большее внимание привлекали к себе модели с *несчетным* количеством значений спина на дереве Кэли. До сих пор рассматривались модели со взаимодействием ближайшего соседа ($J_3 = J = \alpha = 0$, $J_1 \neq 0$) и с множеством значений спина $[0, 1]$. Для них был получен следующий результат: расщепленные меры Гиббса на дереве Кэли порядка k можно описать с помощью решений нелинейных интегральных уравнений. Для случая $k = 1$ (когда дерево Кэли превращается в одномерную решетку $\mathbb{Z}^1$) было показано, что решение интегрального уравнения единственно, из чего следует существование единственной меры Гиббса (доказательство этих хорошо известных результатов см., например, в статье [23] и в ссылках в ней). Для случая произвольного k было найдено достаточное условие единственности периодической расщепленной меры Гиббса. С другой стороны, было показано, что на дереве Кэли Γ_k порядка $k = 2$ существуют фазовые переходы (см. работы [24]–[30]). Отметим, что все эти публикации были упомянуты в связи со случаем $J_3 = J = \alpha = 0$, $J_1 \neq 0$.

В настоящей статье мы описываем расщепленные меры Гиббса на дереве Γ_2 , используя решения нелинейных интегральных уравнений, в случае $J_3^2 + J_1^2 + J^2 + \alpha^2 \neq 0$, который является обобщением случая $J_3 = J = \alpha = 0$, $J_1 \neq 0$. Также мы доказываем, что периодическая мера Гиббса для модели гамильтониана (2.1) с четырьмя конкурирующими взаимодействиями является либо трансляционно-инвариантной, либо имеет период два. В разделе 5 мы приводим пример неединственности периодической меры Гиббса для гамильтониана (2.1) в случае $J_3 \neq 0$, $J = J_1 = \alpha = 0$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Дерево Кэли. Дерево Кэли $\Gamma_k = (V, L)$ порядка $k \in \mathbb{N}$ представляет собой бесконечное однородное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Здесь V – множество вершин и L – множество ребер (дуг). Две вершины x и y называются ближайшими соседями, если существует соединяющее их ребро $l \in L$. В таком случае мы будем использовать обозначение $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли определяется как минимальное число $d = d(x, y)$, для которого существует последовательность вершин $x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y$, являющихся ближайшими соседями, т.е.

$$\langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \\ L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Множество прямых потомков вершины x обозначим как $S(x)$,

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} \mid d(x, y) = 1\}, \quad x \in W_n.$$

Видно, что любая вершина $x \neq x^0$ имеет k прямых потомков, а у вершины x^0 их $k + 1$. Вершины x и y называются следующими за ближайшими соседями (этот факт будем обозначать $\rangle x, y \langle$), если существует вершина $z \in V$ такая, что x, z и y, z являются ближайшими соседями. Мы рассматриваем далее только следующих за ближайшими соседей $\rangle x, y \langle$, для которых существует n такое, что $x, y \in W_n$. Три вершины x, y и z называются тройкой ближайших соседей, что обозначается как $\langle x, y, z \rangle$, если x и y, y и z – ближайшие соседи, т.е. $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$, и $x, z \in W_n, y \in W_{n-1}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Меры Гиббса для моделей с четырьмя конкурирующими взаимодействиями. Здесь исследуются модели с четырьмя конкурирующими взаимодействиями, в которых спин принимает значения на отрезке $[0, 1]$. При $\Lambda \subset V$ конфигурацией на множестве Λ называется произвольная функция $\sigma_\Lambda: \Lambda \rightarrow [0, 1]$ со значениями $\sigma(x)$, $x \in \Lambda$. Множество всех конфигураций на Λ обозначается $\Omega_\Lambda = [0, 1]^\Lambda = \Omega$, $\mathcal{B}$ – сигма-алгебра, порожденная измеримыми цилиндрическими подмножествами Ω .

Пусть $\xi_1: (t, u, v) \in [0, 1]^3 \rightarrow \xi_1(t, u, v) \in R$ и $\xi_i: (u, v) \in [0, 1]^2 \rightarrow \xi_i(u, v) \in R$, $i = 2, 3$, – ограниченные измеримые функции. Рассмотрим модель с четырьмя конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли, заданную посредством гамильтониана

$$H(\sigma) = -J_3 \sum_{\langle x, y, z \rangle} \xi_1(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)) - J \sum_{\rangle x, y \langle} \xi_2(\sigma(x), \sigma(z)) - \\ - J_1 \sum_{\langle x, y \rangle} \xi_3(\sigma(x), \sigma(y)) - \alpha \sum_x \sigma(x), \quad (2.1)$$

где сумма в первом члене вычисляется по всем тройкам ближайших соседей, во втором – по всем следующим за ближайшими соседями, в третьем – по всем ближайшим соседям и $J, J_1, J_3, \alpha \in R \setminus \{0\}$.

Гамильтониан $H(\sigma)$ (2.1) порождает условные плотности Гиббса. Чтобы определение плотности было непротиворечивым, будем считать $\Lambda \subset V$ конечным множеством с мощностью $|\Lambda|$. Обозначим через λ меру Лебега на отрезке $[0, 1]$. Таким образом, множество всех конфигураций на множестве Λ обладает априорной мерой λ_Λ , определенной как мера λ в степени $|\Lambda|$.

Итак, пусть $\Lambda \subset V$ – конечное множество. Обозначим через $\partial(\Lambda)$ множество граничных точек множества Λ , т. е. $\partial(\Lambda) = \{y \in V \setminus \Lambda \mid x \in \Lambda, \langle x, y \rangle\}$. Далее, положим

$$\Omega_\Lambda^* = \underbrace{\Omega_\Lambda \times \Omega_\Lambda \times \cdots \times \Omega_\Lambda}_{|\partial(\Lambda)|}, \quad \lambda_\Lambda^* = \underbrace{\lambda_\Lambda \times \lambda_\Lambda \times \cdots \times \lambda_\Lambda}_{|\partial(\Lambda)|},$$

где $\times$ – прямое произведение. Пусть $\bar{\sigma}_{V \setminus \Lambda}$ – фиксированная конфигурация на границе. Полная энергия конфигурации $\sigma = \sigma_\Lambda \in \Omega_\Lambda$ при условии, что на границе имеет место конфигурация $\bar{\sigma}_{V \setminus \Lambda}$, определяется как

$$\begin{aligned} H(\sigma_\Lambda | \bar{\sigma}_{V \setminus \Lambda}) = & -J_3 \sum_{\langle x, y, z \rangle: x, y, z \in \Lambda} \xi_1(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)) - J \sum_{\langle x, y \rangle: x, y \in \Lambda} \xi_2(\sigma(x), \sigma(y)) - \\ & - J_1 \sum_{\langle x, y \rangle: x, y \in \Lambda} \xi_3(\sigma(x), \sigma(y)) - \alpha \sum_{x \in \Lambda} \sigma(x) - \\ & - J_3 \sum_{\langle x, y, z \rangle: x \in \Lambda, z \notin \Lambda} \xi_1(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)) - J \sum_{\langle x, y \rangle: x \in \Lambda, y \notin \Lambda} \xi_2(\sigma(x), \bar{\sigma}(y)) - \\ & - J_1 \sum_{\langle x, y \rangle: x \in \Lambda, y \notin \Lambda} \xi_3(\sigma(x), \bar{\sigma}(y)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где первая и четвертая суммы вычисляются по всем тройкам ближайших соседей, вторая и шестая – по следующим за ближайшими соседями, а третья и пятая – по всем ближайшим соседям.

Для конфигурации $\sigma_\Lambda: \Lambda \rightarrow [0, 1]$ условная плотность Гиббса имеет вид

$$\nu_{\bar{\sigma}_{V \setminus \Lambda}}^\Lambda(\sigma_\Lambda) = \frac{1}{Z_\Lambda(\bar{\sigma}_{V \setminus \Lambda})} e^{-\beta H(\sigma_\Lambda | \bar{\sigma}_{V \setminus \Lambda})},$$

где $\beta = 1/T$, $T > 0$, и $Z_\Lambda(\bar{\sigma}_{V \setminus \Lambda})$ – статистическая сумма:

$$Z_\Lambda(\bar{\sigma}_{V \setminus \Lambda}) = \int \cdots \int_{\Omega_\Lambda^*} e^{-\beta H(\sigma_\Lambda | \bar{\sigma}_{\partial(\Lambda)})} \lambda_\Lambda^*(d\sigma_\Lambda).$$

Отметим, что если $x \in \Lambda$, $y \in V \setminus \Lambda$ и $\langle x, y \rangle$, тогда $y \in \partial(\Lambda)$. Таким образом, можно заменить $\bar{\sigma}_{V \setminus \Lambda}$ на $\partial(\Lambda)$. Наконец, условная мера Гиббса μ_Λ в объеме Λ при условии, что на границе имеет место конфигурация $\bar{\sigma}_{\partial(\Lambda)}$, определяется следующим образом:

$$\mu(\sigma \in \Omega: \sigma|_\Lambda = \sigma_\Lambda) = \int \cdots \int_{\Omega_\Lambda^*} \nu_{\bar{\sigma}_{\partial(\Lambda)}}^\Lambda(\sigma_\Lambda) \lambda_\Lambda^*(d\sigma_\Lambda). \quad (2.3)$$

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть $h: [0, 1] \times V \setminus \{x^0\} \rightarrow \mathbb{R}$ и $|h(t, x)| = |h_{t,x}| < C$, где x_0 – корень дерева Кэли и C есть константа, не зависящая от t . Рассмотрим для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $\sigma_n: x \in V_n \mapsto \sigma(x)$ плотность распределения $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} , заданную выражением

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x), x}\right), \quad (3.1)$$

где Z_n – соответствующая статистическая сумма:

$$Z_n = \int \dots \int_{\Omega_{V_{n-1}}} \exp\left(-\beta H(\tilde{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\tilde{\sigma}(x), x}\right) \lambda_{V_{n-1}}^*(d\tilde{\sigma}_n). \quad (3.2)$$

Пусть $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ и $\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}$ – конкатенация σ_{n-1} и ω_n . Назовем плотности $\mu^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, согласованными, если выполняется следующее условие:

$$\iint_{\Omega_{W_n} \times \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) (\lambda_{W_n} \times \lambda_{W_n})(d\omega_n) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \quad (3.3)$$

Согласно теореме Колмогорова о продолжении меры существует единственная мера μ на Ω_V такая, что $\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$ для любых n и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$. Мера μ называется *расщепленной мерой Гиббса*, соответствующей гамильтониану (2.1) и функции $x \mapsto h_x$, $x \neq x^0$.

Обозначим

$$K(t, u, v) = e^{J_3 \beta \xi_1(t, u, v) + J \beta \xi_2(u, v) + J_1 \beta (\xi_3(t, u) + \xi_3(t, v)) + \alpha \beta (u + v)},$$

$$\underbrace{\Omega_{W_n} \times \Omega_{W_n} \times \dots \times \Omega_{W_n}}_{3 \cdot 2^{p-1}} = \Omega_{W_n}^{(p)}, \quad \underbrace{\lambda_{W_n} \times \lambda_{W_n} \times \dots \times \lambda_{W_n}}_{3 \cdot 2^{p-1}} = \lambda_{W_n}^{(p)}, \quad n, p \in \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

и

$$f(t, x) = e^{h_{t,x} - h_{0,x}}, \quad (t, u, v) \in [0, 1]^3, \quad x \in V \setminus \{x^0\}.$$

ЛЕММА 3.1. Пусть $\omega_n(\cdot): W_n \rightarrow [0, 1]$, $n \geq 2$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_{\Omega_{W_n}^{(n)}} \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{y, z \in S(x)} K(\omega_{n-1}(x), \omega_n(y), \omega_n(z)) f(\omega_n(y), y) \times \\ & \quad \times f(\omega_n(z), z) d(\omega_n(y)) d(\omega_n(z)) = \\ & = \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{y, z \in S(x)} \iint_{\Omega_{W_n}^{(2)}} K(\omega_{n-1}(x), \omega_n(y), \omega_n(z)) f(\omega_n(y), y) \times \\ & \quad \times f(\omega_n(z), z) d(\omega_n(y)) d(\omega_n(z)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим элементы множества W_{n-1} через x_i :

$$x_i \in W_{n-1}, \quad i \in \{1, 2, \dots, 3 \cdot 2^{n-2}\}, \quad \bigcup_{i=1}^{3 \cdot 2^{n-2}} \{x_i\} = W_{n-1} \quad \text{и} \quad S(x_i) = \{y_i, z_i\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \int \dots \int_{\Omega_{W_n}^{(n)}} \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{y, z \in S(x)} K(\omega_{n-1}(x), \omega_n(y), \omega_n(z)) f(\omega_n(y), y) f(\omega_n(z), z) \times \\
 & \quad \times d(\omega_n(y)) d(\omega_n(z)) = \\
 & = \int \dots \int_{\Omega_{W_n}^{(n)}} \prod_{i=1}^{3 \cdot 2^{n-2}} K(\omega_{n-1}(x_i), \omega_n(y_i), \omega_n(z_i)) f(\omega_n(y_i), y_i) f(\omega_n(z_i), z_i) \times \\
 & \quad \times d(\omega_n(y_i)) d(\omega_n(z_i)). \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

Поскольку $\omega_n(y_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, 3 \cdot 2^{n-2}\}$, и $\omega_n(z_j)$, $j \in \{1, 2, \dots, 3 \cdot 2^{n-2}\}$, – независимые конфигурации, правая часть выражения (3.5) равна

$$\begin{aligned}
 & \zeta(\omega_{n-1}(x_1), y_1, z_1) \int \dots \int_{\Omega_{W_n}^{(n-2)}} K(\omega_{n-1}(x_2), \omega_n(y_2), \omega_n(z_2)) \times \dots \times \\
 & \quad \times K(\omega_{n-1}(x_{3 \cdot 2^{n-2}}), \omega_n(y_{3 \cdot 2^{n-2}}), \omega_n(z_{3 \cdot 2^{n-2}})) \times \\
 & \quad \times f(\omega_n(y_2), y_2) f(\omega_n(z_2), z_2) \dots f(\omega_n(y_{3 \cdot 2^{n-2}}), y_{3 \cdot 2^{n-2}}) f(\omega_n(z_{3 \cdot 2^{n-2}}), z_{3 \cdot 2^{n-2}}) \times \\
 & \quad \times d(\omega_n(y_2)) d(\omega_n(z_2)) \dots d(\omega_n(y_{3 \cdot 2^{n-2}})) d(\omega_n(z_{3 \cdot 2^{n-2}})), \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \zeta(\omega_{n-1}(x_i), y_i, z_i) & = \iint_{\Omega_{W_n}^{(2)}} K(\omega_{n-1}(x_i), \omega_n(y_i), \omega_n(z_i)) f(\omega_n(y_i), y_i) f(\omega_n(z_i), z_i) \times \\
 & \quad \times d(\omega_n(y_i)) d(\omega_n(z_i)).
 \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, можно переписать формулу (3.6) в виде

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^{3 \cdot 2^{n-2}} \zeta(\omega_{n-1}(x_i), y_i, z_i) & = \prod_{i=1}^{3 \cdot 2^{n-2}} \iint_{\Omega_{W_n}^{(2)}} K(\omega_{n-1}(x_i), \omega_n(y_i), \omega_n(z_i)) \times \\
 & \quad \times f(\omega_n(y_i), y_i) f(\omega_n(z_i), z_i) d(\omega_n(y_i)) d(\omega_n(z_i)) = \\
 & = \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{y, z \in S(x)} \iint_{\Omega_{W_n}^{(2)}} K(\omega_{n-1}(x), \omega_n(y), \omega_n(z)) \times \\
 & \quad \times f(\omega_n(y), y) f(\omega_n(z), z) d(\omega_n(y)) d(\omega_n(z)).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следующая теорема описывает условия на значения h_x , гарантирующие согласованность соответствующих плотностей $\mu^{(n)}(\sigma_n)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для того чтобы мера $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяла условию согласованности (3.3) при любом $x \in V \setminus \{x^0\}$, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$f(t, x) = \prod_{y, z \in S(x)} \frac{\int_0^1 \int_0^1 K(t, u, v) f(u, y) f(v, z) du dv}{\int_0^1 \int_0^1 K(0, u, v) f(u, y) f(v, z) du dv}, \tag{3.7}$$

где $S(x) = \{y, z\}$, $\langle y, x, z \rangle$ – тройка ближайших соседей и $du = \lambda(du)$ – мера Лебега.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Предположим, что условие (3.3) выполнено и мы хотим доказать равенство (3.7). Подставляя (2.3) в (3.3), получаем, что для любой конфигурации $\sigma_{n-1}: x \in V_{n-1} \mapsto \sigma_{n-1}(x) \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} & \frac{Z_{n-1}}{Z_n} \int \dots \int_{\Omega_{W_n}^{(n)}} \exp \left(J_3 \beta \sum_{\langle y, x, z \rangle, x \in W_{n-1}} \xi_1(\sigma_{n-1}(x), \sigma_n(y), \sigma_n(z)) \right) \times \\ & \quad \times \exp \left(J \beta \sum_{\langle y, z \rangle \in W_n} \xi_2(\sigma_n(y), \sigma_n(z)) + J_1 \beta \sum_{\langle x, y \rangle, x \in W_{n-1}} \xi_3(\sigma_{n-1}(x), \sigma_n(y)) \right) \times \\ & \quad \times \exp \left(\alpha \beta \sum_{y \in S(x), x \in W_{n-1}} \sigma_n(y) + \sum_{y \in S(x), x \in W_{n-1}} h_{\omega_n(y), y} \right) \lambda_{W_n}^{(n)}(d\omega_n) = \\ & = \exp \left(\sum_{x \in W_{n-1}} h_{\sigma_{n-1}(x), x} \right), \end{aligned}$$

где $\omega_n: x \in W_n \mapsto \omega_n(x)$. Из последнего равенства следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{Z_{n-1}}{Z_n} \int \dots \int_{\Omega_{W_n}^{(n)}} \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{\langle y, z \rangle \in S(x)} \exp \left(J_3 \beta \sum_{\langle y, x, z \rangle} \xi_1(\sigma_{n-1}(x), \omega_n(y), \omega_n(z)) \right) \times \\ & \quad \times \exp \left(J \beta \sum_{\langle y, z \rangle} \xi_2(\omega_n(y), \omega_n(z)) + J_1 \beta \cdot \xi_3(\sigma_{n-1}(x), \omega_n(y)) + \right. \\ & \quad \left. + J_1 \beta \cdot \xi(\sigma_{n-1}(x), \omega_n(z)) \right) \times \\ & \quad \times e^{\alpha \beta (\omega_n(y) + \omega_n(z)) + h_{\omega_n(y), y} + h_{\omega_n(z), z}} d(\omega_n(y)) d(\omega_n(z)) = \exp \left(\sum_{x \in W_{n-1}} h_{\sigma_{n-1}(x), x} \right). \end{aligned}$$

Согласно лемме 3.1

$$\begin{aligned} & \frac{Z_{n-1}}{Z_n} \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{\langle y, z \rangle \in S(x)} \iint_{\Omega_{W_n}^{(2)}} \exp \left(J_3 \beta \sum_{\langle y, x, z \rangle} \xi_1(\sigma_{n-1}(x), \omega_n(y), \omega_n(z)) \right) \times \\ & \quad \times \exp \left(J \beta \sum_{\langle y, z \rangle} \xi_2(\omega_n(y), \omega_n(z)) + J_1 \beta \cdot \xi_3(\sigma_{n-1}(x), \omega_n(y)) + \right. \\ & \quad \left. + J_1 \beta \cdot \xi(\sigma_{n-1}(x), \omega_n(z)) \right) \times \\ & \quad \times e^{\alpha \beta (\omega_n(y) + \omega_n(z)) + h_{\omega_n(y), y} + h_{\omega_n(z), z}} d(\omega_n(y)) d(\omega_n(z)) = \exp \left(\sum_{x \in W_{n-1}} h_{\sigma_{n-1}(x), x} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, для любого $\sigma_{n-1}(x) \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} & f(\sigma_{n-1}(x), x) = \\ & = \prod_{\langle y, z \rangle \in S(x)} \frac{\iint_{\Omega_{W_n}^{(2)}} K(\sigma_{n-1}(x), \omega_n(y), \omega_n(z)) f(\omega_n(y), y) f(\omega_n(z), z) d(\omega_n(y)) d(\omega_n(z))}{\iint_{\Omega_{W_n}^{(2)}} K(0, \omega_n(y), \omega_n(z)) f(\omega_n(y), y) f(\omega_n(z), z) d(\omega_n(y)) d(\omega_n(z))}. \end{aligned}$$

Вводя обозначения $\omega_n(y) = u$, $\omega_n(z) = v$, $\sigma_{n-1}(x) = t$, получаем равенство (3.7).

Достаточность. Предположим, что верно (3.7). Это эквивалентно тому, что имеют место представления

$$\prod_{\langle y, z \rangle \in S(x)} \iint_{\Omega_{W_n}^{(2)}} K(t, u, v) e^{h_{u, y} + h_{v, z}} du dv = a(x) e^{h_{t, x}}, \quad t \in [0, 1], \quad (3.8)$$

для некоторой функции $a(x) > 0$, $x \in V$. Левая часть (3.7) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Z_n} e^{-\beta H(\sigma_{n-1})} \lambda_{V_{n-2}}^* (d(\sigma_{n-1})) \times \\ & \times \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{\rangle y, z \langle \in S(x)} \iint_{\Omega_{W_n}^{(2)}} \exp \left(J_3 \beta \sum_{\langle y, x, z \rangle} \xi_1(\sigma_{n-1}(x), u, v) + \right. \\ & \quad \left. + J\beta \sum_{\rangle y, z \langle} \xi_2(u, v) + J_1 \beta \xi_3(\sigma_{n-1}(x), u) \right) \times \\ & \times e^{J_1 \beta \xi_3(\sigma_{n-1}(x), v) + \alpha \beta(u+v) + h_{u,y} + h_{v,z}} du dv = \exp \left(\sum_{x \in W_{n-1}} h_{\sigma_{n-1}(x), x} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Пусть $A_n(x) = \prod_{x \in W_{n-1}} a(x)$, тогда из (3.8) и (3.9) получаем, что правая часть (3.9) представляется выражением

$$\frac{A_{n-1}}{Z_n} e^{-\beta H(\sigma_{n-1})} \lambda_{V_{n-2}}^* (d\sigma) \prod_{x \in W_{n-1}} h_{\sigma_{n-1}(x), x}. \quad (3.10)$$

Поскольку $\mu^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, является плотностью распределения, имеет место равенство

$$\int \dots \int_{\Omega_{V_{n-2}}^*} \lambda_{V_{n-2}}^* (d\sigma_{n-1}) \iint_{\Omega_{W_n}^{(2)}} \lambda_{W_n}^{(2)} (d\omega_n) \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \omega_n) = 1.$$

Следовательно, согласно (3.10) получаем, что $Z_{n-1} A_{n-1} = Z_n$, и (3.7) верно. Теорема доказана.

Заметим, что в статьях [24]–[30] рассматривался гамильтониан (2.1) в случае $J_3 = J = \alpha = 0$ и $J_1 \neq 0$, и было показано, что плотности $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, согласованы, если и только если для любого $x \in V \setminus \{x^0\}$ справедливо равенство

$$f(t, x) = \prod_{y \in S(x)} \frac{\int_0^1 e^{J_1 \beta \xi_3(t, u)} f(u, y) du}{\int_0^1 e^{J_1 \beta \xi_3(0, u)} f(u, y) du}, \quad (3.11)$$

в котором $f(t, x) = e^{h_{t,x} - h_{0,x}}$, $t \in [0, 1]$, $x \in V$.

Выражение (3.11) впервые было получено в статье [29]. Согласно следующему замечанию соотношение (3.7) совпадает с (3.11) в случае $J_3 = J = \alpha = 0$, $J_1 \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если $J_3 = J = \alpha = 0$ и $J_1 \neq 0$, тогда (3.7) и (3.11) эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $J_3 = J = \alpha = 0$ и $J_1 \neq 0$ справедливо равенство

$$K(t, u, v) = e^{J_1 \beta (\xi_3(u, t) + \xi_3(v, t))}.$$

Тогда (3.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \prod_{\rangle y, z \langle \in S(x)} \frac{\int_0^1 \int_0^1 e^{J_1 \beta (\xi_3(t, u) + \xi_3(t, v))} f(u, y) f(v, z) du dv}{\int_0^1 \int_0^1 e^{J_1 \beta (\xi_3(0, u) + \xi_3(0, v))} f(u, y) f(v, z) du dv} = \\ &= \prod_{\rangle y, z \langle \in S(x)} \frac{\int_0^1 e^{J_1 \beta \xi_3(t, u)} f(u, y) du \cdot \int_0^1 e^{J_1 \beta \xi_3(t, v)} f(v, z) dv}{\int_0^1 e^{J_1 \beta \xi_3(0, u)} f(u, y) du \cdot \int_0^1 e^{J_1 \beta \xi_3(0, v)} f(v, z) dv}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Поскольку $\rangle y, z \langle = S(x)$, выражение (3.12) эквивалентно (3.11). Утверждение доказано.

Модель Изинга с конкурирующими взаимодействиями. Известно, что если $\xi_1(x, y, z) = xyz$, $\xi_i(x, y) = xy$, $i \in \{2, 3\}$, тогда модель (2.1) превращается в модель Изинга с несчетным множеством значений спина. В случае $J_1 = J_3 = 0$ и $J \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, очевидно, что равенство (3.7) эквивалентно равенству

$$f(t, x) = \prod_{y, z \in S(x)} \frac{\int_0^1 \int_0^1 e^{J\beta uv + \alpha\beta(u+v)} f(u, y) f(v, z) du dv}{\int_0^1 \int_0^1 e^{J\beta uv + \alpha\beta(u+v)} f(u, y) f(v, z) du dv} = 1.$$

Поэтому уравнение (3.7) имеет единственное решение $f(t, x) = 1$, $t \in [0, 1]$, $x \in V$, при любом $\beta > 0$. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $J_1 = J_3 = 0$ и $J \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда в модели Изинга с несчетным множеством значений спина на дереве Кэли порядка $k = 2$ существует единственная расщепленная мера Гиббса для любых $J \in \mathbb{R}$ и $\beta > 0$.

Модель Поттса с конкурирующими взаимодействиями. Положим $J_3 = 0$ и $J, J_1, \alpha \in \mathbb{R}$. Если $\xi_i(x, y) = \delta(x, y)$, $i \in \{2, 3\}$ (где δ – символ Кронекера), тогда модель (2.1) превращается в модель Поттса. Для любых $t \in [0, 1]$, $x \in V$, легко видеть, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 e^{J\beta\delta(u,v) + J_1\beta(\delta(u,t) + \delta(v,t)) + \alpha\beta(u+v)} du dv &= \\ &= \int_0^1 \int_0^1 e^{J\beta\delta(u,v) + J_1\beta(\delta(u,0) + \delta(v,0)) + \alpha\beta(u+v)} du dv. \end{aligned}$$

Поэтому в этом случае уравнение (3.7) имеет единственное решение $f(t, x) = 1$ и можно заключить, что справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. В модели Поттса с несчетным множеством значений спина на дереве Кэли порядка $k = 2$ существует единственная расщепленная мера Гиббса для любых $J_3 \neq 0$ и $J, J_1, \alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Существует ли при $J_3 \cdot J_1 \cdot J \cdot \alpha \neq 0$ ядро $K(t, u, v) > 0$ уравнения (3.7), если у уравнения по крайней мере два решения? Этот вопрос пока остается открытым.

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ (2.1)

В данном разделе мы рассматриваем периодические меры Гиббса для модели (2.1) и приводим теорему 4.1 о периодических мерах Гиббса.

Пусть G_k – свободное произведение $k + 1$ циклических групп второго порядка с порождающими элементами $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ соответственно. Существует биекция из множества вершин V дерева Кэли Γ_k на группу G_k (см. книгу [31]). Поэтому иногда мы используем G_k вместо V .

Пусть $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\}$ – набор всех соседей слова $x \in G_k$, G^* – нормальная подгруппа G_k индекса r и $G_k/G^* = \{G_0^*, G_1^*, \dots, G_{r-1}^*\}$ – фактор-группа с классом смежности $G_0^* = G^*$. Также пусть $q_i(x) = |S_1(x) \cap G_i^*|$, $i = 0, 1, \dots, r-1$, и $Q(x) = (q_0(x), q_1(x), \dots, q_{r-1}(x))$, где $x \in G_k$, $q_i(G_0^*) = q_i(e) = |\{j : a_j \in G_i^*\}|$, $Q(G_0^*) = (q_0(G_0^*), \dots, q_{r-1}(G_0^*))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть G^* – подгруппа G_k , $k \geq 1$. Функция h_x , $x \in G_k$, называется K -периодической, если $h_{yx} = h_x$ для всех $x \in G_k$, $y \in K$. G_k -периодическая функция h называется трансляционно-инвариантной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Гиббсовская мера называется G^* -периодической, если она соответствует G^* -периодической функции h .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Для любого $x \in G_k$ существует перестановка π_x координат вектора $Q(G_0^*)$ такая, что $\pi_x(Q(G_0^*)) = Q(x)$.

Пусть $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : \text{слово } x \text{ имеет четную длину}\}$ (см. книгу [31]). Положим

$$\mathfrak{R}^+ = \{\vartheta_1(z_1, z_2)\vartheta_2(z_1, z_3) \mid \vartheta_i \in C([0, 1] \times [0, 1]), \vartheta_i(\cdot, \cdot) > 0, i \in \{1, 2\}\}. \quad (4.1)$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $K(z_1, z_2, z_3) \in \mathfrak{R}^+$ и G^* – нормальная подгруппа конечного индекса в G_k . Тогда каждая G^* -периодическая мера Гиббса в модели (2.1) является либо трансляционно-инвариантной, либо $G_k^{(2)}$ -периодической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3.1

$$\begin{aligned} f(\sigma_{n-1}(x), x) &= \\ &= \prod_{\langle y, z \rangle \in S(x)} \frac{\int \int_{\Omega_{W_n}^{(2)}} K(\sigma_{n-1}(x), \omega_n(y), \omega_n(z)) f(\omega_n(y), y) f(\omega_n(z), z) d(\omega_n(y)) d(\omega_n(z))}{\int \int_{\Omega_{W_n}^{(2)}} K(0, \omega_n(y), \omega_n(z)) f(\omega_n(y), y) f(\omega_n(z), z) d(\omega_n(y)) d(\omega_n(z))}. \end{aligned}$$

Пусть $\{x_\downarrow, y, z\} = S_1(x)$. Из предложения 4.1 следует, что

$$\begin{aligned} f(\sigma_{n-1}(x), x) &= \\ &= \prod_{\langle y, z \rangle \in S(x)} \frac{\int \int_{\Omega_{W_n}^{(2)}} K(\sigma_{n-1}(x), \omega_n(y), \omega_n(z)) f(\omega_n(y), y) f(\omega_n(z), z) d(\omega_n(y)) d(\omega_n(z))}{\int \int_{\Omega_{W_n}^{(2)}} K(0, \omega_n(y), \omega_n(z)) f(\omega_n(y), y) f(\omega_n(z), z) d(\omega_n(y)) d(\omega_n(z))} = \\ &= \prod_{\langle y, x_\downarrow \rangle \in S(x)} \frac{\int \int_{\Omega_{W_n}^{(2)}} K(\sigma_{n-1}(x), \omega_n(y), \omega_n(x_\downarrow)) f(\omega_n(y), y) f(\omega_n(x_\downarrow), x_\downarrow) d(\omega_n(y)) d(\omega_n(x_\downarrow))}{\int \int_{\Omega_{W_n}^{(2)}} K(0, \omega_n(y), \omega_n(x_\downarrow)) f(\omega_n(y), y) f(\omega_n(x_\downarrow), x_\downarrow) d(\omega_n(y)) d(\omega_n(x_\downarrow))}. \end{aligned}$$

Поскольку $K(z_1, z_2, z_3) \in \mathfrak{R}^+$, существуют $K_1(z_1, z_2)$ и $K_2(z_1, z_3)$ такие, что верно равенство $K(z_1, z_2, z_3) = K_1(z_1, z_2)K_2(z_1, z_3)$. В результате получаем, что

$$\begin{aligned} &\frac{\int_{\Omega_{W_n}} K_2(\sigma_{n-1}(x), \omega_n(z)) f(\omega_n(z), z) d(\omega_n(z))}{\int_{\Omega_{W_n}} K_2(0, \omega_n(z)) f(\omega_n(z), z) d(\omega_n(z))} = \\ &= \frac{\int_{\Omega_{W_n}} K_2(\sigma_{n-1}(x), \omega_n(x_\downarrow)) f(\omega_n(x_\downarrow), x_\downarrow) d(\omega_n(x_\downarrow))}{\int_{\Omega_{W_n}} K_2(0, \omega_n(x_\downarrow)) f(\omega_n(x_\downarrow), x_\downarrow) d(\omega_n(x_\downarrow))}. \quad (4.2) \end{aligned}$$

Пусть $\omega_n(x_\downarrow) = p$, $\omega_n(y) = u$, $\omega_n(z) = v$ и $\sigma_{n-1}(x) = t$. Тогда (4.2) можно переписать в виде

$$\frac{\int_0^1 K_2(t, v) h(v, z) dv}{\int_0^1 K_2(0, v) h(v, z) dv} = \frac{\int_0^1 K_2(t, p) h(p, x_\downarrow) dp}{\int_0^1 K_2(0, p) h(p, x_\downarrow) dp}. \quad (4.3)$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\frac{\int_0^1 K_1(t, u) h(u, y) du}{\int_0^1 K_1(0, u) h(u, y) du} = \frac{\int_0^1 K_1(t, p) h(p, x_\downarrow) dp}{\int_0^1 K_1(0, p) h(p, x_\downarrow) dp}. \quad (4.4)$$

Согласно формулам (4.3) и (4.4)

$$h(t, x) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 K(t, p_1, p_2) h(p_1, x_\downarrow) h(p_2, x_\downarrow) dp_1 dp_2}{\int_0^1 \int_0^1 K(0, p_1, p_2) h(p_1, x_\downarrow) h(p_2, x_\downarrow) dp_1 dp_2}.$$

Рассуждая аналогично, записываем соотношение

$$h(\omega_{n-1}(x), y) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 K(\omega_{n-1}(x), p_1, p_2) h(p_1, x) h(p_2, x) dp_1 dp_2}{\int_0^1 \int_0^1 K(0, p_1, p_2) h(p_1, x) h(p_2, x) dp_1 dp_2} = h(\omega_{n-1}(x), z).$$

Из последнего выражения и предложения 4.1 следует, что $h(\cdot, y) = h(\cdot, z) = h(\cdot, x_\downarrow) = h_1$ и $h(\cdot, x) = h_2$. Если $h_1 = h_2$, тогда соответствующая мера трансляционно-инвариантна, а если $h_1 \neq h_2$, то она $G_k^{(2)}$ -периодическая. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Теорема 4.1 является обобщением теоремы 1 статьи [30] со случая $J_3 = J_1 = \alpha = 0$, $J \neq 0$ на случай $J_3^2 + J_1^2 + J^2 + \alpha^2 \neq 0$. В самом деле, если $J_3 = J = \alpha = 0$, $J_1 \neq 0$, тогда $K(t, u, v) = e^{J\beta\xi_3(t,u)} e^{J\beta\xi_3(t,v)} = \vartheta(t, u)\vartheta(t, v) \in \mathbb{R}^+$.

Согласно теореме 4.1 проблема поиска H -периодических решений уравнения (3.7) сводится к проблеме поиска $G_k^{(2)}$ -периодических или трансляционно-инвариантных решений (3.7). Функция $f(t, x)$ называется трансляционно-инвариантной, если для некоторой функции $f_1(t)$ при всех $x \in V$ $f(t, x) = f_1(t)$. Аналогично, $f(t, x)$ называется $G_k^{(2)}$ -периодической, если для некоторых функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$

$$f(t, x) = \begin{cases} f_1(t), & x \in G_k^{(2)}, \\ f_2(t), & x \in G_k \setminus G_k^{(2)}. \end{cases}$$

Следовательно, для $K(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^+$ остается изучить только следующие уравнения:

$$f(t) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 K(t, u, v) f(u) f(v) du dv}{\int_0^1 \int_0^1 K(0, u, v) f(u) f(v) du dv} \quad (4.5)$$

и

$$f(t) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 K(t, u, v) g(u) g(v) du dv}{\int_0^1 \int_0^1 K(0, u, v) g(u) g(v) du dv}, \quad g(t) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 K(t, u, v) f(u) f(v) du dv}{\int_0^1 \int_0^1 K(0, u, v) f(u) f(v) du dv}. \quad (4.6)$$

ПРИМЕР 4.1. Если $K(t, u, v) = \zeta(t, u) + \zeta(t, v)$, $\zeta(t, u) \in C[0, 1]^2$, тогда уравнение (3.7) имеет единственное периодическое решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4.1 достаточно проверить уравнение (4.5) и систему (4.6). При $f(t, x) = f(t)$ и любых $x \in V$ получаем, что

$$f(t) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 (\zeta(t, u) + \zeta(t, v)) f(u) f(v) du dv}{\int_0^1 \int_0^1 (\zeta(0, u) + \zeta(0, v)) f(u) f(v) du dv} = \frac{\int_0^1 \zeta(t, u) f(u) du}{\int_0^1 \zeta(0, u) f(u) du} = (Af)(t).$$

Уравнение $(Af)(t) = f(t)$, $f(t) > 0$, имеет единственное решение (см. статью [29]). Аналогично, систему (4.6) можно переписать в виде $(Af)(t) = g(t)$, $(Ag)(t) = f(t)$. В работе [30] показано, что эта система не имеет решений на множестве $\{(f, g) \in (C[0, 1])^2 \mid f(t) > 0, g(t) > 0\}$.

5. ПРИМЕР НЕЕДИНСТВЕННОСТИ МЕРЫ ГИББСА В СЛУЧАЕ ГАМИЛЬТониАНА (2.1)

Определим оператор $W: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ с помощью выражения

$$(Wf)(t) = \int_0^1 \int_0^1 K(t, u, v) f(u) f(v) du dv. \quad (5.1)$$

Тогда уравнение (4.5) можно переписать в виде

$$f(t) = (Af)(t) = \frac{(Wf)(t)}{(Wf)(0)}, \quad f \in C^+[0, 1]. \quad (5.2)$$

Обозначим

$$\xi_1(t, u, v) = \frac{1}{\beta J_3} \ln \left[1 + \left(t - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(u - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(v - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(4^\tau (\tau + 1)^2 - \frac{1}{(v - 1/2)^\tau + 1} \right) \right],$$

где $t, u, v \in [0, 1]$, $\tau \in \{p/q \in \mathbb{Q} \mid p, q - \text{нечетные положительные числа}\}$. Тогда для ядра $K_\tau(t, u, v)$ интегрального оператора (5.2) можно записать равенство

$$K_\tau(t, u, v) = 1 + \left(t - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(u - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(v - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(4^\tau (\tau + 1)^2 - \frac{1}{(v - 1/2)^\tau + 1} \right).$$

Очевидно, что для всех $t, u, v \in [0, 1]$ имеет место соотношение $\lim_{\tau \rightarrow 0} K_\tau(t, u, v) > 0$. В результате можно сформулировать следующее утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Существует значение τ_0 такое, что для любого $\tau \geq \tau_0$ функция $K_\tau(t, u, v)$ положительна.

Положим

$$\mathfrak{Z} = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid p, q - \text{нечетные положительные числа} \right\} \cap \{ \tau \in \mathbb{Q} \mid K_\tau(t, u, v) > 0 \}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. При $\tau \in \mathfrak{Z}$ оператор A , удовлетворяющий равенству

$$(Af)(t) = \frac{(Wf)(t)}{(Wf)(0)},$$

в пространстве $C[0, 1]$ имеет по крайней мере две положительные неподвижные точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) Пусть $f_1(t) \equiv 1$. Тогда из равенства

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(u - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(v - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(4^\tau (\tau + 1)^2 - \frac{1}{(v - 1/2)^\tau + 1} \right) du dv = 0$$

следует равенство

$$(Af_1)(t) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \left[1 + \left(t - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(u - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(v - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(4^\tau (\tau + 1)^2 - \frac{1}{(v - 1/2)^\tau + 1} \right) \right] du dv}{\int_0^1 \int_0^1 \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^\tau \left(u - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(v - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(4^\tau (\tau + 1)^2 - \frac{1}{(v - 1/2)^\tau + 1} \right) \right] du dv} = 1.$$

Б) Обозначим

$$f_2(t) \equiv \frac{2^\tau}{2^\tau - 1} \left(1 + \left(t - \frac{1}{2} \right)^\tau \right).$$

Очевидно, что $f_2 \in C[0, 1]$ и функция $f_2(t)$ строго положительна. Тогда

$$(Af_2)(t) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 [1 + (t - \frac{1}{2})^\tau (u - \frac{1}{2})^\tau (v - \frac{1}{2})^\tau (4^\tau (\tau + 1)^2 - \frac{1}{(v - 1/2)^\tau + 1})] (1 + (u - \frac{1}{2})^\tau) (1 + (v - \frac{1}{2})^\tau) du dv}{\int_0^1 \int_0^1 [1 - (\frac{1}{2})^\tau (u - \frac{1}{2})^\tau (v - \frac{1}{2})^\tau (4^\tau (\tau + 1)^2 - \frac{1}{(v - 1/2)^\tau + 1})] (1 + (u - \frac{1}{2})^\tau) (1 + (v - \frac{1}{2})^\tau) du dv}.$$

Получаем, что

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(1 + \left(u - \frac{1}{2} \right)^\tau \right) \left(1 + \left(v - \frac{1}{2} \right)^\tau \right) du dv = 1$$

и

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(u - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(v - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(1 + \left(u - \frac{1}{2} \right)^\tau \right) du dv = 0.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\begin{aligned} (Af_2)(t) &= \frac{1 + 16^\tau (2\tau + 1)^2 (t - \frac{1}{2})^\tau}{1 - 8^\tau (2\tau + 1)^2} \times \\ &\times \frac{\int_0^1 \int_0^1 (u - \frac{1}{2})^\tau (v - \frac{1}{2})^\tau (1 + (u - \frac{1}{2})^\tau) (1 + (v - \frac{1}{2})^\tau) du dv}{\int_0^1 \int_0^1 (u - \frac{1}{2})^\tau (v - \frac{1}{2})^\tau (1 + (u - \frac{1}{2})^\tau) (1 + (v - \frac{1}{2})^\tau) du dv}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(u - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(v - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(1 + \left(u - \frac{1}{2} \right)^\tau \right) \left(1 + \left(v - \frac{1}{2} \right)^\tau \right) du dv = 16^\tau (2\tau + 1)^2,$$

мы приходим к выражению

$$(Af_2)(t) = \frac{1 + (t - 1/2)^\tau}{1 - (1/2)^\tau} = f_2(t).$$

Предложение доказано.

Таким образом, мы можем сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\sigma \in \Omega_V$ и $\tau \in \mathfrak{Z}$. Тогда в модели

$$\begin{aligned} H(\sigma) &= -\frac{1}{\beta} \sum_{\substack{\langle y, x, z \rangle, \\ x, y, z \in V}} \ln \left[1 + \left(\sigma(x) - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(\sigma(y) - \frac{1}{2} \right)^\tau \left(\sigma(z) - \frac{1}{2} \right)^\tau \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(4^\tau (\tau + 1)^2 - \frac{1}{(\sigma(z) - 1/2)^\tau + 1} \right) \right] \end{aligned}$$

на дереве Кэли Γ_2 существует по крайней мере две трансляционно-инвариантных меры Гиббса.

Ранее было показано, что для модели (2.1) при $J_3 = J = \alpha = 0$, $J_1 \neq 0$ существуют $G_k^{(2)}$ -периодические и трансляционно-инвариантные меры Гиббса, а также показано, что для некоторого $K(t, u, v)$ (см. работы [25], [30]) возможны фазовые переходы (под возможностью фазовых переходов мы понимаем неединственность расщепленной меры Гиббса). В настоящем разделе мы рассмотрели трансляционно-инвариантные меры Гиббса для гамильтониана (2.1) в случае $J_3 \neq 0$, $J = J_1 = \alpha = 0$. В других случаях вопрос о существовании фазовых переходов остается открытым.

Благодарности. Авторы хотели бы выразить свою признательность профессору Ю. М. Сухову за полезные замечания.

Список литературы

- [1] С. А. Пирогов, Я. Г. Синай, “Фазовые диаграммы классических решетчатых систем”, *ТМФ*, **25**:3 (1975), 358–369.
- [2] С. А. Пирогов, Я. Г. Синай, “Фазовые диаграммы классических решетчатых систем (Продолжение)”, *ТМФ*, **26**:1 (1976), 61–76.
- [3] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.
- [4] R. Kotecky, S. B. Shlosman, “First-order phase transition in large entropy lattice models”, *Commun. Math. Phys.*, **83**:4 (1982), 493–515.
- [5] A. Mazel, Y. Suhov, I. Stuhl, “A classical WR model with q particle types”, *J. Stat. Phys.*, **159**:5 (2015), 1040–1086.
- [6] A. Mazel, Y. Suhov, I. Stuhl, S. Zohren, “Dominance of most tolerant species in multi-type lattice Widom–Rowlinson models”, *J. Stat. Mech.*, **8** (2014), P08010, 9 pp.
- [7] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, М., 1985.
- [8] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев, “О чистых фазах модели Изинга на решетках Бете”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **35**:2 (1990), 220–230.
- [9] P. M. Bleher, J. Ruiz, V. A. Zagrebnov, “On the purity of the limiting Gibbs state for the Ising model on the Bethe lattice”, *J. Stat. Phys.*, **79**:1–2 (1995), 473–482.
- [10] N. N. Ganikhodjaev, U. A. Rozikov, “On Ising model with four competing interactions on Cayley tree”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **12**:2 (2009), 141–156.
- [11] К. Престон, *Гиббсовские состояния на счетных множествах*, Мир, М., 1977.
- [12] У. А. Розиков, “Структуры разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли по нормальным делителям конечного индекса и их применения для описания периодических распределений Гиббса”, *ТМФ*, **112**:1 (1997), 170–175.
- [13] F. Spitzer, “Markov random fields on an infinite tree”, *Ann. Probab.*, **3**:3 (1975), 387–398.
- [14] Y. M. Suhov, U. A. Rozikov, “A hard-core model on a Cayley tree: an example of a loss network”, *Queueing Syst.*, **46**:1–2 (2004), 197–212.
- [15] S. Zachary, “Countable state space Markov random fields and Markov chains on trees”, *Ann. Probab.*, **11**:4 (1983), 894–903.
- [16] N. N. Ganikhodjaev, C. H. Pah, M. R. B. Wahiddin, “Exact solution of an Ising model with completing interactions on a Cayley tree”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**:15 (2003), 4283–4289.
- [17] J. L. Monroe, “Phase diagrams of Ising models on Husime trees. II. Pair and multisite interaction systems”, *J. Stat. Phys.*, **67**:5–6 (1992), 1185–2000.
- [18] J. L. Monroe, “A new criterion for the location of phase transitions for spin system on a recursive lattice”, *Phys. Lett. A*, **188**:1 (1994), 80–84.
- [19] Н. Н. Ганиходжаев, “Точное решение модели Изинга на дереве Кэли с конкурирующими тернарным и бинарным взаимодействиями”, *ТМФ*, **130**:3 (2002), 493–499.
- [20] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, “On Gibbs measures of models with completing ternary and binary interactions and corresponding von Neumann algebras”, *J. Stat. Phys.*, **114**:3–4 (2004), 825–848.
- [21] N. N. Ganikhodjaev, C. H. Pah, M. R. B. Wahiddin, “An Ising model with three competing interactions on a Cayley tree”, *J. Math. Phys.*, **45**:9 (2004), 3645–3658.
- [22] N. N. Ganikhodjaev, U. A. Rozikov, “The Potts model with countable set of spin values on a Cayley tree”, *Lett. Math. Phys.*, **75**:2 (2006), 99–109.
- [23] Ю. Р. Дашян, Ю. М. Сухов, “К вопросу о гиббсовском описании случайных процессов с дискретным временем”, *Докл. АН СССР*, **242**:3 (1978), 513–516.

- [24] Yu. Kh. Eshkabilov, F. H. Haydarov, U. A. Rozikov, “Uniqueness of Gibbs measure for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **16**:1 (2013), 1–17.
- [25] Yu. Kh. Eshkabilov, F. H. Haydarov, U. A. Rozikov, “Non-uniqueness of Gibbs measure for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree”, *J. Stat. Phys.*, **147**:4 (2012), 779–794.
- [26] Yu. Kh. Eshkabilov, Sh. D. Nodirov, F. H. Haydarov, “Positive fixed points of quadratic operators and Gibbs measures”, *Positivity*, **20**:4 (2016), 929–943.
- [27] Yu. Kh. Eshkabilov, F. H. Haydarov, “On positive solutions of the homogenous Hammerstein integral equation”, *Nanosyst.: Phys. Chem. Math.*, **6**:5 (2015), 618–627.
- [28] B. Jahnel, C. Külske, G. I. Botirov, “Phase transition and critical value of nearest-neighbor system with uncountable local state space on Cayley tree”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **17**:3–4 (2014), 323–331.
- [29] U. A. Rozikov, Yu. Kh. Eshkabilov, “On models with uncountable set of spin values on a Cayley tree: Integral equations”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **13**:3 (2010), 275–286.
- [30] U. A. Rozikov, F. H. Haydarov, “Periodic Gibbs measures for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **18**:1 (2015), 1550006, 22 pp.
- [31] U. A. Rozikov, *Gibbs measures on a Cayley trees*, World Sci., Singapore, 2013.

Поступила в редакцию 23.04.2016